مثال ۸۲. کوچکترین ریشه مثبت $2x=\tan x$ را بدست آورید.

حل. شکل (۳۷) نشان می‌دهد که معادله دارای تعداد نامتناهی ریشه است. با $f(x)=2x-\tan x$ و $f'(x)=2-\sec^2 x$ از رابطه (۴۶) داریم

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2x_n-\tan x_n}{2-\sec^2 x_n}$$

معادله را برحسب $\sin x$ و $\cos x$ می‌نویسیم

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2x_n\cos^2 x_n-\sin x_n\cos x_n}{2\cos^2 x_n-1} \qquad (۴۷)$$

از شکل (۳۷) دیده می‌شود که اولین ریشه مثبت نزدیک $x_0=1$ است. با توجه به روند تکراری (۴۷) داریم

$$x_1\simeq 1.3105$$

$$x_2\simeq 1.2239$$

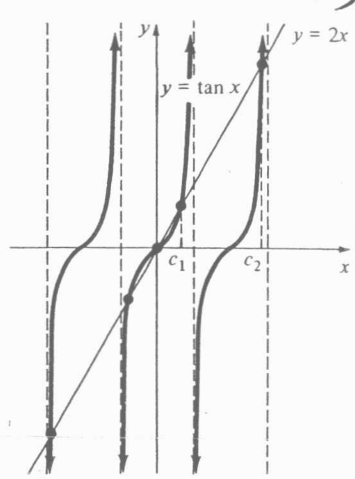
$$x_3\simeq 1.1761$$

$$x_4\simeq 1.1659$$

$$x_5\simeq 1.1656$$

$$x_6\simeq 1.1656$$

پس اولین ریشه مثبت تقریبی برابر 1.1656 است.



شکل ۳۷

درمثال (۸۲) انتخاب نقطه اولیه x_0 اهمیت دارد. دیده می‌شود که با انتخاب $x_0 = \frac{1}{2}$ در (۴۷) به دنباله مقادیر $x_1, x_2, x_3, \ldots$ می‌رسیم که همگرا به ریشه $c=0$ هستند.

در زیر برنامه BASIC برای روش نیوتن آورده شده است. در این برنامه، FND(X) نشان دهنده مشتق تابع $y=f(x)$ است.

```
10 REM NEWTON'S METHOD FOR FINDING ROOTS
20 INPUT "THE INITIAL VALUE IS ";X0
30 DEF FNY(X) = ...
40 DEF FND(X) = ...
50 X1 = X0 - FNY(X0)/FND(X0)
60 PRINT X1
70 LET X0 = X1
80 GO TO 50
90 END
```

تبصره ۴۴. مشکلاتی در روش نیوتن وجود دارد.

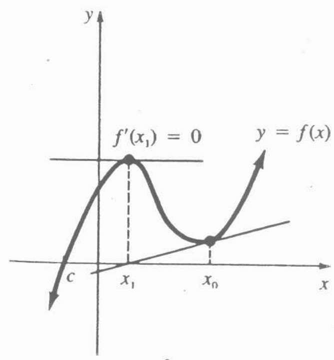
الف) باید $f'(x)$ را محاسبه کنیم. اگر معادله $f(x)=0$ پیچیده باشد فرم $f'(x)$ ممکن است بخوبی در دسترس قرار نداشته باشد.

ب) اگر ریشه c از $f(x)=0$ نزدیک به مقادیری باشد که در آنها $f'(x)=0$، آن گاه مخرج عبارت (۴۴) نزدیک به صفر است و لازم است که $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ را با درجه بالائی از دقت محاسبه کنیم. در چنین حالاتی بجای ماشین حساب باید از یک رایانه استفاده کرد.

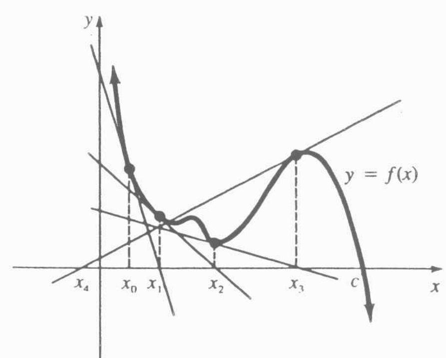
ج) قبل از انتخاب x_0، لازم است موقعیت تقریبی ریشه $f(x)=0$ را تعیین کنیم. گاهی اوقات به طور معنی‌داری این کار سخت است. حتی اگر بتوانیم موقعیت تقریبی ریشه را تعیین کنیم، روند تکرار (۴۴) ممکن است در نزدیکی x_0 همگرا نباشد. در شکل (۳۸) دیده می‌شود که x_2 تعریف نشده است زیرا $f'(x_1)=0$. در شکل (۳۹) دیده می‌شود که خطوط مماس به طریقی اند که محل تلاقی آنها با محور xها نزدیک به c نمی‌شود. در شکل (۴۰) مشاهده می‌شود که وقتی $f(x_0)=-f(x_1)$ و $f'(x_0)=f'(x_1)$، خطوط مماس بین دو نقطه $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ تکرار می‌شوند.

