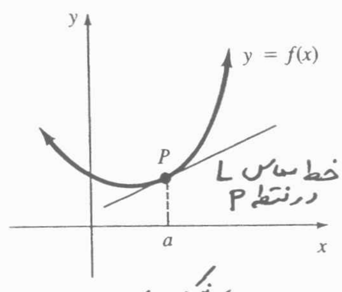
فصل ۴ مشتق و کاربردهای آن

۱.۴ میزان (نرخ) تغییر یک تابع

۱.۱.۴ مماس به یک نمودار

فرض کنید $y=f(x)$ تابعی پیوسته است. اگر نمودار تابع f، به عنوان مثال شکل (۱) دارای یک خط مماس L در نقطه P باشد آن گاه باید معادله آن را به دست آوریم. برای انجام این منظور باید اولاً مختصات نقطه P و ثانیاً شیب (ضریب زاویه) خط L را که با m_{tan} نمایش می دهیم، را داشته باشیم. مختصات نقطه P را به سادگی می توان به دست آورد زیرا نقطه روی نمودار است و با مشخص بودن x مقدار y آن معلوم می شود. مثلاً اگر $x=a$ در دامنه f باشد، مختصات نقطه P عبارت است از $(a, f(a))$.



شکل ۱

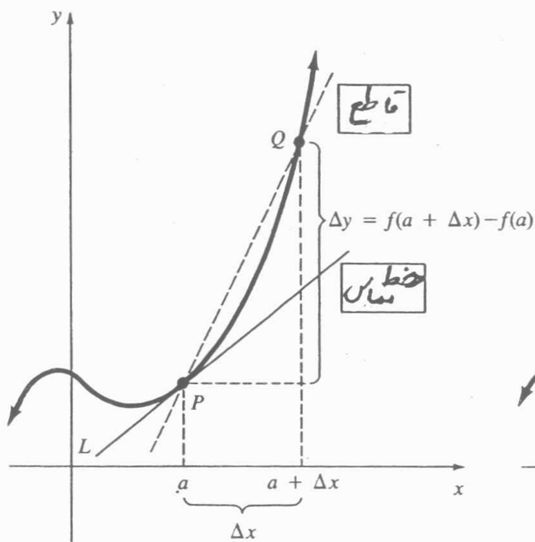
برای تعیین m_{tan} از تقریب استفاده می کنیم و ضریب زاویه های خطوط قاطع گذرنده از نقطه ثابت P و نقطه دلخواه دیگری مانند Q روی نمودار تابع را در نظر گرفته و این خطوط قاطع را با تغییر نقطه Q روی نمودار f به خط مماس مطلوب نزدیک می کنیم. اگر P دارای مختصات $(a, f(a))$ بوده و Q دارای مختصات $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ باشد، همان گونه که در شکل (۲) نمایش داده شده است، آن گاه ضریب زاویه خط قاطع از نقاط P و Q به صورت زیر است

$$m_{sec}=\frac{\text{تغییر در مختص } y}{\text{تغییر در مختص } x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$$

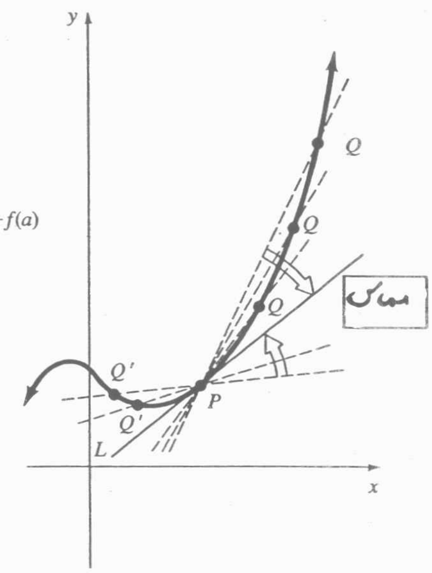
اگر قرار دهیم $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ آن گاه

$$m_{sec}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

حال وقتی Δx از مقادیر مثبت یا منفی به صفر نزدیک می‌شود، نقاط Q و Q' روی نمودار f در هر طرف، اما نزدیک به نقطه P را داریم. پس ضریب زاویه‌های m_{PQ} و $m_{PQ'}$ به ضریب زاویه خط مماس L بسیار نزدیک می‌شوند، شکل (۳).



شکل ۲



شکل ۳. خطوط قاطع وقتی $Q \to P$ و $Q' \to P$ از دو طرف به خط مماس نزدیک می‌شوند.

مثال ۱. ضریب زاویه خط مماس به نمودار $f(x)=x^2$ در نقطه (۱،۱) را به دست آورید.

حل. به عنوان یک نقطه شروع، $\Delta x = 0.1$ را انتخاب کرده و ضریب زاویه خط قاطع گذرنده از (۱،۱) و $(1.1, (1.1)^2)$ را به دست می‌آوریم.

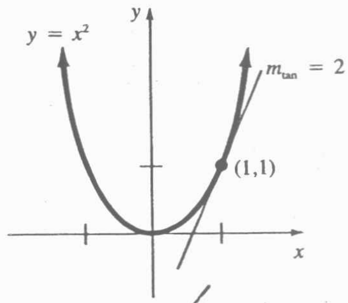
$$f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21, \qquad \Delta y = f(1.1) - f(1) = 1.21 - 1 = 0.21$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

در جدول زیر برای مقادیر مختلف Δx، خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ داده شده است. دیده می‌شود که این مقادیر به عدد 2 نزدیک می‌شوند. پس در حد وقتی $\Delta x \to 0$ داریم

$$m_{tan} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2$$

نمودار تابع f و جدول محاسباتی مربوطه در شکل (۴) و جدول (۱) آورده شده‌اند.



