قضیه ۲۳. قانون خارج قسمت. اگر f و g توابع مشتق پذیر بوده و $g(x)\neq 0$ آن گاه

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad (17)$$

اثبات. فرض کنید $G(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. در این صورت

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)f(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)\, g(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)f(x+\Delta x)-g(x)f(x)+g(x)f(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)\, g(x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]-f(x)\left[\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)\, g(x)}$$

$$=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال ۳۶. مطلوب است مشتق $y=\frac{3x^2-1}{2x^3+5x^2+7}$

حل. از (۱۷) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overbrace{(2x^3+5x^2+7)}^{\text{مخرج}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(3x^2-1)}^{\text{مشتق صورت}}-\overbrace{(3x^2-1)}^{\text{صورت}}\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(2x^3+5x^2+7)}^{\text{مشتق مخرج}}}{\underbrace{(2x^3+5x^2+7)^2}_{\text{مربع مخرج}}}$$

$$=\frac{(2x^3+5x^2+7)\cdot 6x-(3x^2-1)\cdot(6x^2+10x)}{(2x^3+5x^2+7)^2}$$

$$=\frac{-6x^4+6x^2+52x}{(2x^3+5x^2+7)^2}$$

مثال ۳۷. معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{6x^3}{x^3+1}$ در $x=1$ را بدست آورید.

حل. از قانون خارج قسمت برای یافتن مشتق استفاده می کنیم

$$f'(x)=\frac{(x^3+1)\frac{d}{dx}(6x^3)-6x^3\frac{d}{dx}(x^3+1)}{(x^3+1)^2}=\frac{(x^3+1)(18x^2)-6x^3(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{18x^2}{(x^3+1)^2}$$

وقتی $x=1$ است، شیب خط مماس $f'(1)=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$ است. نقطهٔ تماس $(1, f(1))$ یا $(1,3)$ است. بنابراین معادله خط مماس به صورت $y-3=\frac{9}{2}(x-1)$ یا به طور ساده‌تر $y=\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}$ است.

مثال ۳۸. مطلوب است مشتق $y=\frac{(x^2+1)(2x^2+1)}{(3x^2+1)}$

حل.

قانون ضرب

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}[(x^2+1)(2x^2+1)]-(x^2+1)(2x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(3x^2+1)[(x^2+1)4x+(2x^2+1)2x]-(x^2+1)(2x^2+1)6x}{(3x^2+1)^2}$$

$$=\frac{12x^5+8x^3}{(3x^2+1)^2}$$

همان‌گونه که در بخش (۱.۳.۴) دیدیم، فرمول (۹) محدود به حالتی است که توان عدد صحیح مثبت یا صفر باشد. حال خواهیم دید که اگر توان عدد صحیح منفی نیز باشد رابطه داده شده معتبر است.

قضیه ۲۴. قانون توان (نماهای صحیح منفی). اگر n عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}x^{-n}=-nx^{-n-1} \tag{18}$$

اثبات. اگر n عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه $-n$ یک عدد صحیح منفی است. چون $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ از قانون خارج قسمت داریم

$$\frac{d}{dx}x^{-n}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right]=\frac{x^n\cdot\frac{d}{dx}1-1\cdot\frac{d}{dx}x^n}{(x^n)^2}=\frac{0-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$

مثال ۳۹. مطلوب است مشتق $y=x^{-2}$.

حل. از رابطه (۱۸) داریم

$$\frac{dy}{dx}=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

مثال ۴. مطلوب است مشتق $y=5x^3-\frac{1}{x^4}$.

حل. تابع را به فرم $y=5x^3-x^{-4}$ نوشته و داریم

$$\frac{dy}{dx}=5(3x^2)-(-4)x^{-5}$$
$$=15x^2+\frac{4}{x^5}.$$

۳.۳.۴ مشتق توابع مثلثاتی

در بخش (۳.۳) دیدیم که توابع سینوس و کسینوس روی $(-\infty,\infty)$ پیوسته اند، بنابراین دو حد زیر از تعریف (۱.۳) حاصل می شوند.

$$\lim_{t\to 0}\sin t=0 \tag{۱۹}$$

$$\lim_{t\to 0}\cos t=1 \tag{۲۰}$$

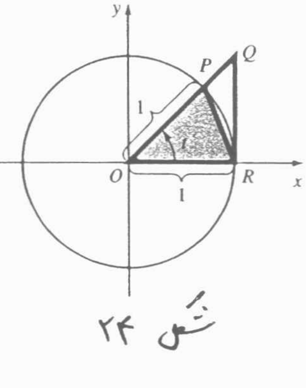
در مثال (۷) از فصل سوم دیدیم که

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \tag{۲۱}$$

حال در اینجا (۲۱) را ثابت می کنیم.

قضیه ۲۵. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

اثبات. دایره ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. همان گونه که در شکل (۲۴) نشان داده شده است، ناحیه سایه خورده OPR قطاعی مرکزی با زاویه مرکزی t است به طوری که $0<t<\frac{\pi}{2}$. از همان شکل دیده می شود که مساحت مثلث های OPR و OQR کران های پایینی و بالایی مساحت قطاع OPR است.



شکل ۲۴

(۲۲) $\quad$ مساحت مثلث ΔOQR > مساحت قطاع OPR > مساحت ΔOPR

ارتفاع مثلث OPR برابر $\overline{OP}\sin t = 1.\sin t = \sin t$ است و در نتیجه

$$\Delta OPR \text{ مساحت } = \frac{1}{2}\,\overline{OR}\,.\,(\text{ارتفاع})$$

(۲۳) $$= \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,\sin t = \frac{1}{2}\sin t$$

علاوه بر این $\frac{\overline{QR}}{\overline{OR}} = \tan t$ یا $\overline{QR} = \tan t$ پس

$$\Delta OQR \text{ مساحت } = \frac{1}{2}\,\overline{OR}\,.\,\overline{QR}$$

(۲۴) $$= \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,\tan t = \frac{1}{2}\tan t$$

نهایتاً می دانیم که مساحت قطاع برابر $\frac{1}{2}r^2\theta$ است که در آن r شعاع دایره و θ اندازه زاویه مرکزی برحسب رادیان است. بنابراین

(۲۵) $$OPR \text{ مساحت قطاع } = \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,t = \frac{1}{2}t$$

با استفاده از (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) در (۲۲) داریم

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t$$

یا

(۲۶) $$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{t}{\cos t}$$

نامساوی (۲۶) معادل است با

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1$$

حال فرض کنید $t \to 0$ در این صورت از قضیه ساندویچ داریم

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

در اینجا فرض کردیم که $0 < t < \frac{\pi}{2}$، نتیجه مشابهی برای $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ نیز برقرار است.