بغیر از این مشکلات، درصورتی که روش نیوتن همگرا به ریشه باشد، کارآیی آن

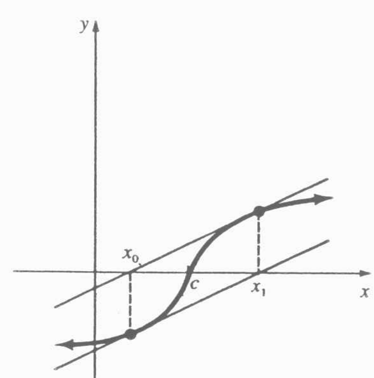
بسیار زیاد است و سریعاً به ریشه مورد نظر نزدیک می‌شویم ،



شکل ۳۸



شکل ۳۹



شکل ۴۰

۶.۴ حرکت مستقیم الخط و مشتق

در بخش (۱.۴) حرکت یک جسم بر مسیر مستقیم، افقی یا عمودی، را بررسی کردیم و به آن حرکت مستقیم الخط گفتیم. فرض کنید تابع s مختص جسم روی خط افقی یا عمودی را مشخص کند. s را تابع موقعیت نامیم. متغیر t نشان دهنده زمان و $s(t)$ فاصله جهت‌دار جسم، اندازه‌گیری شده برحسب سانتیمتر، متر، فوت، مایل و غیره از نقطه $s=0$ است. جهت مثبت برای s سمت راست $s=0$ در راستای افقی و به طرف بالا در راستای قائم است.

مثال ۸۳. یک جسم متحرک روی خط افقی با تابع موقعیت $s(t)=-t^2+4t+3$ را در نظر بگیرید که در آن s برحسب متر و t برحسب ثانیه اندازه‌گیری شده‌اند. موقعیت جسم در زمانهای ۰، ۲ و ۶ ثانیه چیست؟

حل. با جایگزینی در تابع موقعیت داریم

$$s(0)=3,\qquad s(2)=7,\qquad s(6)=-9$$

همانگونه که در شکل (۴۱) دیده می‌شود، $s(6)=-9<0$ به معنای آن است که جسم بعد از 6 ثانیه در سمت چپ نقطه مرجع $s=0$ قرار دارد.

شکل ۴۱

سرعت و شتاب ۴۵. اگر سرعت متوسط جسم متحرک بر فاصله زمانی به طول Δt برابر

$$\frac{\text{تغییر در موقعیت}}{\text{تغییر در زمان}}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

باشد آنگاه نرخ تغییر لحظه‌ای سرعت جسم است و توسط

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

داده می‌شود. بنابراین:

اگر s تابع موقعیت یک جسم متحرک در حرکت مستقیم الخط باشد آنگاه تابع سرعت

در زمان t عبارت است از

$$v(t)=\frac{ds}{dt}$$

تندی جسم در زمان t برابر $|v(t)|$ است. سرعت برحسب سانتیمتر بر ثانیه (cm/sec)، متر بر ثانیه (m/sec)، فوت بر ثانیه (ft/sec)، کیلومتر بر ساعت (km/hr)، مایل بر ساعت (mi/hr) وغیره اندازه گیری می شود.

واضح است که بتوانیم نرخ تغییر سرعت را بدست آوریم. اگر $v(t)$ سرعت یک جسم متحرک در حرکت مستقیم الخط باشد آنگاه تابع شتاب در زمان t به صورت زیر است

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

واحدهای اندازه گیری شتاب، متر بر ثانیه بر ثانیه (m/sec^2)، فوت بر ثانیه بر ثانیه (ft/sec^2)، مایل بر ساعت بر ساعت (mi/hr^2) وغیره است.

در بخش های بعد خواهیم دید که وقتی مشتق یک تابع f بر فاصله I مثبت باشد آنگاه f روی I صعودی است. به طور هندسی، نمودار تابع صعودی است هرگاه با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش یابد. به طور مشابه اگر مشتق تابع f روی I منفی باشد آنگاه f نزولی است که به معنای کاهش مقدار f در اثر افزایش متغیر x است. بنابراین وقتی $v(t)=s'(t)>0$ گوییم $s(t)$ صعودی است و حرکت به طرف راست است. سرعت منفی مشخص کننده حرکت به طرف چپ است. به طور مشابه، وقتی $a(t)>0$، سرعت صعودی است درحالی که اگر $a(t)<0$ سرعت نزولی است. برای مثال شتاب $-25\ m/sec^2$ به معنای آن است که سرعت در هر ثانیه $25\ m/sec$ کاهش می یابد. باید توجه داشت که سرعت نزولی را با مفهوم سقوط یا پایین آمدن نباید اشتباه گرفته شود. برای مثال، سنگی را در نظر بگیرید که از بالای یک ساختمان سقوط می کند. شتاب جاذبه ثابت منفی $-9.8\ m/sec^2$ است. علامت منفی به معنای آن است که سرعت سنگ از نقطه شروع 0 نزول می کند. وقتی سنگ به زمین می رسد سرعت $v(t)<0$ اما $|v(t)|$ بزرگ است. توجه کنید یک جسم در حرکت مستقیم الخط روی یک خط افقی کند شونده است درصورتی که وقتی $v(t)>0$ (حرکت به راست) و $a(t)<0$

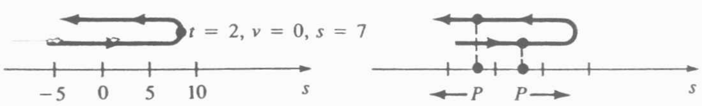
(سرعت نزولی) یا وقتی $v(t)<0$ (حرکت به چپ) و $a(t)>0$ (سرعت صعودی) است. به عبارت دیگر حرکت یک جسم کاهنده است وقتی که تندی آن یعنی $|v(t)|$ نزولی باشد.