شکل ۴

جدول ۱

Δx	$1+\Delta x$	$f(1)$	$f(1+\Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$
0.1	1.1	1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1	1.0201	0.0201	2.01
0.001	1.001	1	1.002001	0.002001	2.001
−0.1	0.9	1	0.81	−0.19	1.9
−0.01	0.99	1	0.9801	−0.0199	1.99
−0.001	0.999	1	0.998001	−0.001999	1.999

با توجه به شکل (۳)، مثال ۱ و شهودمان، می‌توان گفت که اگر نمودار تابع $y=f(x)$ دارای خط مماس ℓ در نقطه P باشد آنگاه ℓ باید حد خطوط قاطع گذرنده از P و Q باشد وقتی که $Q \to P$ و قاطع گذرنده از P و Q' باشد وقتی که $Q' \to P$. علاوه بر آن، ضریب زاویه خط ℓ یعنی m_{tan} باید مقدار حدی m_{sec} وقتی $\Delta x \to 0$، باشد. به طور خلاصه داریم:

تعریف ۱. خط مماس. فرض کنید $y=f(x)$ تابعی پیوسته است. در نقطه $(a,f(a))$ خط مماس به نمودار تابع، خط گذرنده از نقطه فوق با ضریب زاویه

$$m_{tan}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x-f(a)}{\Delta x} \qquad (1)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

است، مشروط به اینکه حد موجود باشد.

ضریب زاویه خط مماس در $(a,f(a))$ را شیب منحنی در نقطه نامیم. تعریف (۱) نتیجه می‌دهد که مماس در $(a,f(a))$ منحصر به فرد است زیرا یک نقطه و یک شیب تنها یک خط را مشخص می‌کنند. کاربرد تعریف (۱) را در زیر به چهار مرحله تقسیم کرده‌ایم.

الف) f را در a و $a+\Delta x$ محاسبه کنید: $f(a)$ و $f(a+\Delta x)$.

ب) Δy را محاسبه کنید. $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$

ج) Δy را بر $\Delta x \neq 0$ تقسیم کنید: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

د) حد $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را محاسبه کنید. $m_{tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

مثال ۲. با استفاده از تعریف (۱) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $f(x)=x^2$ را در نقطه $(1, f(1))$ به دست آورید.

حل. مراحل بالا را انجام می‌دهیم.

الف) $f(1) = 1^2 = 1$ و برای هر $\Delta x \neq 0$

$$f(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^2$$
$$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

ب)
$$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = [1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2] - 1$$
$$= 2\Delta x + (\Delta x)^2 = (\Delta x)(2+\Delta x)$$

ج)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

د)
$$m_{tan} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2+\Delta x) = 2$$

مثال ۳. ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $f(x)=5x+6$ را در هر نقطه $(a, f(a))$ به دست آورید.

حل. داریم $f(a) = 5a+6$. برای هر $\Delta x \neq 0$

$$f(a+\Delta x) = 5(a+\Delta x) + 6 = 5a + 5\Delta x + 6$$
$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$
$$= (5a + 5\Delta x + 6) - (5a+6) = 5\Delta x$$

پس $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$ و در نتیجه $m_{tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$.

مثال ۴. معادله خط مماس به نمودار $f(x)=x^2$ در $(1,1)$ را بدست آورید.

حل. از مثال (۲) ضریب زاویه خط مماس در نقطه $(1,1)$ برابر $m_{tan}=2$ بدست آمد.
فرم شیب-نقطه خط به صورت

$$y-1=2(x-1)$$

یا $y=2x-1$ است.

مثال ۵. شیب خط مماس به نمودار $f(x)=-x^2+6x$ در نقطه $(4,f(4))$ را بدست آورید.

حل. داریم $f(4)=-4^2+6(4)=8$. برای هر $\Delta x\neq 0$

$$f(4+\Delta x)=-(4+\Delta x)^2+6(4+\Delta x)$$
$$=-16-8\Delta x-(\Delta x)^2+24+6\Delta x=8-2\Delta x-(\Delta x)^2$$

پس

$$\Delta y=f(4+\Delta x)-f(4)=8-2\Delta x-(\Delta x)^2-8=\Delta x(-2-\Delta x)$$

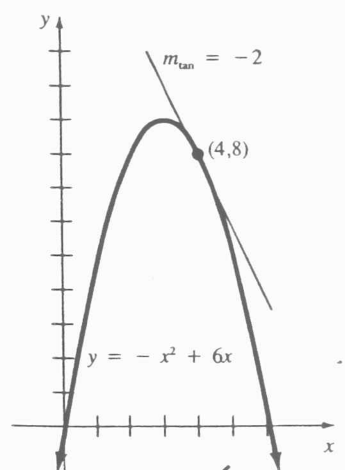
در نتیجه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(-2-\Delta x)}{\Delta x}=-2-\Delta x$$

بنابراین

$$m_{tan}=\lim_{\Delta x\to 0}(-2-\Delta x)=-2$$

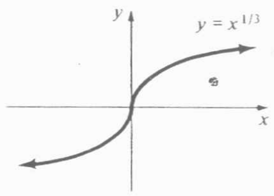
شکل (۵) نمودار f و خط مماس با شیب 2- در نقطه $(4,8)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۵

توضیح ۲. حد در (۱) ممکن است برای تابعی مانند f در عدد a موجود نباشد اما مماس در $(a, f(a))$ را داشته باشیم. خط مماس به نمودار در یک نقطه می‌تواند قائم باشد و در این حالت شیب تعریف نشده است. مفهوم مماس قائم را در بخش ۲.۴ بیان خواهیم کرد.

مثال ۶. گرچه در اینجا جزئیات مماس به نمودار $y = x^{1/3}$ در مبدا را بیان نمی‌کنیم. اما مماس در مبدا به نمودار $y = x^{1/3}$ قائم است. یعنی خط $x = 0$ مماس به نمودار تابع در مبدا می‌باشد، شکل (۶) را ببینید.



شکل ۶

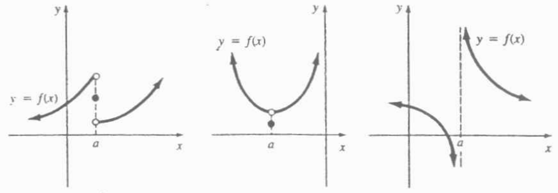
توضیح ۳. مماس ممکن است موجود نباشد، نمودار تابع f در حالات زیر دارای یک خط مماس در نقطه مورد نظر نیست:

الف) f در $x = a$ ناپیوسته باشد، یا

ب) نمودار f دارای یک گوشه در $(a, f(a))$ باشد

علاوه بر آن نمودار f در نقطه‌ای که در آن دارای یک نقطه تیز یا شکستگی است خطی مماس ندارد.