مثال ۴۱. مطلوب است $\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4t}{t}$.

حل. فرض کنید $u = 4t$ پس $t = \frac{u}{4}$. وقتی $t \to 0$، لزوماً $u \to 0$ و بنابراین

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4t}{t} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{u}{4}} = 4\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 4\times 1 = 4$$

با استدلال مشابه مثال (۴۱) داریم

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin kt}{t}=k \qquad (۲۷)$$

علاوه بر آن

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{(\sin t)/t}=\frac{\lim 1}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

پس

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1 \qquad (۲۸)$$

مثال ۴۲. مطلوب است $\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 5t}{t^2}$

حل.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 5t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{t}\cdot\frac{\sin 5t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{t}$$
$$=5\times 5=25$$

حد دیگری که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد، به صورت زیر است

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0 \qquad (۲۹)$$

زیرا

$$\frac{1-\cos t}{t}=\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t(1+\cos t)}=\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}=\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}$$

پس

$$\frac{1-\cos t}{t}=\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin t}{1+\cos t}$$

بنابراین

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}=1\times 0=0$$

۲۴. مشتقات $\sin x$ و $\cos x$. برای یافتن مشتق $f(x)=\sin x$ از تعریف $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ استفاده می‌کنیم. در این حالت داریم

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$= \sin(x+\Delta x) - \sin x$$
$$= \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x$$
$$= (\sin x)(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x$$

پس

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\sin x)\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + (\cos x)\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

بنابراین

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$
$$= (\sin x) \times 0 + (\cos x) \times 1$$
$$= \cos x$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad (۳۰)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که

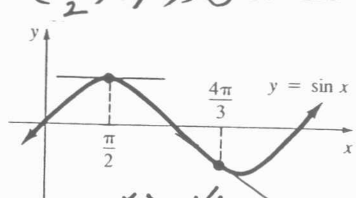
$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \qquad (۳۱)$$

مثال ۴۴. شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sin x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ را بدست آورید.

حل. از (۳۰) داریم $f'(x) = \cos x$ پس

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

در شکل (۲۵)، دیده می‌شود که خط مماس در $(\frac{\pi}{2}, 1)$ افقی است.



شکل ۲۵

۲۷. مشتق دیگر توابع مثلثاتی. فرمول های (۳۰) و (۳۱) را می توان برای یافتن مشتق توابع تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت مورد استفاده قرار داد.

برای مشتق تابع $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ از فرمول خارج قسمت استفاده می کنیم. داریم

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}\sin x - \sin x \frac{d}{dx}\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

چون $\frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x$ پس

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad (۳۲)$$

به طور مشابه

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad (۳۳)$$

حال برای یافتن مشتق تابع $\sec x = \frac{1}{\cos x}$، مجدداً از فرمول خارج قسمت استفاده می کنیم

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{(\cos x)\frac{d}{dx}1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \qquad (۳۴)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

پس

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad (۳۵)$$

به طور مشابه

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x \qquad (۳۶)$$

مثال ۴۴. مطلوب است مشتق $y = x^2 \sin x$

حل.

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{d}{dx}x^2 = x^2\cos x + 2x\sin x$$

مثال ۴۵. مطلوب است مشتق $y=(\cos x)(x-\cot x)$

حل.
$$\frac{dy}{dx}=(\cos x)\frac{d}{dx}(x-\cot x)+(x-\cot x)\frac{d}{dx}\cos x$$
$$=(\cos x)(1+\csc^2 x)+(x-\cot x)(-\sin x)$$
$$=2\cos x-x\sin x+\cos x\csc^2 x$$

مثال ۴۶. مطلوب است مشتق $y=\dfrac{\sin x}{2+\sec x}$

حل.
$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2+\sec x)\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\frac{d}{dx}(2+\sec x)}{(2+\sec x)^2}$$
$$=\frac{(2+\sec x)\cos x-\sin x\,(\sec x\tan x)}{(2+\sec x)^2}$$
$$=\frac{1+2\cos x-\tan^2 x}{(2+\sec x)^2}$$

۴.۳.۴ قانون زنجیره‌ای

فرض کنید، بخواهیم مشتق

$$y=(x^5+1)^2 \tag{۳۷}$$

را بدست آوریم. با نوشتن (۳۷) به صورت

$$y=(x^5+1)\cdot(x^5+1)$$

و استفاده از فرمول حاصلضرب برای مشتق داریم

$$\frac{dy}{dx}=(x^5+1)\frac{d}{dx}(x^5+1)+(x^5+1)\frac{d}{dx}(x^5+1)$$
$$=(x^5+1)(5x^4)+(x^5+1)(5x^4)$$
$$=2(x^5+1)(5x^4) \tag{۳۸}$$

به طور مشابه، برای مشتق گیری از $y=(x^5+1)^3$ آن را به صورت $y=(x^5+1)^2(x^5+1)$ نوشته و از قانون ضرب استفاده می‌کنیم. با توجه به (۳۸) داریم

$$\frac{d}{dx}(x^5+1)^3=3(x^5+1)^2\cdot 5x^4 \tag{۳۹}$$

۲۸. قانون توانی برای توابع. با توجه به (۳۸) و (۳۹) دیده می‌شود که الگویی برای مشتق توان توابع وجود دارد. برای مثال در (۳۹) دیده می‌شود که

توان عبارت

توان یک واحد کم می‌شود

$$3(x^5+1)^2 \cdot 5x^4$$

مشتق عبارت داخل پرانتز

پس اگر تابع داخل عبارت توانی را با [.] نشان دهیم، داریم

$$\frac{d}{dx}[\cdot]^n = n[\cdot]^{n-1}\frac{d}{dx}[\cdot] \qquad (۴۰)$$

در پایان این بخش فرمول (۴۰) را برای عدد n صحیح ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۹. قانون توان برای توابع (نماهای صحیح). اگر n یک عدد صحیح و g تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x) \qquad (۴۱)$$

مثال ۴۷. مطلوب است مشتق $y=(4x)^{100}$.

حل. با توجه به رابطه (۴۱) داریم

$$\frac{d}{dx}(4x)^{100} = 100(4x)^{99}\frac{d}{dx}(4x)$$
$$= 100(4x)^{99}\times 4 = 400(4x)^{99}$$

مثال ۴۸. مطلوب است مشتق $y=(2x^3+4x+1)^4$.