مثال ۸۴. در مثال (۸۳) توابع سرعت و شتاب برای جسم به ترتیب

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=-2t+4$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=-2$$

است. در زمانهای ۰ و ۲ و ۶ ثانیه، سرعت جسم به ترتیب برابر $v(0)=4\ cm/sec$ و $v(2)=0\ cm/sec$ و $v(6)=-8\ cm/sec$ است. چون شتاب همواره منفی است، سرعت همیشه نزولی می‌باشد. توجه کنید که برای $t<2$، $v(t)=2(-t+2)>0$ و برای $t>2$، $v(t)=2(-t+2)<0$. اگر زمان t چنان باشد که سرعت از منفی به مثبت تغییر کند آنگاه ذره به طرف راست در فاصله زمانی $(-\infty,2)$ حرکت می‌کند و به طرف چپ در فاصله زمانی $(2,\infty)$ حرکت می‌کند. حرکت را روی نمودار داده شده در شکل (۴۲) نشان داده‌ایم.

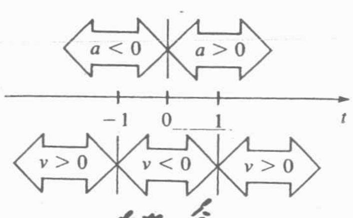


الف) $s(t)=-t^2+4t+3$

شکل ۴۲

مثال ۸۵. یک جسم روی خط افقی با تابع موقعیت $s(t)=\frac{1}{3}t^3-t$ حرکت می‌کند. فاصله‌ای زمانی که روی آن حرکت کاهنده است را بدست آورید.

حل. علامت‌های جبری $v(t)=t^2-1=(t+1)(t-1)$ و $a(t)=2t$ را روی شکل (۴۳) مشخص کرده‌ایم. در فواصلی که $v(t)$ و $a(t)$ مختلف العلامه اند، حرکت کاهنده است. یعنی فواصل $(-\infty,-1)$ و $(0,1)$ حرکت کاهنده است.



شکل ۴۳

مثال ۸۶. یک جسم روی یک خط افقی با تابع موقعیت $s(t)=t^4-18t^2+25$ حرکت می‌کند که در آن s برحسب سانتیمتر و t برحسب ثانیه اندازه‌گیری می‌شوند. با استفاده از یک نمودار نوع حرکت در فاصله زمانی $[-4,4]$ را تعیین کنید.

حل. تابع سرعت

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=4t^3-36t=4t(t+3)(t-3)$$

و تابع شتاب

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=12t^2-36=12(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$$

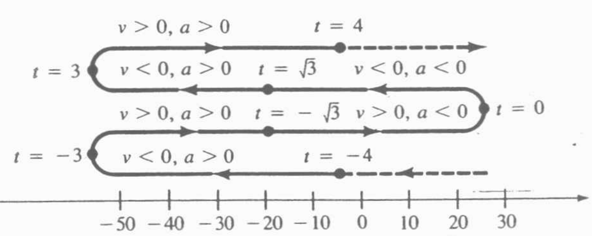
است. از حل $v(t)=0$، می‌توان تعیین کرد که $s(t)$ صعودی یا نزولی است. با توجه به اطلاعات آورده شده در جدول (۲)، می‌توان نمودار نشان داده شده در شکل (۴۴) را رسم کرد.

جدول ۲

زمان	موقعیت	سرعت	شتاب
-4	-7	-112	156
-3	-56	0	72
0	25	0	-36
3	-56	0	72
4	-7	112	156

فاصله زمانی	علامت $v(t)$	جهت حرکت
$(-4,-3)$	$-$	چپ
$(-3,0)$	$+$	راست
$(0,3)$	$-$	چپ
$(3,4)$	$+$	راست

فاصله زمانی	علامت $a(t)$	سرعت
$(-4,-\sqrt{3})$	$+$	صعودی
$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$-$	نزولی
$(\sqrt{3},4)$	$+$	صعودی

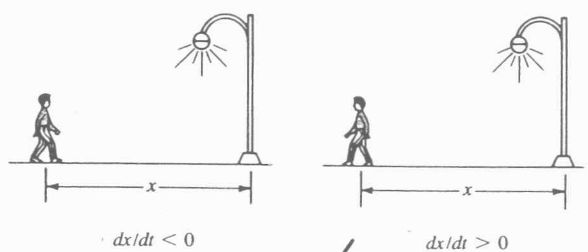


شکل ۴۴

با توجه به شکل دیده می‌شود که حرکت روی فواصل زمانی $(-4,-3)$، $(-\sqrt{3},0)$ و $(\sqrt{3},3)$ حرکت کاهنده است.

۷.۴ نرخ های وابسته

مشتق تابع $y=f(x)$ یعنی $\frac{dy}{dx}$ نرخ تغییر لحظه ای نسبت به متغیر x است. وقتی تابع f نشان دهنده موقعیت یا فاصله است آنگاه نرخ تغییر به عنوان سرعت در نظر گرفته می شود. در حالت کلی نرخ تغییر زمان (میزان تغییر زمان) پاسخ به این سوال است که به چه سرعتی کمیتی تغییر می کند؟ برای مثال، اگر V حجم متغیر نسبت به زمان باشد آنگاه $\frac{dV}{dt}$ نرخ یا میزان تغییر حجم نسبت به زمان t است. پس نرخ $\frac{dV}{dt}=10\ cm^3/sec$ به معنای آن است که حجم ۱۰ سانتیمتر مکعب در هر ثانیه افزایش می یابد. به طور مشابه، اگر شخصی به سمت چراغ خیابانی با نرخ ثابت $3\ ft/sec$ حرکت کند آنگاه $\frac{dx}{dt}=-3\ ft/sec$. از طرف دیگر اگر شخص از چراغ خیابان دور شود آنگاه $\frac{dx}{dt}=3\ ft/sec$. نرخ های منفی و مثبت به معنای آن است که x نزول و صعود می کند. (شکل (۴۵))



شکل ۴۵

در این بخش، نرخ های وابسته را در نظر می گیریم. با توجه به توضیحات ارایه شده، اکنون از نمادهای ریاضی برای بررسی های مورد نیاز استفاده می کنیم. برای این منظور، در مسایل مربوط به نرخ های وابسته، طبق مراحل زیر عمل می کنیم.