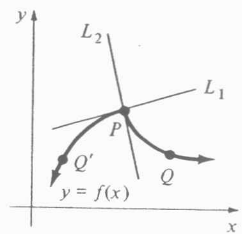
مثال ۷. شکل های ۷ (الف) و (ب) نمودارهای دو تابع را نشان می دهند که ناپیوسته هستند، گرچه در $x = a$ تعریف شده‌اند. هیچ یک از این دو نمودار در $(a, f(a))$ دارای مماس نمی‌باشند. در شکل ۷ (ج) می‌توانیم در هر نقطه بجز در $x = a$ دارای مماس است.



(الف) (ب) (ج)

شکل ۷

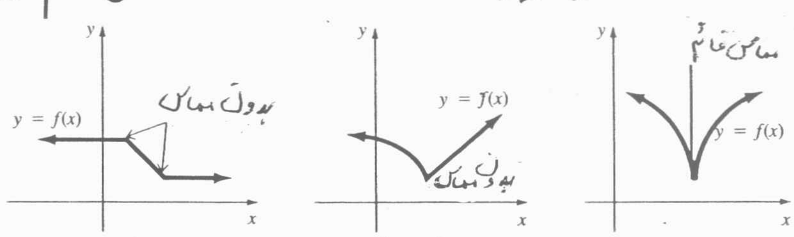
شکل (۸) نشان می دهد که در یک تیزی یا گوشه روی نمودار تابع f خطوط قاطع گذرنده از P و Q به خط L_2 وقتی $Q \to P$ نزدیک می شود اما خطوط قاطع گذرنده از P و Q' به خط L_1 وقتی $P \leftarrow Q'$ نزدیک می شود. در این حالت خطی به عنوان خط مماس نمی توان در نظر گرفت. پس هرگاه گوشه خط مماس در نقطه P روی نمودار یک تابع وجود دارد منظور تنها یک خط مماس است.



شکل ۸

در مثال بعد، سعی در بررسی رفتار خطوط قاطع در نزدیکی نقاط شکستگی یا تیزی نمودار تابع داریم.

مثال ۸. شکل (۹)-الف نشان دهنده نمودار تابعی است که در دو نقطه گوشه ای دارای خط مماس نیست. در شکل (۹)-ب خط مماس در نقطه شکستگی وجود ندارد. در شکل (۹) قسمت (ج) نمودار دارای یک تیزی است که در آن نقطه مماس قائم وجود دارد.



(الف) (ب) (ج)

شکل ۹

مثال ۹. نشان دهید نمودار $f(x)=|x|$ در $(0,0)$ دارای یک مماس نیست.

حل. نمودار تابع در شکل (۱۰) نمایش داده شده است. برای اثبات اینکه مماس در $(0,0)$ وجود ندارد به حد زیر توجه می کنیم

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \qquad (۲)$$

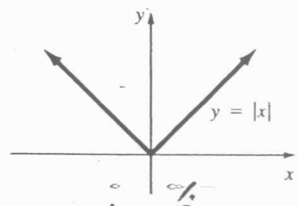
برای $\Delta x > 0$ داریم

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

درحالی که برای $\Delta x < 0$ داریم

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

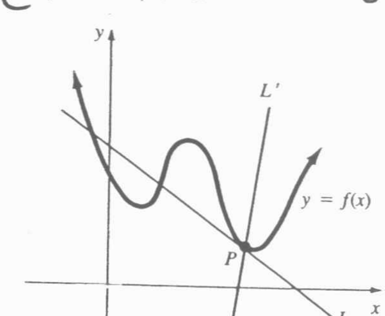
چون $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$ و $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$ پس حد در (۲) وجود ندارد.
بنابراین نمودار تابع در $(0,0)$ دارای مماس نیست.



شکل ۱۰

توضیح ۴. نرخ تغییر. شیب $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای خط قاطع گذرنده از $(a, f(a))$ را متوسط نرخ تغییر f در a نیز می‌نامیم. شیب $m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ را نرخ تغییر لحظه‌ای تابع در a نامیم. برای مثال اگر در نقطه $(a, f(a))$ داشته باشیم $m_{tan} = \frac{1}{10}$ نباید انتظار داشته باشیم که مقادیر f برای مقدار x نزدیک a به تندی تغییر کند.

تبصره ۵. از هندسه مسطح می‌دانیم که مماس به یک دایره در نقطه P خطی است که نمودار تابع را تنها در یک نقطه P قطع می‌کند. شکل (۱۱) نشان می‌دهد که این خاصیت برای نمودار تابع لزوماً برقرار نیست. خط L مماس در نقطه P است اما نمودار f را در سه نقطه قطع می‌کند. خط L' نمودار f را تنها در نقطه P قطع می‌کند اما مماس به نمودار تابع نیست.



شکل ۱۱

۲.۱.۴ سرعت لحظه‌ای

درحالت کلی، سرعت متوسط یا تندی متوسط یک جسم متحرک برابر با نسبت مسافت طی شده به زمان طی شده است و لذا

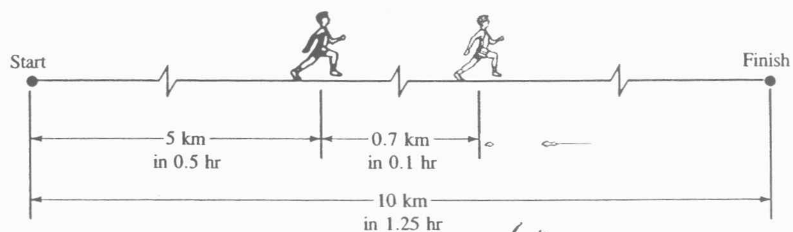
$$v_{ave} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان طی شده}} \qquad (۳)$$