حل. با $g(x)=2x^3+4x+1$ و $n=4$ از (۴۱) داریم

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x^3+4x+1)^3\frac{d}{dx}(2x^3+4x+1)$$
$$= 4(2x^3+4x+1)^3(6x^2+4)$$

مثال ۴۹. مطلوب است مشتق تابع

$$y = \frac{(x^2-1)^3}{(5x+1)^8}$$

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(5x+1)^8\frac{d}{dx}(x^2-1)^3-(x^2-1)^3\frac{d}{dx}(5x+1)^8}{(5x+1)^{16}}$$
$$=\frac{(5x+1)^3\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x-(x^2-1)^3\cdot 8(5x+1)^7\cdot 5}{(5x+1)^{16}}$$
$$=\frac{6x(5x+1)^8(x^2-1)^2-40(5x+1)^7(x^2-1)^3}{(5x+1)^{16}}$$
$$=\frac{(x^2-1)^2(-10x^2+6x+40)}{(5x+1)^9}$$

مثال ۵۰. برای مشتق گیری از $y=\frac{1}{x^2+1}$ می‌توان از قانون خارج قسمت استفاده کرد. بهرحال با فرض $n=-1$، می‌توان از قانون توان برای تابع نیز استفاده نمود.

$$y=(x^2+1)^{-1}$$
$$\frac{dy}{dx}=(-1)(x^2+1)^{-2}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$=(-1)(x^2+1)^{-2}(2x)$$
$$=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

مثال ۵۱. مطلوب است مشتق تابع

$$y=\frac{1}{(7x^5-x^4+2)^{10}}$$

حل. تابع را به صورت

$$y=(7x^5-x^4+2)^{-10}$$

نوشته و از قانون توان (۴۱) استفاده می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}=-10(7x^5-x^4+2)^{-11}\frac{d}{dx}(7x^5-x^4+2)$$
$$=\frac{-10(35x^4-4x^3)}{(7x^5-x^4+2)^{11}}$$

مثال ۵۲. مطلوب است مشتق $y=\tan^2 x$

حل. از فرمول (۴۱) داریم

$$\frac{dy}{dx}=2(\tan x)\frac{d}{dx}\tan x$$
$$=2\tan x\sec^2 x$$

قانون زنجیره‌ای ۳۰. توان یک تابع را می‌توان به صورت یک تابع مرکب نمایش داد. اگر $f(x)=x^n$ و $u=g(x)$ آنگاه $f(u)=f(g(x))=[g(x)]^n$. حال قانون توان (۴۱) حالت خاصی از قانونی به نام قانون زنجیره‌ای برای مشتق‌گیری از توابع مرکب است.

قضیه ۳۱. قانون زنجیره‌ای. اگر $y=f(u)$ تابعی مشتق‌پذیر از u و $u=g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر از x باشد آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{۴۲}$$

اثبات. برای $\Delta u\neq 0$. فرض کنید $\Delta x\neq 0$، در این صورت

$$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x) \tag{۴۳}$$

یا

$$g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta u=u+\Delta u$$

علاوه بر آن

$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=f(g(x+\Delta x))-f(g(x))$$

وقتی x و $x+\Delta x$ در فاصله‌ای باز باشند که برای آن $\Delta u\neq 0$، می‌توانیم عبارت زیر را بنویسیم.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

چون g مشتق‌پذیر است، پس پیوسته می‌باشد. بنابراین $g(x+\Delta x)\to g(x)$، $\Delta x\to 0$ و از (۴۳) نتیجه می‌شود که $\Delta u\to 0$. پس

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

و از تعریف مشتق نتیجه می‌شود که

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

فرض $\Delta u\neq 0$ روی یک فاصله برای هر تابع مشتق‌پذیر g لزوماً برقرار نیست. گرچه نتیجه داده شده در (۴۲) برای حالت $\Delta u=0$ نیز معتبر خواهد بود.

اثبات قانون توابع برای توابع. برای اثبات رابطه (۴۱)، ابتدا تابع توانی $y=u^n$ که در آن n عدد صحیح است را در نظر می‌گیریم. با فرض $u=g(x)$ از قانون زنجیره‌ای (۴۲) داریم

$$\frac{dy}{du}=nu^{n-1},\quad \frac{du}{dx}=g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}=n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

با توجه به قانون زنجیره‌ای و مشتق توابع مثلثاتی، می‌توان مشتق توابع مثلثاتی از توابع مشتق‌پذیر u را به دست آورد. فرض کنید u تابعی مشتق‌پذیر از x است.

$$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$$

مثال ۵۳. مطلوب است مشتق تابع $y=\cos 4x$

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\cos 4x)$$

$$=-\sin 4x\frac{d}{dx}(4x)=-4\sin 4x$$

مثال ۵۴. مطلوب است مشتق تابع $y=\tan(6x^2+1)$

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan(6x^2+1))$$

$$=\sec^2(6x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(6x^2+1)$$

$$=12x\sec^2(6x^2+1)$$

مثال ۵۵. مطلوب است مشتق $y=(9x^3+1)^2\sin 5x$

حل.

$$\frac{dy}{dx}=(9x^3+1)^2\frac{d}{dx}\sin 5x+\sin 5x\frac{d}{dx}(9x^3+1)^2$$

$$=(9x^3+1)(45x^3\cos 5x+54x^2\sin 5x+5\cos 5x)$$

مثال ۵۶. مطلوب است مشتق $y=\cos^4(7x^3+6x-1)$

حل.
$$\frac{dy}{dx}=4\cos^3(7x^3+6x-1)\cdot\frac{d}{dx}\cos(7x^3+6x-1)$$
$$=4\cos^3(7x^3+6x-1)(-\sin(7x^3+6x-1)\cdot\frac{d}{dx}(7x^3+6x-1))$$
$$=-4(21x^2+6)\cos^3(7x^3+6x-1)\sin(7x^3+6x-1)$$

۵.۳.۴ مشتق‌های مراتب بالاتر.