۱ - یک تصویر رسم کنید.

۲ - تمام کمیت هایی که در زمان تغییر می کنند را برچسب گذاری کنید.

۳ - عبارات در مسایل را تجزیه و تحلیل کرده و نرخ های داده شده و مورد نیاز را مشخص کنید.

۴ - یک معادله برحسب متغیرها را بیابید.

۵ - با مشتق گیری از معادله به دست آمده در مرحله (۴) نسبت به زمان t معادله نرخ های وابسته را تعیین کنید.

یادآوری می‌کنیم که اگر y تابعی از x باشد آنگاه قانون توان برای توابع نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dx} y^n = n y^{n-1} \frac{dy}{dx} \qquad (۶۸)$$

که در آن n عددی گویا است. البته (۶۸) برای سه تابع مثلاً r ، z یا x که وابسته به t هستند نیز بکار می‌رود.

$$\frac{d}{dt} r^n = n r^{n-1} \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d}{dt} x^n = n x^{n-1} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt} z^n = n z^{n-1} \frac{dz}{dt} \qquad (۶۹)$$

مثال ۸۷. یک مربع نسبت به زمان منبسط می‌شود. نرخی که مساحت مربع با افزایش یک ضلع، صعود می‌کند را بدست آورید.

حل. در هر زمان مساحت A مربع تابعی از طول ضلع x است.

$$A = x^2 \qquad (۷۰)$$

بنابراین، نرخ‌های وابسته از مشتق (۷۰) نسبت به t بدست می‌آید. پس

$$\underbrace{\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} x^2 = 2x \frac{dx}{dt}}_{\text{نرخ‌های وابسته}}$$

مثال ۸۸. هوا به داخل یک بالون کروی با نرخ $20 \ m^3/min$ پمپ می‌شود. نرخ تغییر شعاع وقتی شعاع $3 \ m$ است، را بدست آورید.

حل. شعاع بالون را با r و حجم آن را با V نشان می‌دهیم. پس

$$\frac{dV}{dt} = 20 \quad m^3/min$$

مایل هستیم $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3}$ را بدست آوریم. رابطه بین V و r توسط فرمول حجم کره داده می‌شود.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (۷۱)$$

با مشتق گیری از (۷۱) نسبت به t و استفاده از (۶۹) داریم

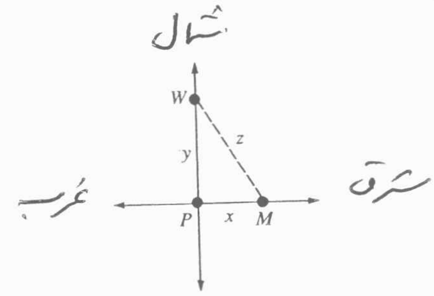
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt} r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2 \frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

اما $\frac{dV}{dt} = 20$ بنابراین $20 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ پس $\frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}$ بنابراین

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{5}{9\pi} \ m/min \simeq 0.18 \ m/min$$

مثال ۸۹. دونده W با سرعت ثابت $10 \frac{km}{hr}$ از نقطه P به سمت شمال می‌دود، ده دقیقه بعد، دونده M با سرعت ثابت $9 \frac{km}{hr}$ از همان نقطه به سمت شرق می‌دود، دونده‌ها 20 دقیقه بعد از شروع دویدن دونده M از نقطه P دارای چه سرعتی هستند؟

حل. ابتدا زمانی که دونده M از نقطه P شروع به حرکت کرده است را به ساعت محاسبه می‌کنیم. همان گونه که در شکل (۴۶) دیده می‌شود، در $t>0$ دونده M در فاصله x و دونده W در فاصله y از نقطه P هستند، z فاصله بین دو دونده است.



شکل ۴۶

داده‌ها: $\frac{dx}{dt}=9\ km/hr$ ، $\frac{dy}{dt}=10\ km/hr$

خواسته: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1/3}$ (20 دقیقه $= \frac{1}{3}$ ساعت)

دانسته‌ها: از قضیه فیثاغورث داریم

$$z^2=x^2+y^2 \qquad (۷۲)$$

با مشتق گیری از رابطه (۷۲) نسبت به t داریم

$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt} \qquad (۷۳)$$

از نرخ های داده شده در (۷۳) استفاده کرده و داریم

$$z\frac{dz}{dt}=9x+10y$$

وقتی $t=\frac{1}{3}hr$ است، با استفاده از رابطه (زمان) × (نرخ) = فاصله داریم

$$x=9\times\left(\frac{1}{3}\right)=3\ \ km$$

چون دونده W، $\frac{1}{6}hr$ یعنی ۱۰ دقیقه بیشتر دویده است پس

$$y=10\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=5\ \ km$$

در $t=\frac{1}{3}\,hr$ داریم $z=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$ km، بنابراین

$$\sqrt{34}\,\frac{dz}{dt}\Big|_{t=\frac{1}{3}}=9(3)+10(5)$$

یا

$$\frac{dz}{dt}\Big|_{t=\frac{1}{3}}=\frac{77}{\sqrt{34}}\simeq 13.21 \text{ km}$$

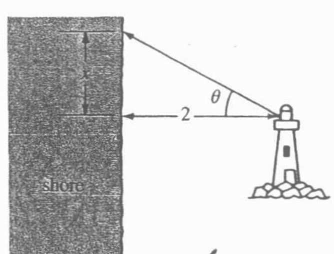
مثال ۹۰. یک فانوس دریایی در یک جزیره کوچک به فاصله 2 mi از خط ساحل قرار گرفته است. برج دیده‌بانی فانوس با سرعت ثابت 6 deg/sec می‌چرخد. پرتو نور با چه سرعتی در امتداد خط ساحل در نقطه 3 mi از نزدیکترین نقطه خط ساحل تا فانوس حرکت می‌کند؟

حل. ابتدا متغیرهای θ و x را مطابق شکل (۴۷) تعریف می‌کنیم. علاوه بر آن، θ اندازه‌گیری شده برحسب درجه را با معادل بودن 1° برابر $\frac{\pi}{180}$ رادیان، به رادیان تبدیل می‌کنیم.