یک دونده را درنظر بگیرید که مسافت ۱۰ کیلومتر را در زمان ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه (1.25 ساعت) طی می‌کند. سرعت متوسط یا تندی متوسط دونده برابر است با

$$v_{ave} = \frac{10}{1.25} = 8 \quad km/hr$$

حال فرض کنید بخواهیم سرعت دقیق دونده یعنی v را در زمانی که دونده نصف زمان را سپری کرده است به دست آوریم. اگر مسافت طی شده در زمان از ۰ ساعت تا 0.5 ساعت 5 کیلومتر باشد آن گاه

$$v_{ave} = \frac{5}{0.5} = 10 \quad km/hr$$



این عدد نه یک اندازه است، نه لزوماً یک شاخص مناسب برای نرخ لحظه‌ای v در زمانی که دونده 0.5 ساعت درحال حرکت است. اگر مطمئن باشیم که در 0.6 ساعت، دونده 5.7 km از خط شروع فاصله دارد آن گاه سرعت متوسط از ۰ تا 0.6 ساعت برابر مقدار زیر است

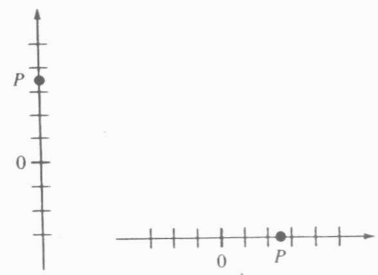
$$v_{ave} = \frac{5.7}{0.6} = 9.5 \quad km/hr$$

درحالی که در فاصله زمانی 0.5 تا 0.6 ساعت داریم

$$v_{ave} = \frac{5.7-5}{0.6-0.5} = 7 \quad km/hr$$

عدد دوم مقدار واقعی‌تر نرخ لحظه‌ای v را نشان می‌دهد. با کوچک شدن فاصله زمانی بین 0.5 ساعت و زمانی که شاطر به یک موقعیت نزدیک به 5 کیلومتر اندازه گیری شده است، انتظار به دست آوردن تخمین‌های بهتری از سرعت دونده در زمان 0.5 ساعت را داریم.

حرکت مستقیم الخط ۶. برای تعمیم مفاهیم قبل، فرض کنید یک شیئی یا ذره در نقطه P در امتداد محور قائم یا افقی حرکت کند، شکل (۱۳). علاوه بر آن، فرض کنید ذره متحرک دارای موقعیت یا مختص واقع بر خط داده شده توسط تابع $s = f(t)$ است که در آن t نشان دهنده زمان است. مقادیر s فاصله جهت دار شده از O تا موقعیت متحرک برحسب سانتیمتر، متر، فوت، مایل و غیره است. وقتی P در راست یا بالای O باشد قرار می دهیم $s > 0$ در حالی که $s < 0$ است وقتی که P در چپ یا پایین O باشد. حرکت در یک خط مستقیم را حرکت مستقیم الخط نامیم.



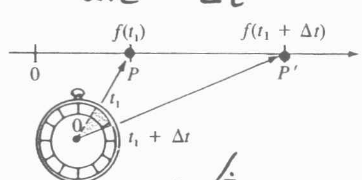
شکل ۱۳

اگر متحرک در زمان t_1 در نقطه P و در زمان $t_1 + \Delta t$ در نقطه P' باشد آن گاه نقاط عبارتند از $f(t_1)$ و $f(t_1 + \Delta t)$، شکل ۱۴ را ببینید. از رابطه (۳) سرعت متوسط ذره متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_1 + \Delta t]$ برابر است با

$$v_{ave} = \frac{\text{تغییر موقعیت}}{\text{تغییر در زمان}} = \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

یا

$$v_{ave} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (۴)$$



شکل ۱۴

حد در (۴) وقتی $\Delta t \to 0$ نرخ تغییر لحظه ای $f(t)$ در t_1 یا سرعت لحظه ای را نتیجه می دهد.

تعریف ۷. سرعت لحظه ای. فرض کنید $s = f(t)$ تابع نشان دهنده موقعیت یک جسم متحرک در حرکت روی مسیر مستقیم است. سرعت لحظه ای در زمان t_1 توسط

$$v(t_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (۵)$$

مشروط به انکه حد موجود باشد.

باید توجه کرد که در نماد گذاری و تعبیر هیچ تمایزی بین روابط (۱) و (۵) از نظر ریاضی وجود ندارد.

مثال ۱۵. فرض کنید s فاصله یک توپ درحال سقوط از بالای یک ساختمان به طرف سطح زمین است و توسط $s=-4.9t^2+192$ داده شده است که در آن s برحسب متر و t برحسب ثانیه اندازه گیری می شوند. سرعت لحظه ای توپ سقوط کننده را در زمان $t_1=3$ ثانیه به دست آورید.

حل. از روش چهار مرحله ای در مثال های قبل استفاده می کنیم.

۱) $f(3)=-4.9(9)+192=147.9$

۲) برای $\Delta t\neq 0$ داریم

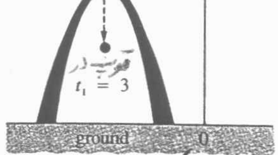
$$f(3+\Delta t)=-4.9\,(3+\Delta t)^2+192=-4.9\,(\Delta t)^2-29.4\,\Delta t+147.9$$

$$\begin{aligned}\Delta s&=f(3+\Delta t)-f(3)\\&=[-4.9\,(\Delta t)^2-29.4\,\Delta t+147.9]-147.9\\&=-4.9\,(\Delta t)^2-29.4\,\Delta t=(\Delta t)(-4.9\,\Delta t-29.4)\end{aligned}$$

۳) $$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta t\,(-4.9\,\Delta t-29.4)}{\Delta t}=-4.9\,\Delta t-29.4$$

۴) $$v(3)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(-4.9\,\Delta t-29.4)=-29.4 \quad m/sec$$

علامت منفی با معنا است زیرا توپ در جهت مخالف جهت مثبت (به طرف بالا) حرکت می کند. عدد $f(3)=147.9$ متر ارتفاع توپ بالای سطح زمین در ثانیه سوم حرکت است. شکل (۱۵).