مشتق مرتبه دوم ۳۲. $f'(x)$ تابع مشتق به دست آمده از تابع $y=f(x)$ را دیدیم. با مشتق‌گیری از مشتق اول تابع یعنی $f'(x)$، به تابع دیگری می‌رسیم که آن را مشتق دوم تابع $f(x)$ نامیده و با $f''(x)$ نشان می‌دهیم. برحسب عملگر نمادین $\frac{d}{dx}$، مشتق دوم نسبت به x را به صورت تابع به دست آمده از $y=f(x)$ با انجام دوبار متوالی عملگر $\frac{d}{dx}$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

مشتق دوم تابع را معمولاً با

$$f''(x),\quad y'',\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad D_x^2y$$

نشان می‌دهیم.

مثال ۵۷. مطلوب است مشتق دوم تابع $y=x^3-2x^2$.

حل. مشتق اول عبارت است از

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$$

با مشتق‌گیری از آن، مشتق دوم به صورت

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(3x^2-4x)=6x-4$$

به دست می‌آید.

مثال ۵۸. مشتق اول تابع $f(x)=\sin x$ به صورت $f'(x)=\cos x$ است. پس مشتق دوم آن $f''(x)=-\sin x$ است.

مثال ۵۹. مشتق دوم $y=(x^3+1)^4$ را بدست آورید.

حل. مشتق اول را از قانون توان برای توابع تعیین می‌کنیم. پس

$$\frac{dy}{dx}=4(x^3+1)^3\frac{d}{dx}(x^3+1)$$
$$=12x^2(x^3+1)^3$$

برای یافتن مشتق دوم، از قوانین توان و حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2\frac{d}{dx}(x^3+1)^3+(x^3+1)^3\frac{d}{dx}(12x^2)$$
$$=108x^4(x^3+1)^2+24x(x^3+1)^3$$
$$=(x^3+1)^2(132x^4+24x)$$

حال فرض کنید تمام مشتقات موجودند، پس می‌توان از تابع $y=f(x)$ به دفعات زیاد مشتق گرفت. مشتق سوم تابع، مشتق مشتق دوم است. مشتق چهارم، مشتق مشتق سوم است و به همین ترتیب. مشتق سوم و چهارم را به ترتیب با $\frac{d^3y}{dx^3}$ و $\frac{d^4y}{dx^4}$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

در حالت کلی، اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه مشتق مرتبه nام توسط

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

تعریف می‌شود. دیگر نمادها برای n مشتق اول تابع به صورت زیر است:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \dots,\ f^{(n)}(x)$$
$$y',\ y'',\ y''',\ y^{(4)},\ \dots,\ y^{(n)}$$
$$D_xy,\ D_x^2y,\ D_x^3y,\ D_x^4y,\ \dots,\ D_x^ny$$

مثال ۶۰. پنج مشتق اول تابع $f(x)=2x^4-6x^3+7x^2+5x-10$ را بدست آورید.

حل. $f'(x)=8x^3-18x^2+14x+5,\quad f''(x)=24x^2-36x+14$

$f'''(x)=48x-36,\quad f^{(4)}(x)=48,\quad f^{(5)}(x)=0$

نکته ۳۳. به سادگی دیده می شود که طبق قانون توان، مشتق (n+1) ام از یک تابع چندجمله ای درجه n برابر صفراست.

مثال ۴۱. مشتق سوم تابع $y=\frac{1}{x^3}$ را بدست آورید.

حل. با نوشتن تابع به صورت $y=x^{-3}$ داریم

$$\frac{dy}{dx}=-3x^{-4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-3)(-4)x^{-5}=12x^{-5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=(12)(-5)x^{-6}=-60x^{-6}=-\frac{60}{x^6}$$

۶.۳.۴ مشتق گیری ضمنی

توابع صریح وضمنی ۳۴. یک تابع که متغیروابسته آن برحسب متغیرمستقل مثلا x مشخص باشد، یعنی $y=f(x)$ را یک تابع صریح نامیم. به عنوان مثال $y=\frac{1}{2}x^3-1$ یک تابع صریح است. درحالی که معادله $2y-x^3+2=0$ یک تابع ضمنی راتعریف می کند یا y یک تابع ضمنی از x است.

می دانیم که معادله

$$x^2+y^2=4 \qquad (۴۴)$$

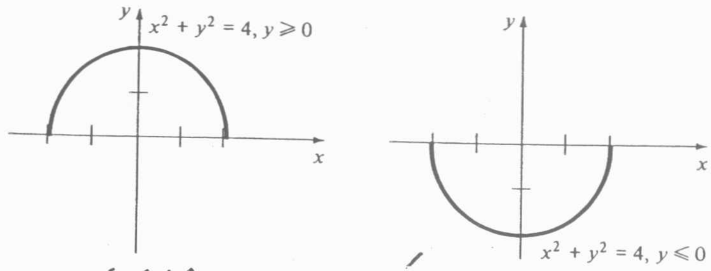
یک دایره به شعاع 2 ومرکزی درمبداء را توصیف می کند. معادله (۴۴) یک تابع نیست زیرا برای هر انتخاب x درفاصله $-2<x<2$ دومقدار برای y داریم. بهرحال همان گونه که در شکل (۲۶) مشاهده می شود، اگر یا نیم دایره بالایی یا نیم دایره پایینی را ازدایره درنظر بگیریم آنگاه یک تابع به دست می آوریم. گوییم (۴۴) حداقل دو تابع ضمنی از x روی فاصله $-2\le x\le 2$ را مشخص می کند. دراین حالت نیم دایره بالایی تابع توصیف شده توسط

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \qquad -2\le x\le 2$$

است درحالی که نیم دایره پایینی تابع تعریف شده توسط

$$g(x)=-\sqrt{4-x^2} \qquad -2\le x\le 2$$

است.



(الف) شکل ۲۶ (ب)

توجه کنید که هر دو معادله

$$x^2+[f(x)]^2=4, \quad x^2+[g(x)]^2=4$$

اتحادهایی روی فاصله $-2 \le x \le 2$ هستند.

در حالت کلی، اگر معادله $F(x,y)=0$ تعریف کننده تابع f به طور ضمنی روی فاصله‌ای باشد آنگاه روی فاصله مورد نظر $F(x,f(x))=0$ یک اتحاد است. نمودار f قسمتی (یا تمام) نمودار معادله $F(x,y)=0$ است.

یک معادله پیچیده مانند

$$x^4+x^2y^3-y^5=2x+1$$

می‌تواند تعیین کننده چند تابع ضمنی روی فاصله‌ای مناسب بر محور xها باشد ولی نتوانیم y را برحسب x حل کنیم. اما در این حالات، می‌توانیم مشتق یعنی $\frac{dy}{dx}$ را به دست آوریم که آن را مشتق‌گیری ضمنی نامیم. در این روش از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم و از قوانین مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم سپس $\frac{dy}{dx}$ را به دست می‌آوریم، به عبارتی حاصل را برای $\frac{dy}{dx}$ حل می‌کنیم.