داده‌ها: $\frac{d\theta}{dt}=6\left(\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\pi}{30}$ rad/sec

خواسته: $\frac{dx}{dt}\Big|_{x=3}$

دانسته‌ها: $x=2\tan\theta$ یا $\frac{x}{2}=\tan\theta$



شکل ۴۷

با مشتق‌گیری از آخرین معادله نسبت به t داریم

$$\frac{dx}{dt}=2\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{\pi}{15}\sec^2\theta$$

در لحظه $x=3$ داریم $\tan\theta=\frac{3}{2}$، بنابراین از اتحاد مثلثاتی $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ داریم $\sec^2\theta=\frac{13}{4}$.

پس

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=3}=\frac{\pi}{15}\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{13\pi}{60}\ \text{mi/sec}$$

در فیزیک، گشتاور یک جسم به جرم m که در مسیر مستقیم با سرعت v در حال حرکت است برابر $p=mv$ می‌باشد.

مثال ۹۱. یک هواپیما با جرم 10^5 kg در یک مسیر مستقیم پرواز می‌کند. در حالی که یخ روی لبه‌های بالاهایش با نرخ ثابت 30 kg/hr در حال تشکیل شدن است. شکل (۴۸) را ببینید.

الف) با چه نرخی گشتاور هواپیما تغییر می‌کند، هرگاه در سرعت ثابت $800 \frac{km}{hr}$ در حال پرواز باشد؟

ب) با چه نرخی گشتاور هواپیما در $t=1$ hr تغییر می‌کند، هرگاه در آن لحظه سرعت هواپیما $750 \frac{km}{hr}$ بوده و با نرخ $20 \frac{km}{hr}$ در حال افزایش باشد؟

حل. الف) داده‌ها: $\frac{dm}{dt} = 30$ kg/hr

خواسته: $\frac{dp}{dt}$

دانسته‌ها: گشتاور p از رابطه $p=mv$ به دست می‌آید.

اگر v ثابت باشد آنگاه

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v = 30(800) = 2.4 \times 10^4 \ \text{kg. km/hr}^2$$

ب) داده‌ها: $\frac{dm}{dt} = 30$ kg/hr ، $v(1)=750$ و $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=1} = 20$ km/hr

خواسته: $\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=1}$

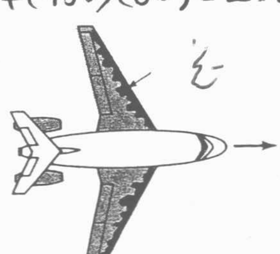
دانسته‌ها: گشتاور p از رابطه $p=mv$ به دست می‌آید.

وقتی هر دوی m و v در حال تغییر باشند، قانون حاصل ضرب نتیجه می‌دهد

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

در $t=1$ hr جرم هواپیما افزایش یافته و برابر 10^5+30 kg است. پس

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{t=1} = (10^5+30)(20) + (750)(30) = 2.0231 \times 10^6 \ \text{kg km/hr}^2$$



شکل ۴۸

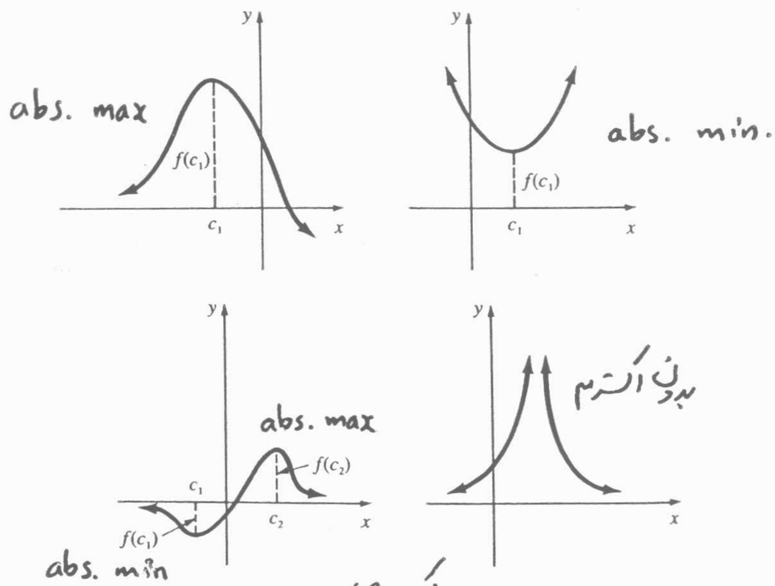
۸.۴ اکسترمم توابع

اکسترمم مطلق ۴۵. فرض کنید تابع f بر فاصله‌ی I تعریف شده است. مقادیر ماکزیمم و مینیمم f روی I (در صورت وجود) را اکسترمم تابع نامیم. در دو تعریف زیر، دو نوع اکسترمم را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴۶. عدد $f(c_1)$ را یک ماکزیمم مطلق تابع f نامیم، اگر برای هر x در دامنه تعریف f داشته باشیم $f(x) \leq f(c_1)$.