شکل ۱۵

۲.۴ مشتق

در بخش قبل، بیان کردیم که اگر نمودار تابع $y=f(x)$ دارای یک مماس در نقطهٔ $(a, f(a))$ باشد آنگاه شیب این خط عبارت است از

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

برای یک تابع داده شده، معمولاً امکان به دست آوردن یک فرمول کلی یا یک قانون، وجود دارد به طوری که مقدار شیب خط مماس را به دست آوریم. این عمل با محاسبه حد زیر امکان پذیر است

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad \forall x\in D_f \qquad (۶)$$

مشروط به اینکه حد موجود باشد. بعد از محاسبه این حد (در صورت وجود) با قرار دادن مقدار x مقدار عددی حد را تعیین می‌کنیم. حد در (۶) را مشتق f نامیده و با f' نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸. مشتق تابع $y=f(x)$ نسبت به x عبارت است از

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (۷)$$

مشروط به اینکه حد وجود داشته باشد.

گاهی اوقات $f'(x)$، مشتق تابع f، را نرخ تغییر لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ نسبت به متغیر x نامیم. مثال های (۱) و (۲) بخش ۱.۴ را مجدداً بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۱. مشتق تابع $f(x)=x^2$ را به دست آورید.

حل. مانند قبل از روش چهار مرحله‌ای زیر استفاده می‌کنیم

(۱ $$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\,\Delta x+(\Delta x)^2$$

(۲ $$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[x^2+2x\,\Delta x-(\Delta x)^2]-x^2$$
$$=\Delta x\,[2x+\Delta x]$$

(۳ $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x\,[2+\Delta x]}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

(۴ $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

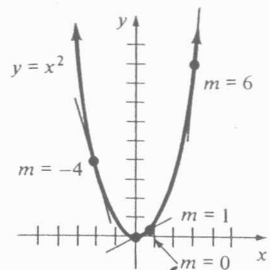
در مثال (۱۱) دیده می‌شود که $f'(x)=2x$ تابع دیگری از x است که از تابع اولیه داده شده گرفته شده است. در مثال (۲) بخش ۱.۴ نیز مشاهده می‌شود که نتیجه با محاسبه $f'(x)$ در $x=1$ به دست می‌آید.

مثال ۱۲. برای $f(x)=x^2$ مطلوب است $f'(-2)$، $f'(0)$، $f'(\frac{1}{2})$ و $f'(3)$. آنها را تعبیر کنید.

حل. از مثال (۱۱) داریم $f'(x)=2x$. بنابراین

$$f'(-2)=-4, \quad f'(0)=0, \quad f'(\tfrac{1}{2})=1, \quad f'(3)=6$$

همان‌گونه که در شکل (۱۶) دیده می‌شود، مقادیر به دست آمده در بالا، شیب‌های خطوط مماس بر نمودار $y=x^2$ در نقاط $(-2,4)$، $(0,0)$، $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ و $(3,9)$ است.



شکل ۱۶

مثال ۱۳. مشتق $f(x)=-x^2+4x+1$ را به دست آورید.

حل. داریم

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (\Delta x)(-2x-\Delta x+4)$$

بنابراین

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\,(-2x-\Delta x+4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-2x-\Delta x+4)=-2x+4.$$

مثال ۱۴. مشتق $f(x)=x^3$ را به دست آورید.

حل. برای محاسبه $f(x+\Delta x)$ از قضیه دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

پس

$$\Delta y = f(x+\Delta x - f(x)$$
$$= (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - x^3$$
$$= \Delta x\,(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2)$$

درنتیجه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

بنابراین

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2$$

مثال ۱۵. معادله خط مماس بر نمودار $f(x)=x^3$ در $x=\frac{1}{2}$ را بدست آورید.

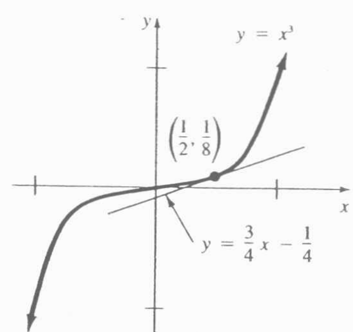
حل. از مثال (۱۴) داریم $f'(x) = 3x^2$. درنتیجه شیب خط مماس در $x=\frac{1}{2}$ برابر است با

$$f'(\tfrac{1}{2}) = 3(\tfrac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

مختص y نقطه مماس برابر $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ است. بنابراین در $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ معادله خط مماس توسط

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}(x - \frac{1}{2})$$

یا $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ داده می‌شود. نمودار تابع و خط مماس در شکل (۱۷) نمایش داده شده است.



شکل ۱۷

نمادگذاری ۹. نمادهایی که در متون ریاضی برای نمایش مشتق تابع $y=f(x)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت

$$f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ y',\ Dy,\ D_x y$$

است. نماد دوم با توجه به Δy و Δx حاصل شده است یعنی $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. برای تابع

$f(x)=x^2$ می‌نویسیم $f'(x)=2x$ ، اگر همان تابع به فرم $y=x^2$ نمایش داده شده باشد از
$\frac{dy}{dx}=2x$ یا $y'=2x$ استفاده می‌کنیم.
مقدار مشتق تابع در عدد خاص a را به صورت

$$f'(a),\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a},\quad y'(a)$$

نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۴. مقدار مشتق $y=x^2$ در 5 عبارت است از

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=5}=2x\Big|_{x=5}=10$$

فرایند یافتن مشتق را مشتق‌گیری نامیم. اگر $f'(a)$ موجود باشد گوییم تابع f در a مشتق‌پذیر است. عملگر مشتق‌گیری نسبت به متغیر x را با $\frac{d}{dx}$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x,\qquad \frac{d}{dx}(-x^2+4x+1)=-2x+4$$

اگر $y=f(x)$ در عدد a پیوسته بوده و $f'(a)=0$ آن‌گاه خط مماس در $(a,f(a))$ را افقی نامیم. در مثال (۱۲) برای تابع پیوسته $f(x)=x^2$ داریم $f'(x)=2x$ پس $f'(0)=0$ بنابراین خط مماس به نمودار تابع در $(0,f(0))$ یا $(0,0)$ افقی است. در مثال (۱۳) دیدیم که $f'(x)=-2x+4$ و تابع $f(x)=-x^2+4x+1$ پیوسته است. در این حالت از $f'(x)=0$ داریم $-2x+4=0$ یعنی $x=2$. بنابراین در نقطهٔ $(2,f(2))$ یا $(2,5)$ مماس افقی است.