در مثال‌های زیر، فرض می‌کنیم که معادله داده شده، حداقل یک تابع ضمنی مشتق‌پذیر را تعیین می‌کند.

مثال ۴۲. مطلوب است $\frac{dy}{dx}$ هرگاه $x^2+y^2=4$.

حل. از طرفین معادله داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم و از فرمول

$$\frac{d}{dx}y^n = ny^{n-1}\frac{dy}{dx} \qquad (۴۵)$$

استفاده می‌کنیم. با توجه به (۴۸) داریم

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}4$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

با حل برای $\frac{dy}{dx}$ داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad (۴۹)$$

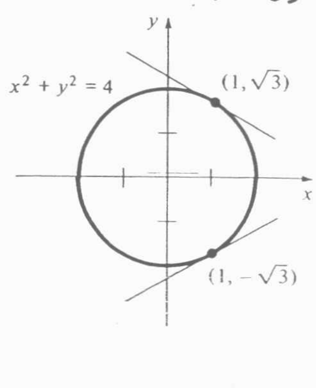
همانند (۴۹) از مثال (۶۲)، مشتق‌گیری ضمنی معمولاً یک مشتق وابسته به هر دو متغیر x و y است. همان‌گونه که قبلاً گفتیم، معادله $x^2+y^2=4$ دو تابع ضمنی مشتق‌پذیر روی فاصله باز $-2<x<2$ را نمایش می‌دهد. به طور نمادین $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ نشان‌دهنده مشتق هر یک از توابع روی فاصله است. به طور کلی، مشتق‌گیری ضمنی منجر به مشتق هر تابع ضمنی مشتق‌پذیر تعریف‌شده توسط معادله $F(x,y)=0$ است.

مثال ۶۳. شیب‌های خطوط مماس بر نمودار $x^2+y^2=4$ در نقاط متناظر به $x=1$ را به دست آورید.

حل. با جایگزینی $x=1$ داریم $y^2=3$ پس $y=\pm\sqrt{3}$، بنابراین خطوط مماس در نقاط $(1,\sqrt{3})$ و $(1,-\sqrt{3})$ وجود دارند. گرچه $(1,\sqrt{3})$ و $(1,-\sqrt{3})$ نقاطی روی نمودارهای دو تابع ضمنی متفاوت‌اند، اما همان‌طور که در شکل (۲۷) دیده می‌شود، رابطه (۴۹) از مثال (۶۲) نتیجه می‌دهد که شیب درستی در هر نقطه داریم. پس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,\sqrt{3})}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-\sqrt{3})}=-\frac{1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$



شکل ۲۷

مثال ۴۴. مطلوب است $\frac{dy}{dx}$ همراه $x^4+x^2y^3-y^5=2x+1$

حل. از (۴۵) و قانون ضرب داریم

$$\frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}x^2y^3-\frac{d}{dx}y^5=\frac{d}{dx}(2x)+\frac{d}{dx}(1)$$

$$4x^3+x^2\cdot 3y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3-5y^4\frac{dy}{dx}=2$$

$$(3x^2y^2-5y^4)\frac{dy}{dx}=2-4x^3-2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-4x^3-2xy^3}{3x^2y^2-5y^4}$$

مثال ۴۵. مطلوب است $\frac{d^2y}{dx^2}$ همراه $x^2+y^2=4$

حل. از مثال (۴۲) داریم $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. بنابراین

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y\cdot 1-x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

حال از $x^2+y^2=4$ داریم

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{y^3}$$

مثال ۴۶. مطلوب است $\frac{dy}{dx}$ همراه $\sin y=y\cos 2x$

حل. از قانون زنجیره‌ای و قانون حاصل ضرب داریم

$$\frac{d}{dx}\sin y=\frac{d}{dx}y\cos 2x$$

$$(\cos y)\frac{dy}{dx}=y(-(\sin 2x)(2))+(\cos 2x)\frac{dy}{dx}$$

$$(\cos y-\cos 2x)\frac{dy}{dx}=-2y\sin 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y\sin 2x}{\cos y-\cos 2x}$$

۷.۳.۴ قوانین توان توسیع یافته

در بخش های (۱.۳.۴) و (۴.۳.۴) قانون توان و قانون توان برای توابع را برای توان‌های صحیح بیان کردیم.

$$\frac{d}{dx}x^{n}=nx^{n-1} \tag{۴۷}$$

$$\frac{d}{dx}u^{n}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \quad u=g(x) \tag{۴۸}$$

مشتق گیری ضمنی به ما توانایی توسیع (۴۷) و (۴۸) را به نماهای گویا می دهد. اگر p و q اعداد صحیح بوده و $q\neq 0$ آن گاه برای مقادیری از x که $x^{p/q}$ عددی حقیقی باشد، داریم

$$y=x^{p/q} \tag{۴۹}$$

که تابعی برای y برحسب x است و در نتیجه

$$y^{q}=x^{p} \tag{۵۰}$$

حال فرض کنید y' موجود است و $y\neq 0$. از مشتق گیری ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}y^{q}=\frac{d}{dx}x^{p}$$

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx}=px^{p-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}}$$

بنابراین

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

قضیه ۳۵. قانون توان (نماهای گویا). اگر $\frac{p}{q}$ یک عدد گویا باشد آن گاه

$$\frac{d}{dx}x^{p/q}=\frac{p}{q}x^{(p/q)-1} \tag{۵۱}$$

توجه کنید وقتی $p=n$ و $q=1$ است، رابطه (۵۱) همان (۴۷) می باشد.

مثال ۴۷. مطلوب است مشتق $y=\sqrt{x}$.

حل. تابع را به صورت $y=x^{1/2}$ نوشته و از (۵۱) استفاده می کنیم

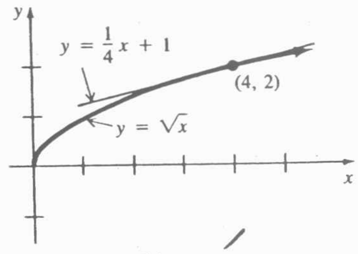
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال ۴۸. معادله خط مماس بر نمودار $y=\sqrt{x}$ در $x=4$ را به دست آورید.