تعریف ۴۷. عدد $f(c_1)$ را یک مینیمم مطلق تابع f نامیم، اگر برای هر x در دامنه تعریف f داشته باشیم $f(x) \geq f(c_1)$.

گاهی اوقات اکسترمم مطلق را اکسترمم کلی نیز می‌نامند. در شکل (۴۹) چند امکان نشان داده شده است.



شکل ۴۹

مثال ۹۲. الف) برای $f(x)=\sin x$، $f(\frac{\pi}{2})=1$ یک ماکزیمم مطلق و $f(\frac{3\pi}{2})=-1$ یک مینیمم مطلق است.

ب) تابع $f(x)=x^2$ دارای یک مینیمم مطلق $f(0)=0$ است، اما دارای ماکزیمم مطلق نیست.

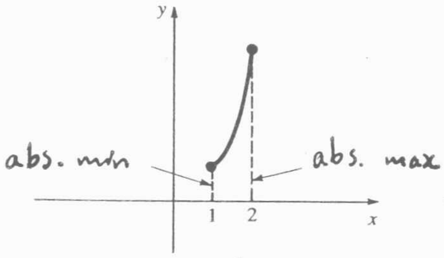
ج) $f(x)=\frac{1}{x}$ دارای ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق نیست.

فاصله ای که تابع روی آن تعریف شده است در بحث اکسترمم اهمیت زیادی دارد.

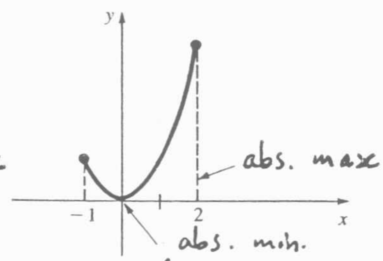
مثال ۹۳ الف) $f(x)=x^2$ تعریف شده بر فاصله بسته $[1,2]$ دارای ماکزیمم مطلق $f(2)=4$ و می نیمم مطلق $f(1)=1$ است. شکل (۵۰).

ب) اگر $f(x)=x^2$ روی فاصله باز $(1,2)$ تعریف شده باشد آنگاه f دارای اکسترمم مطلق نیست. در این حالت $f(1)$ و $f(2)$ تعریف نشده است.

ج) $f(x)=x^2$ تعریف شده روی $[-1,2]$ دارای ماکزیمم مطلق $f(2)=4$ است. اما در این حالت $f(0)=0$ می نیمم مطلق است. شکل (۵۱)



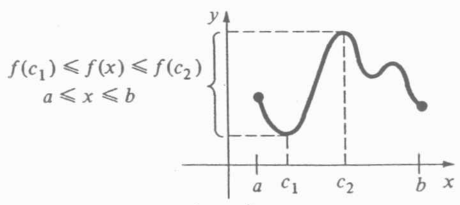
شکل ۵۰



شکل ۵۱

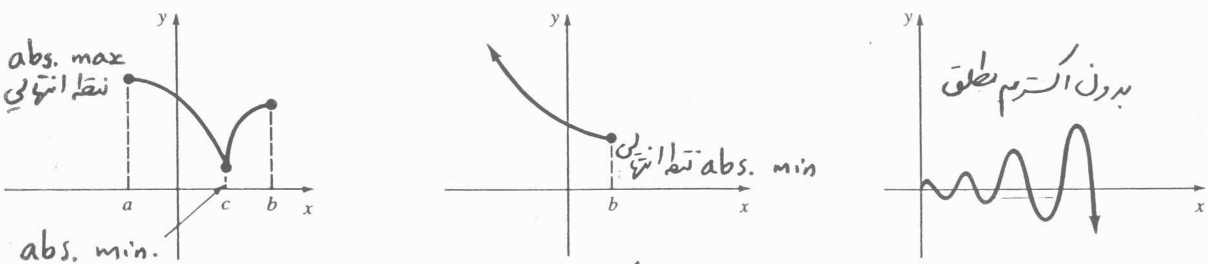
قضیه ۴۸. یک تابع پیوسته f روی فاصله بسته $[a,b]$ همواره دارای یک ماکزیمم مطلق و یک می نیمم مطلق است. (این قضیه به قضیه مقدار اکسترمم معروف است).

به عبارت دیگر، وقتی f روی $[a,b]$ پیوسته است، همواره اعداد $f(c_1)$ و $f(c_2)$ وجود دارند به طوری که برای هر x در $[a,b]$، $f(c_1)\le f(x)\le f(c_2)$. شکل (۵۲).



شکل ۵۲

اکسترمم نقطه انتهایی ۴۹. هرگاه یک اکسترمم مطلق تابعی در نقاط انتهایی فاصله I رخ می دهد، مانند قسمتهای (الف) و (ج) مثال (۹۳)، گوئیم یک اکسترمم نقطه انتهایی داریم. اگر I فاصله بسته نباشد مانند $[a,b)$، (a,b)، $(-\infty,b]$ یا $[a,\infty)$ وغیره، آنگاه حتی وقتی f پیوسته باشد تضمینی وجود ندارد که اکسترمم مطلق موجود باشد. شکل (۵۳).



شکل ۵۴

اکسترمم نسبی ۵۰. تابع در شکل (۵۴)-الف دارای اکسترمم مطلق نیست. فرض کنید توجه خود را به نقاط x نزدیک یا در یک همسایگی اعداد c_1 و c_2 متمرکز کنیم. همان گونه که در شکل (۵۴)-ب دیده می‌شود، $f(c_1)$ یک مقدار ماکزیمم تابع در فاصله (a_1, b_1) است و $f(c_2)$ یک مقدار مینیمم در فاصله (a_2, b_2) است. این مقادیر اکسترمم نسبی یا موضعی نامیده می‌شوند و به صورت زیر تعریف می‌گردند.