دامنهٔ f' تعریف شده توسط (۷) مجموعهٔ تمام xهایی است که حد در آن‌ها وجود دارد. پس برای تابع f در عدد a مشتق موجود نیست یا مماس به نمودار وجود ندارد هرگاه

الف) تابع در a ناپیوسته باشد یا

ب) نمودار تابع در $(a,f(a))$ دارای تیزی یا گوشه باشد یا

ج) در نقطهٔ $(a,f(a))$ خط مماس به نمودار قائم باشد.

دامنهٔ تعریف f' لزوماً زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع f است.

مثال ۱۷. الف) تابع $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ در $\frac{1}{2}$ ناپیوسته است. بنابراین f در این مقدار مشتق‌پذیر نیست.

ب) نمودار $f(x)=|x|$ دارای یک گوشهٔ تیز در مبدأ است. در مثال (۹) بخش ۱.۴ دیدیم که $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در ۰ وجود ندارد. پس f در صفر مشتق‌پذیر نیست.

مماس‌های قائم ۱۰. فرض کنید $y=f(x)$ در $x=a$ پیوسته است. اگر $\lim_{x\to a}|f'(x)|=\infty$ آنگاه گوییم نمودار f در $(a,f(a))$ دارای یک مماس قائم است.

در مثال (۹) بخش (۱.۴) دیدیم که نمودار $y=x^{1/3}$ در $(0,0)$ دارای یک خط مماس قائم است. با توجه به تعریف مماس‌های قائم در بالا، این نتیجه را بررسی می‌کنیم.

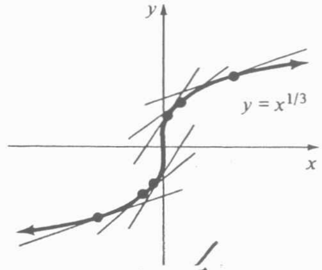
مثال ۱۸. به عنوان تمرین، ثابت کنید که فرمول (۷) مشتق تابع $f(x)=x^{1/3}$ را به صورت

$$f'(x)=\frac{1}{3x^{2/3}}$$

به دست می‌دهد. گرچه f در $x=0$ پیوسته است، به وضوح f' در این مقدار تعریف نشده است و f در ۰ مشتق‌پذیر نیست. با این حال، چون

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\infty$$

داریم $\lim_{x\to 0}|f'(x)|=\infty$، یعنی مماس در $(0,f(0))$ یا در $(0,0)$ قائم است. در شکل (۱۸) دیده می‌شود که خطوط مماس بر نمودار در نقاط نزدیک به مبدأ پرشیب‌تر است هرگاه $x\to 0$.



شکل ۱۸

تعریف ۱۱. مشتق‌پذیری روی یک فاصله. تابع f مشتق‌پذیر

الف) روی فاصلهٔ باز (a,b) است، هرگاه f' در هر عدد متعلق به این فاصله موجود باشد.

ب) روی فاصلهٔ بسته $[a,b]$ است، هرگاه f روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و حدود

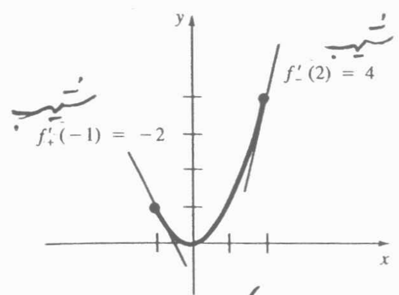
$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\qquad f'_-(b)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} \qquad (۸)$$

هر دو موجود باشند.

حدود در (۸) را به ترتیب مشتق راست و مشتق چپ نامیم. یک تابع روی $[a,\infty)$ مشتق پذیر است هرگاه تابع روی (a,∞) مشتق پذیر بوده و در a دارای مشتق راست باشد. تعریف مشابه بر حسب مشتق پذیری چپ روی $(-\infty,a]$ برقرار است. علاوه بر آن می توان نشان داد که

f در عدد c روی فاصله (a,b) مشتق پذیر است اگر $f'_+(c)=f'_-(c)$.

مثال ۱۹. تابع $f(x)=x^2$ برای $-1\le x\le 2$ روی $[-1,2]$ مشتق پذیر است زیرا $f'(x)=2x$ برای هر x در $(-1,2)$ و $f'_-(2)=4$ و $f'_+(-1)=-2$. شکل (۱۹).



شکل ۱۹

مثال ۲۰. تابع $f(x)=x^2$ روی $(-\infty,\infty)$ مشتق پذیر است.

مثال ۲۱. چون $f(x)=\frac{1}{x}$ در $x=0$ ناپیوسته است، پس f روی هر فاصله شامل ۰ مشتق پذیر نیست.

مثال ۲۲. نشان دهید تابع

$$f(x)=\begin{cases}2 & x<1\\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$$

در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

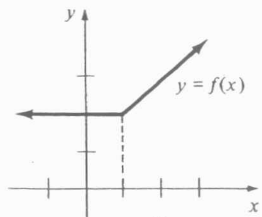
حل. شکل (۲۰) نشان می‌دهد که نمودار f در (1,2) دارای یک گوشه است. چون

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[(1+\Delta x)+1] - 2}{\Delta x} = 1$$

درحالی که

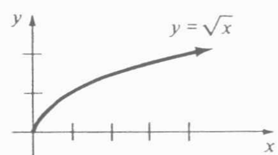
$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2-2}{\Delta x} = 0$$

پس $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ بنابراین f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست. بدین لحاظ f روی هر فاصله که شامل ۱ باشد مشتق‌پذیر نیست.