حل. برای $x=4$ داریم $y=\sqrt{4}=2$. از مثال (۴۷) داریم

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$ یا $y=\frac{1}{4}x+1$ است. در شکل (۲۸) نمودارهای تابع و خط مماس نمایش داده شده است.



شکل ۲۸

مثال ۶۹. مطلوب است مشتق $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

حل. چون $y=x^{-\frac{1}{2}}$ از (۵۱) داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x^{(-\frac{1}{2})-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

مثال ۷۰. مطلوب است مشتق $y=9\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x^3}$

حل. داریم $y=9x^{1/3}+4x^{3/2}$. پس

$$\frac{dy}{dx}=9\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1}+4\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1}=3x^{-\frac{2}{3}}+6x^{\frac{1}{2}}$$

قضیه ۳۶. قانون توانی برای توابع (با نماهای گویا). اگر $\frac{p}{q}$ یک عدد گویا و g تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^{p/q}=\frac{p}{q}[g(x)]^{\frac{p}{q}-1}\cdot g'(x) \qquad (۵۲)$$

مثال ۷۱. مطلوب است مشتق $y=(4x+1)^{1/3}$

حل. از (۵۲) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(4x+1)^{\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}(4x+1)=\frac{4}{3}(4x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

مثال ۷۲. مطلوب است مشتق $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

حل. از (۵۲) و قانون خارج قسمت داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{(1+x)^{1/2}(1-x)^{3/2}}$$

مثال ۷۳. مطلوبست مشتق $y=(3x^2+\sqrt{x^2+1})^5$

حل. از قانون توان برای توابع و رابطه (۵۲) داریم

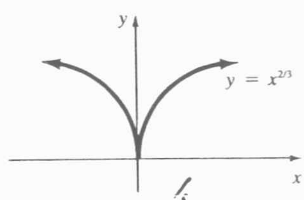
$$\frac{dy}{dx}=5(3x^2+\sqrt{x^2+1})^4\cdot\frac{d}{dx}(3x^2+\sqrt{x^2+1})$$
$$=5(3x^2+\sqrt{x^2+1})^4\cdot\left[6x+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x\right]$$
$$=5(3x^2+\sqrt{x^2+1})^4\left[6x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

در بخش (۲.۴) تابع f یی پیوسته در عدد a داشتیم که دارای یک مماس قائم در $(a, f(a))$ بود و برای این تابع $\lim_{x\to a}|f'(x)|=\infty$. نمودارهای بسیاری از توابع با نماهای گویا دارای مماس‌های قائم هستند.

مثال ۷۴. برای $f(x)=x^{2/3}$ داریم

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}$$

توجه کنید که $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\infty$ در حالی که $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty$. چون f در $x=0$ پیوسته است و $\lim_{x\to 0}|f'(x)|=\infty$ پس محور y ها مماس قائم بر نمودار تابع در $(0,0)$ است. شکل (۳۰) را ببینید.



شکل ۳۰

۴.۴ دیفرانسیل

بحث مشتق را با مسئله یافتن شیب خط مماس به نمودار تابع $y=f(x)$ شروع کردیم.
همان گونه که در شکل (۳۱) دیده می‌شود، نقطه شروع حل این مسئله در نظر گرفتن

$$m_{sec}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بود. برای مقادیر کوچک Δx ، $m_{sec}\simeq m_{tan}$ یا $\frac{\Delta y}{\Delta x}\simeq m_{tan}$. اما با توجه به

$$m_{tan}=f'(x)$$

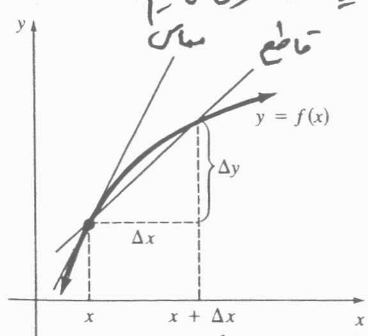
داریم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\simeq f'(x)$$

یا

$$\Delta y\simeq f'(x)\Delta x \qquad (۵۳)$$

عدد Δx را مجدداً به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم.



شکل ۳۱

تعریف ۳۷. نمو Δx را دیفرانسیل متغیر مستقل x نامیده و با dx نمایش می‌دهیم پس

$$dx=\Delta x$$

همچنین مقدار $f(x)\Delta x$ در (۵۳) را به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم.

تعریف ۳۸. تابع $f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل متغیر وابسته y نامیده و با dy نمایش می‌دهیم
یعنی

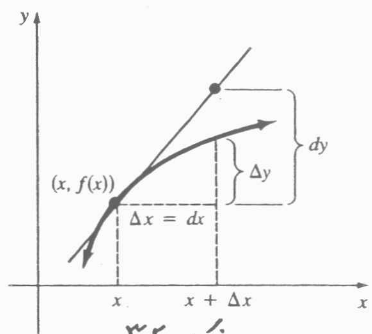
$$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)\,dx$$

چون شیب مماس به نمودار تابع به صورت زیر است:

$$\frac{rise}{run} = m_{tan} = f'(x) = \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} \qquad \Delta x \neq 0$$

در نتیجه صعود یا نزول خط مماس را می‌توان به عنوان dy تعبیر کرد. از شکل (۳۲) دیده می‌شود که وقتی Δx خیلی کوچک است ($\Delta x \simeq 0$) آنگاه

$$\Delta y \simeq dy \qquad (۵۴)$$



شکل ۳۲

مثال ۷۵. الف) Δy و dy را برای $y = 5x^2 + 4x + 1$ بدست آورید.

ب) مقادیر Δy و dy را برای $x = 6$ و $\Delta x = dx = 0.02$ مقایسه کنید.

حل. الف)
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$= [5(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) + 1] - [5x^2 + 4x + 1]$$
$$= 10x\,\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2$$

و از تعریف (۳۸) داریم

$$dy = (10x + 4)dx$$

چون $dx = \Delta x$ پس $\Delta y = (10x+4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ و $dy = (10x+4)\Delta x$ دارای اختلافی به اندازه $5(\Delta x)^2$ هستند.