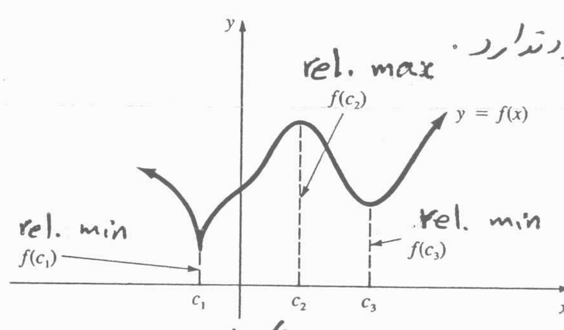
تعریف ۵۱. اکسترمم نسبی. الف) عدد $f(c_1)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f نامیم هرگاه فاصله بازی شامل c_1 وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در این فاصله باز

$$f(x) \le f(c_1) \qquad (۷۴)$$

ب) عدد $f(c_1)$ را یک مینیمم نسبی تابع f نامیم هرگاه فاصله بازی شامل c_1 وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در این فاصله باز

$$f(x) \geq f(c_1) \qquad (۷۵)$$

به عنوان نتیجه‌ای از تعریف (۵۱)، می‌توان گفت که هر اکسترمم مطلق بجز یک اکسترمم نقطه انتهایی، یک اکسترمم موضعی است. چون در اکسترمم‌های نقاط انتهایی نمی‌توان فاصله بازی مشمول در دامنه تعریف تابع شامل نقاط انتهایی در نظر گرفت، آن‌ها را از تعریف مجزا کرده‌ایم. با توجه به شکل (۵۵) حدس زده می‌شود که اگر c مقداری در دامنه f باشد که f در آن دارای اکسترمم نسبی است، آن‌گاه یا $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد.



شکل ۵۵

تعریف ۵۲. مقادیر بحرانی. یک مقدار بحرانی تابع f عدد c در دامنه تابع است به طوری که $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

مثال ۹۴. مقادیر بحرانی تابع $f(x)=x^3-15x+6$ را بدست آورید.

حل.

$$f'(x)=3x^2-15$$
$$=3(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$$

مقادیر بحرانی f اعدادی است که $f'(x)=0$ پس $\sqrt{5}-$ و $\sqrt{5}$ مقادیر بحرانی تابع هستند.

مثال ۹۵. مقادیر بحرانی $f(x)=(x+4)^{2/3}$ را بدست آورید.

حل. با توجه به قانون توان برای توابع داریم

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x+4)^{-1/3}=\frac{2}{3(x+4)^{1/3}}$$

دیده می‌شود که $f'(x)$ در $x=-4$ موجود نیست. چون -4 در دامنه f است پس یک مقدار بحرانی است.

مثال ۹۶. مقادیر بحرانی $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ را بدست آورید.

حل. داریم

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

حال $f'(x)=0$ نتیجه می‌دهد که $x=0$ و $x=2$ و $f'(x)$ در $x=1$ موجود نیست. چون $x=1$ در دامنه تعریف f نیست پس تنها مقادیر بحرانی f در 0 و 2 رخ می‌دهد.

قضیه ۵۳. اگر تابع در عدد c دارای یک اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c یک نقطه بحرانی است.

اثبات. فرض کنید $f(c)$ یک اکسترمم نسبی است.

الف) اگر $f'(c)$ موجود نباشد آنگاه c طبق تعریف (۵۲) یک مقدار بحرانی است.

ب) اگر $f'(c)$ موجود باشد، سه امکان داریم $f'(c)>0$ ، $f'(c)<0$ یا $f'(c)=0$.

حال فرض کنید $f(c)$ ماکزیمم نسبی است. طبق تعریف (۵۱) فاصله بازی شامل c وجود دارد

به طوری که

$$f(c+\Delta x) \leq f(c) \qquad (۷۶)$$

که در آن عدد Δx به اندازه کافی کوچک است (از نظر قدر مطلق) که $c+\Delta x$ در فاصله باز متناظر به c قرار دارد. نامساوی (۷۶) نتیجه می دهد که

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad \Delta x > 0 \qquad (۷۷)$$

و

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \Delta x < 0 \qquad (۷۸)$$

چون $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ موجود و برابر $f'(c)$ است. (۷۷) و (۷۸) نشان می دهد که $f'(c) \leq 0$ و $f'(c) \geq 0$ بنابراین $f'(c)=0$. اثبات در حالتی که $f(c)$ یک می نیمم نسبی است به عنوان تمرین واگذار می شود.

همان گونه که دیدیم یک تابع پیوسته روی فاصله بسته هم دارای یک ماکزیمم مطلق و یک می نیمم مطلق است. قضیه بعد بیان می کند که این اکسترمم ها در کجا رخ می دهند.

قضیه ۵۴. اگر f روی فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه یک اکسترمم مطلق یا در نقاط انتهایی فاصله یا در مقدار بحرانی در فاصله باز (a,b) رخ می دهد.

یافتن اکسترمم مطلق ۵۵. از قضیه (۵۴)، برای یافتن یک اکسترمم تابع پیوسته f روی $[a,b]$ به طریق زیر عمل می کنیم

1) f را در a و b محاسبه می کنیم

2) تمام نقاط بحرانی $c_1, c_2, \ldots$ در (a,b) را به دست می آوریم

3) f را در تمام مقادیر بحرانی محاسبه می کنیم

4) بزرگترین و کوچکترین مقادیر را در بین $f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \ldots$ به ترتیب ماکزیمم مطلق و می نیمم مطلق است.