شکل ۲۰

مثال ۲۳. به عنوان تمرین نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی فاصله $[0,\infty)$ مشتق‌پذیر نیست. نمودار f در شکل (۲۱) نمایش داده شده است، دیده می‌شود که $f'_+(0)$ موجود نیست. به هر حال تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی $(0,\infty)$ و روی هر زیرفاصله از $(0,\infty)$ مشتق‌پذیر است.



شکل ۲۱

دیدیم که $f(x)=|x|$ و $f(x)=x^{1/3}$ هر دو در صفر پیوسته‌اند اما مشتق‌پذیر نیستند. در مثال (۲۲) تابع f در ۱ پیوسته است اما $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر

پیوستگی، مشتق‌پذیری را نتیجه نمی‌دهد.

به هر حال، اگر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a, f(a))$ دارای یک خط مماس باشد آنگاه f در عدد a پیوسته است. یعنی

مشتق‌پذیری، پیوستگی را نتیجه می‌دهد

این واقعیت را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۱۲. اگر f در عدد a مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f پیوسته است.
اثبات این قضیه ساده است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

تبصره ۱۳. الف) در شرح بالا گفتیم که مشتق یک تابع خود یک تابع است که ضریب زاویه خط مماس را نتیجه می‌دهد. به هر حال مشتق یک معادله خط مماس نیست. همچنین بیان اینکه $y-y_0=f'(x)\cdot(x-x_0)$ معادله مماس در نقطه (x_0, y_0) است، نادرست می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که $f'(x)$ قبل از استفاده در شکل نقطه-شیب خط باید در x_0 محاسبه شود. اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه معادله خط مماس در (x_0, y_0) به صورت

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

است.

ب) از قرن هفدهم تا قرن نوزدهم، ریاضیدانان بر این باور بودند که یک تابع پیوسته معمولاً دارای یک مشتق هستند. در 1872 ریاضیدان آلمانی کارل وایراشتراس مثالی از یک تابع پیوسته در هر عدد حقیقی ارائه داد که هیچ‌جا مشتق‌پذیر است.

۳.۲ قوانین مشتق‌گیری

۱.۳.۲ . قوانین جمع و توان

روش مطرح شده در مثال‌های (۱۱) و (۱۴) بخش (۲.۲) برای مشتق‌گیری از $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ را می‌توان برای یافتن مشتق $f(x)=x^n$ برای هر عدد صحیح مثبت n بکار برد. برای این منظور ابتدا قضیه دوجمله‌ای را بیان می‌کنیم. برای اعداد حقیقی a و b و عدد صحیح مثبت n داریم

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

که در آن $r!=1.2.3.\ldots.(r-1)r$.

قضیه ۴. (قانون توان برای توان‌های مثبت صحیح). اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad (٩)$$

اثبات. فرض کنید $f(x)=x^n$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. طبق قضیه دوجمله‌ای

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$$
$$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

بنابراین

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right] - x^n$$
$$= \Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

و

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x}$$
$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \qquad (١٠)$$

چون هر جمله در (١٠) بعد از جمله اول، دارای عامل Δx است، پس

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} \qquad (١١)$$

قانون توان به طور ساده بیان می‌کند که برای مشتق‌گیری از x^n به صورت زیر عمل می‌کنیم:

توان را به عنوان ضریب پایین آورده

$$(\ \ )x^{(\ \ )-1}$$

یک واحد از توان کم کنید

مشاهده می‌شود که مشتق‌های $y=x^2$ و $y=x^3$ از رابطه (٩) به صورت زیر است:

$$y=x^2, \qquad \frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x$$
$$y=x^3, \qquad \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2$$

مثال ٢۴. مطلوب است مشتق $y=x^6$.

حل. با توجه به فرمول (٩) داریم

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{6-1} = 6x^5$$

مثال ٢۵. مطلوب است مشتق $y=x$.

حل. با $n=1$ از (۹) داریم

$$\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^{0} = 1$$

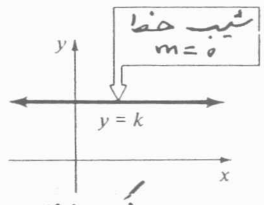
نتیجه زیر بیان می‌کند که مشتق تابع ثابت صفر است. اثبات بسیار ساده و روشن است.

قضیه ۱۵. اگر $f(x)=k$ یک تابع ثابت باشد آن‌گاه

$$f'(x) = 0 \qquad (۱۲)$$

اثبات. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = k - k = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

قضیه (۱۵) دارای تعبیر هندسی روشنی است. همان‌گونه که در شکل (۲۲) دیده می‌شود شیب m یک خط افقی $y=k$ برابر صفر است.



شکل ۲۲

مثال ۲۶. از (۱۲) داریم

الف) $\frac{d}{dx} 5 = 0$ ب) $\frac{d}{dx} \pi^3 = 0$

نکته ۱۶. در قسمت (ب) مثال (۲۶) باید توجه کرد که π^3 ثابت است و مشتق تابع ثابت طبق قضیه (۱۵) برابر صفر می‌باشد. نباید از قانون توان اشتباه استفاده نمود و نوشت $\frac{d}{dx}(\pi^3) = 3\pi^2$. باید دقت کرد که رابطه (۹) شامل متغیر x در پایه توان است. علاوه بر آن، رابطه (۱۲) نتیجه می‌دهد که رابطه (۹) برای $n=0$ نیز برقرار است. یعنی اگر $x \neq 0$ و $f(x) = x^0 = 1$ آن‌گاه $f'(x) = 0 = 0.x^{0-1}$. پس رابطه (۹) برای $n=0$ نیز برقرار است.

قضیه ۱۷. اگر c ثابت دلخواه و f مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x) \qquad (۱۳)$$

اثبات. فرض کنید $G(x)=cf(x)$. در این صورت

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$
$$=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=cf'(x)$$

مثال ۲۷. مطلوب است مشتق $y=5x^3$.