ب) وقتی $x = 6$ و $\Delta x = 0.02$ داریم

$$\Delta y = 10(6)(0.02) + 4(0.02) + 5(0.02)^2 = 1.282$$
$$dy = (10(6) + 4)(0.02) = 1.28$$

پس

$$\Delta y - dy = 1.282 - 1.28 = 0.002 = 5(0.02)^2$$

تقریب ها ۳۹. وقتی $\Delta x \simeq 0$ ، دیفرانسیل ها به معنای پیشگو کننده مقدار $f(x+\Delta x)$ با داشتن مقدار تابع و مشتق آن در x است. همانگونه که در شکل (۳۳) دیده می شود، اگر x به اندازه Δx تغییر کند آنگاه تغییر متناظر با آن در تابع $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ است و بنابراین

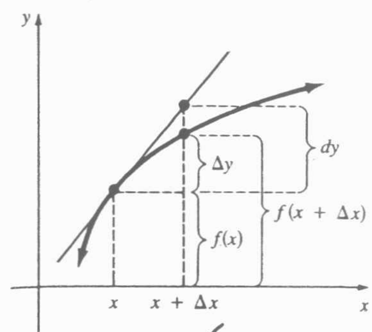
$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$$

اما در (۵۴) دیده می شود که برای تغییر کوچکی در x داریم

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + dy$$

یعنی

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\,dx \qquad (۵۵)$$



شکل ۳۳

مثال ۷۶. با استفاده از (۵۵) مقدار تقریبی $\sqrt{25.4}$ را بدست آورید.

حل. ابتدا تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را اختیار کرده و مقدار تقریبی $f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}$ را برای $x=25$ و $\Delta x = 0.4$ بدست می آوریم.

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

پس (۵۵) نتیجه می دهد که

$$\sqrt{x+\Delta x} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x \qquad (۵۶)$$

وقتی $x=25$ و $\Delta x = 0.4$ ، از (۵۶) داریم

$$\sqrt{25.4} \simeq \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(0.4) = 5.04$$

خطا ۴۰. خطا در محاسبات به صورت

$$\text{خطا} = \text{مقدار واقعی} - \text{مقدار تقریبی} \qquad (۵۷)$$

محاسبه می‌شود. بهرحال، در مباحث علمی مقدار

$$\text{خطای نسبی} = \frac{\text{خطا}}{\text{مقدار واقعی}} \qquad (۵۸)$$

نسبت به مقدار خطا از اهمیت بیشتری برخوردار است. علاوه بر آن $\times 100$ (خطای نسبی) را درصد خطا نامیم. به عنوان مثال با کمک ماشین حساب داریم $\sqrt{25.4} = 5.03984$ که با پنج رقم اعشار محاسبه شده است. بنابراین در مثال (۷۶) خطا برابر -0.00016 و خطای نسبی برابر -0.00003 و درصد خطا برابر -0.003% است.

مثال ۷۷. اضلاع یک مکعب برابر 30 سانتیمتر با خطای ممکن ± 0.02 سانتیمتر است. ماکزیمم خطای تقریب در حجم مکعب چقدر است؟

حل. حجم مکعب برابر $V = x^3$ است که در آن x اندازه یک ضلع آن می‌باشد. اگر Δx نشان دهنده خطا در طول یک ضلع باشد آنگاه خطای متناظر برای حجم عبارت است از

$$\Delta V = (x+\Delta x)^3 - x^3$$

از دیفرانسیل $dV = 3x^2dx = 3x^2\Delta x$ به عنوان تقریبی برای ΔV استفاده می‌کنیم. بنابراین برای $x = 30$ و $\Delta x = \pm 0.02$ ماکزیمم خطای تقریب برابر با

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \ cm^3$$

است.

در این مثال، خطایی حدود $54 \ cm^3$ در حجم بر اثر خطایی به اندازه 0.02 در طول رخ می‌دهد. اگر خطای نسبی $\frac{\Delta V}{V}$ را در نظر بگیریم آنگاه خطای نسبی تقریب برابر $\frac{dV}{V}$ است. وقتی $x = 30$ داریم $V = 27000$ و ماکزیمم خطای نسبی تقریب برابر $\pm \frac{54}{27000} = \pm\frac{1}{500}$ است و درصد خطا تقریباً $\pm 0.2\%$ است.

قوانین دیفرانسیل‌گیری ۴۱. دستورات دیفرانسیل‌گیری در نظر گرفته شده در این فصل را می‌توان برحسب دیفرانسیل‌ها مجدداً بیان کرد. برای مثال، اگر $u=f(x)$ و $v=g(x)$ و $y=f(x)+g(x)$، آنگاه $\frac{dy}{dx}=f'(x)+g'(x)$. بنابراین

$$dy=[f'(x)+g'(x)]\,dx=f'(x)\,dx+g'(x)\,dx=du+dv$$

در زیر قوانین جمع، ضرب و تقسیم برای دیفرانسیل‌ها آورده شده‌اند.

$$d(u+v)=du+dv \tag{۵۹}$$

$$d(uv)=u\,dv+v\,du \tag{۶۰}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2} \tag{۶۱}$$

مثال ۷۸. برای $y=x^2\cos 3x$، مطلوب است dy.

حل. برای یافتن دیفرانسیل یک تابع، می‌توان مشتق آن را در dx ضرب کرد. پس

$$\frac{dy}{dx}=x^2(-3\sin 3x)+(2x)\cos 3x$$

$$dy=\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=(-3x^2\sin 3x+2x\cos 3x)\,dx \tag{۶۲}$$

روش دوم. از فرمول (۶۰) استفاده می‌کنیم:

$$dy=x^2\,d(\cos 3x)+\cos 3x\,d(x^2)$$

$$=x^2(-3\sin 3x\,dx)+\cos 3x\,(2x\,dx) \tag{۶۳}$$

با فاکتورگیری از dx، (۶۳) معادل (۶۲) است.

۵.۴ روش نیوتن

برای یافتن ریشه‌های معادله

$$f(x)=0$$

چند روش مستقیم وجود دارد. برای معادلات چندجمله‌ای از درجه 4 یا کمتر، همواره می‌توانیم معادله را با فرمول‌هایی که جوابها را برحسب ضرایب $f(x)$ بیان می‌کنند، حل کنیم. می‌دانیم که $ax^2+bx+c=0$ ، $a\neq 0$ را می‌توان از فرمول درجه دوم حل کرد. البته باید توجه کرد که معادلات چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از 4 را نمی‌توان با فرمولی خاص حل نمود (ریاضیدان نروژی نیلز هنریک آبل این مطلب را ثابت نمود). بنابراین حل نمودن معادله جبری

$$x^5-3x^2+4x-6=0 \qquad (۴۴)$$

بجز اینکه بتوان آن را به عامل‌های چندجمله‌ای تجزیه کرد را نمی‌توان با یک فرمول حل کرد. علاوه بر آن به عنوان مثال یافتن ریشه معادله متعالی (غیرجبری) مانند

$$2x=\tan x \qquad (۴۵)$$

نیز نیاز به اطلاعاتی خاص دارد. برای معادلاتی مانند (۴۴) و (۴۵) تکنیک تقریب یا تخمین را برای یافتن ریشه‌ها به کار می‌بریم. یکی از روش‌های مؤثر در یافتن ریشه تقریبی، روش نیوتن است که براساس مشتق یک تابع پایه‌ریزی می‌شود.

تکنیک تکراری ۴۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر و c نشان دهندهٔ ریشه مجهول معادله $f(x)=0$ است، یعنی $f(c)=0$. فرض کنید x_0 عددی دلخواه است که نزدیک به ریشه مجهول c به طور حدسی اختیار شده است. اگر $f(x_0)\neq 0$ باشد، $f'(x_0)$ را محاسبه کرده و مماس به نمودار f در $(x_0, f(x_0))$ را در نظر می‌گیریم. اگر x_1 مختص x محل برخورد این خط مماس با محور xها باشد، داریم

$$\text{شیب خط} = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

معادله را برای x_1 حل می‌کنیم، داریم

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

روش فوق را برای نقطهٔ $(x_1, f(x_1))$ تکرار می‌کنیم. فرض کنید x_2 محل برخورد خط مماس دوم با محور xها است. از

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

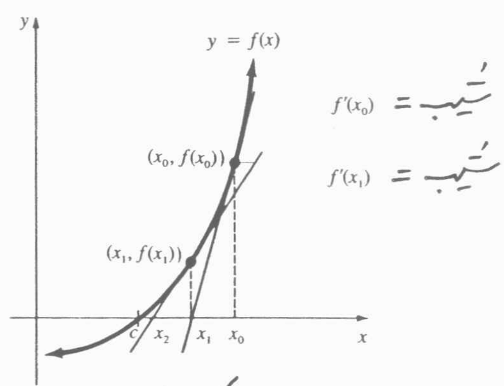
داریم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

با ادامه روش فوق، x_{n+1} را از رابطه

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (۴۴)$$

بدست می‌آوریم. با روند تکراری فوق، (۴۴) منجر به دنباله ... ,x_1, x_2, x_3 از تقریب‌هایی می‌شود که همگرا به ریشه c است. یعنی وقتی n افزایش می‌یابد $x_n \to c$. شکل (۳۴) را ببینید.



شکل ۳۴

تجزیه و تحلیل گرافیکی ۴۳. قبل از بکارگیری رابطه (۴۴)، ابتدا سعی در تعیین وجود و تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $f(x)=0$ داریم. به عنوان مثال، عدد گنگ $\sqrt{3}$ را می‌توان به عنوان

الف) یک ریشه معادله درجه دوم $x^2-3=0$ و در نتیجه ریشه یا صفر تابع پیوسته $f(x)=x^2-3$

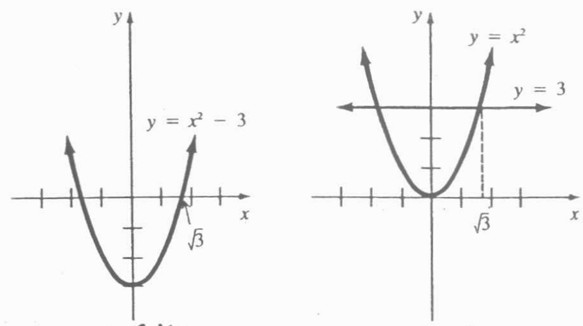
یا

ب) مختص x نقطه تلاقی نمودارهای $y=x^2$ و $y=3$

تعبیر کرد.

هر دو تعبیر در شکل (۳۵) نشان داده شده‌اند. البته، این دلیلی بر انتخاب نقطهٔ (حدس) اولیه

x نزدیک به ریشه c نیز می‌باشد



(الف) (ب)

شکل ۳۵

مثال ۷۹. تعداد ریشه‌های حقیقی $x^3-x+1=0$ را تعیین کنید.

حل. از شکل (۳۶) دیده می‌شود که نمودارهای توابع

$$y=x^3 \quad , \quad y=x-1$$

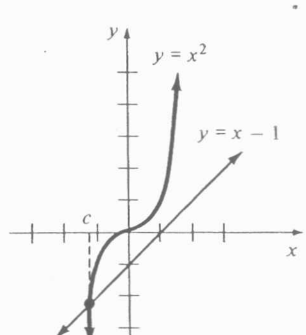
یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. بنابراین معادله

$$x^3=x-1$$

یا

$$x^3-x+1=0$$

تنها دارای یک ریشه حقیقی است.



شکل ۳۶

مثال ۸۰. با روش نیوتن مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ را به دست آورید.

حل. اگر قرار دهیم $f(x)=x^2-3$ در این صورت $f'(x)=2x$ و از (۴۶) داریم

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-3}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)$$

چون $1 < \sqrt{3} < 2$ ، پس با انتخاب $x_0 = 1$ داریم

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{3}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(1+3) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1.75$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}\right) \simeq 1.7321$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) \simeq 1.7321$$

چون تفاوت معنی داری بین x_3 و x_4 نیست، می توان روش تکرار را متوقف کرد. درضمن می توانیم ثابت کنیم که $\sqrt{3} = 1.73205$ مقدار واقعی با پنج رقم اعشار است.

مثال ۸۱. با استفاده از روش نیوتن ریشه حقیقی تقریبی معادله $x^3 - x + 1 = 0$ را بدست آورید.

حل. فرض کنید $f(x) = x^3 - x + 1$ پس $f'(x) = 3x^2 - 1$. بنابراین از (۴۶) داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 1}$$

اگر بخواهیم با سه یا چهار رقم اعشار دقت جواب تقریبی را بدست آوریم، با دو مرحله تکرار به این نتیجه می رسیم. از شکل (۳۶) دیده می شود که با فرض $x_0 = -1.5$ به عنوان حدس اولیه می توان شروع کرد

$$x_1 = \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 1} = \frac{2(-1.5)^3 - 1}{3(-1.5)^2 - 1} \simeq -1.3478$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 1} \simeq -1.3252$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 1} \simeq -1.3247$$

$$x_4 = \frac{2x_3^3 - 1}{3x_3^2 - 1} \simeq -1.3247$$

بنابراین ریشه تقریبی معادله با دقت چهار رقم اعشار برابر -1.3247 است.