حل. از (۹) و (۱۳) داریم

$$\frac{dy}{dx}=5\frac{d}{dx}x^3=5(3x^2)=15x^2$$

قضیه ۱۸. قانون جمع. اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند آن گاه

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x) \qquad (۱۴)$$

اثبات. فرض کنید $G(x)=f(x)+g(x)$. در این صورت

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)+g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=f'(x)+g'(x).$$

مثال ۲۸. مطلوب است مشتق $y=x^5+x^2$

حل. از (۹) و (۱۴) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x^5+\frac{d}{dx}x^2=5x^4+2x$$

مثال ۲۹. مشتق تابع $f(x)=6x^{100}+x^{35}$ را بدست آورید.

حل. از (۹)، (۱۳) و (۱۴) داریم

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(6x^{100})+\frac{d}{dx}(x^{35})=600x^{99}+35x^{34}$$

چون $f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]$ از قانون جمع (۱۴) می‌توان برای تفاضل دو تابع نیز استفاده کرد.

مثال ۳۰. مطلوب است مشتق $y=9x^7-3x^4$

حل. از (۹)، (۱۳) و (۱۴) داریم

$$\frac{dy}{dx}=9\frac{d}{dx}x^7-3\frac{d}{dx}x^4=63x^6-12x^3$$

قانون جمع (۱۴) را می‌توان به مجموع هر تعداد متناهی تابع مشتق‌پذیر تعمیم داد.

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_n'(x)$$

با توجه به این مطلب و از (۹) و (۱۳) دیده می‌شود که هر تابع چندجمله‌ای مشتق‌پذیر است.

مثال ۳۱. مطلوب است مشتق $y=4x^5-\frac{1}{2}x^4+9x^3+10x^2-13x+6$

حل. $\frac{dy}{dx}=4\frac{d}{dx}x^5-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^4+9\frac{d}{dx}x^3+10\frac{d}{dx}x^2-13\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}6$

$$=20x^4-2x^3+27x^2+20x-13$$

مثال ۳۲. معادله خط مماس به نمودار $f(x)=3x^4+2x^3-7x$ در $x=-1$ را به دست آورید.

حل. مختص y نقطه متناظر به $x=-1$، $f(-1)=8$ است.

$$f'(x)=12x^3+6x^2-7 \Rightarrow f'(-1)=-13$$

در $(-1,8)$ فرم نقطه ـ شیب معادله خط مماس به صورت

$$y-8=-13(x+1)$$

یا $y=-13x-5$ است.

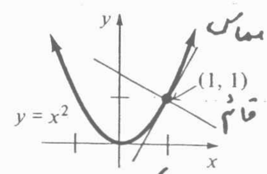
تعریف ۱۹. یک خط قائم به نمودار تابع در نقطه P، خطی عمود بر خط مماس در نقطه P است.

مثال ۳۳. معادله خط قائم به نمودار $y=x^2$ در $x=1$ را به دست آورید.

حل. چون $\frac{dy}{dx}=2x$ پس در (۱،۱) داریم $m_{tan}=2$. بنابراین شیب خط قائم برابر $m=-\frac{1}{2}$ است. معادله این خط به صورت

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

یا $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ است. نمودار در شکل (۲۳) رسم شده است.



شکل ۲۳

تبصره ۲۰. در بسیاری از مباحث علمی مانند فیزیک، شیمی، مهندسی وغیره توابع معمولاً برحسب متغیرهای دیگری بغیراز x و y شرح داده می‌شوند. برای مثال

$$v(t)=32t \qquad v'(t)=\frac{dv}{dt}=32$$

$$A(r)=\pi r^2 \qquad A'(r)=\frac{dA}{dr}=2\pi r$$

$$H(z)=\frac{1}{4}z^6 \qquad H'(z)=\frac{dH}{dz}=\frac{3}{2}z^5$$

$$D(p)=800-120p+5p^2 \qquad D'(p)=\frac{dD}{dp}=-120+10p$$

$$r(\theta)=4\theta^2-3\theta \qquad r'(\theta)=\frac{dr}{d\theta}=8\theta-3$$

۲.۳.۴ قوانین ضرب وخارج قسمت

در بخش قبل بیان کردیم که قانون جمع (۱۴) از خاصیت حد حاصل می‌شود، یعنی حد یک مجموع برابر مجموع حدود است مشروط به آنکه حدود موجود باشند. همچنین می‌دانیم که وقتی حدود موجود است، حد حاصل ضرب برابر حاصل ضرب حدود است. بنابراین، انتظار داریم که مشتق حاصل ضرب، حاصل ضرب مشتقات باشد اما چنین نیست.

قضیه ۲۱. قانون حاصل ضرب. اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند آنگاه

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x) \qquad (۱۵)$$

اثبات. فرض کنید $G(x)=f(x)g(x)$. در این صورت

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (16)$$

چون f مشتق‌پذیر است پس پیوسته می‌باشد و بنابراین

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$$

از طرفی $\lim_{\Delta x\to 0}g(x)=g(x)$، بنابراین از (۱۶) داریم

$$G'(x)=f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x)$$

مثال ۳۴. مطلوب است مشتق $y=(x^3-2x^2+4)(8x^2+5x)$

حل. از قانون حاصل‌ضرب (۱۵) داریم

$$\frac{dy}{dx}=(x^3-2x^2+4)\cdot\frac{d}{dx}(8x^2+5x)+(8x^2+5x)\cdot\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+4)$$

$$=(x^3-2x^2+4)(16x+5)+(8x^2+5x)(3x^2-4x)$$

توضیح ۲۲. گرچه (۱۵) تنها برای حاصل‌ضرب دو تابع داده شده است، می‌توان آن را برای حاصل‌ضرب تعداد بیشتری عامل به کار برد.

مثال ۳۵. مطلوب است مشتق $y=(4x+1)(2x^2-x)(x^3-8x)$

حل.

$$\frac{dy}{dx}=(4x+1)(2x^2-x)\frac{d}{dx}(x^3-8x)+(4x+1)(x^3-8x)\frac{d}{dx}(2x^2-x)$$

$$+(2x^2-2)(x^3-8x)\frac{d}{dx}(4x+1)=(4x+1)(2x^2-x)(3x^2-8)$$

$$+(4x+1)(x^3-8x)(4x-1)+(2x^2-2)(x^3-8x)(4)$$