مثال ۹۷. اکسترمم مطلق $f(x)=x^3-3x^2-24x+2$ را روی (الف) $[-3,1]$ و (ب) $[-3,8]$ به دست آورید.

حل. تنها نیاز است که f را در نقاط انتهایی هر فاصله و در مقادیر بحرانی که درون هر فاصله باز است محاسبه کنیم. از

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

مقادیر بحرانی تابع -2 و 4 است.

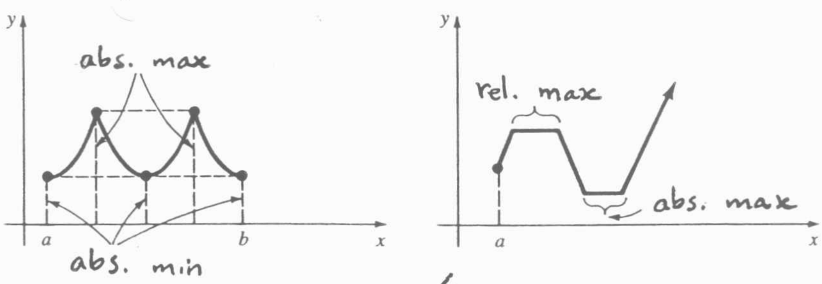
الف) نقطه بحرانی -2 در فاصله $(-3,1)$ است پس مقادیر $f(-3)=20$، $f(-2)=30$ و $f(1)=-24$ را به دست می‌آوریم. بنابراین $f(-2)=30$ ماکزیمم مطلق و $f(1)=-24$ می‌نیمم مطلق است.

ب) روی فاصله $(-3,8)$ مقادیر -2 و 4 اعداد بحرانی اند. با محاسبه

$$f(-3)=20,\quad f(-2)=30,\quad f(4)=-78,\quad f(8)=130$$

پس $f(8)=130$ ماکزیمم مطلق و $f(4)=-78$ می‌نیمم مطلق است.

تبصره ۵۶. الف) یک تابع می‌تواند بیشتر از یک مقدار اکسترمم داشته باشد. شکل (۵۶).



شکل ۵۶

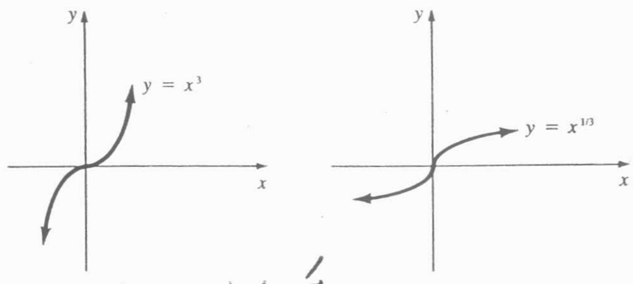
ب) عکس قضیه (۵۳) لزوماً برقرار نیست. یعنی یک مقدار بحرانی تابع لزوماً متناظر به یک اکسترمم نسبی نیست. توابع

$$f(x)=x^3,\quad g(x)=x^{1/3}$$

را درنظر بگیرید. مشتق این توابع عبارتند از

$$f'(x)=3x^2,\quad g(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$$

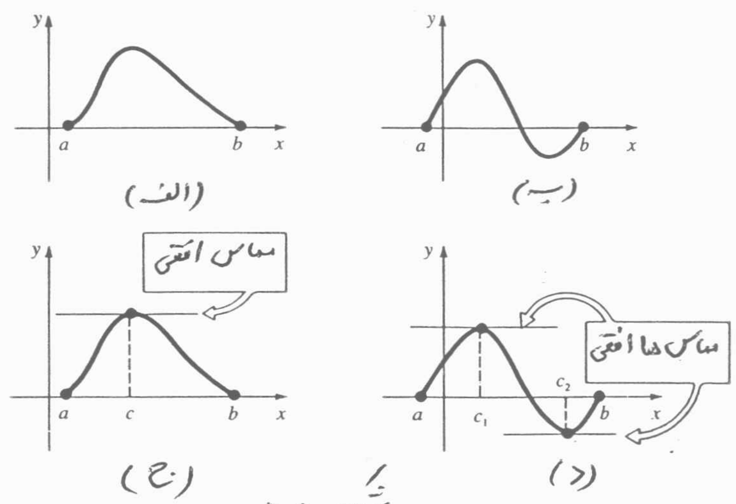
با توجه به مشتق توابع f و g ، $x = 0$ یک مقدار بحرانی هر دو تابع است. از نمودارهای f و g در شکل (۵۷) دیده می‌شود که هیچ یک از توابع دارای اکسترمم نیستند.



شکل ۵۷

۹.۴ قضیه رول و قضیه مقدار میانگین

وقتی تابع $y=f(x)$ روی فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، هیچ بریدگی و هیچ شکستگی در نمودار تابع وجود ندارد. به نظر می‌رسد که اگر $f(a)=f(b)=0$ آنگاه نمودار تابع باید یا ثابت باشد، که در نتیجه $f(x)=0$ برای هر $x \in [a,b]$ یا باید بعد از هر صعودی نزول کند و بعد از هر نزولی صعود کند. نمونه‌هایی از نمودار چنین توابعی در شکل (۵۸) نمایش داده شده است.



شکل ۵۸

در چنین حالاتی، حدس زده می‌شود که حداقل یک نقطه روی نمودار تابع وجود دارد به طوری که مماس در این نقطه افقی است. شکل (۵۸)-(ج) و (د) را ببینید. این نتیجه در قضیه‌ای بنام قضیه رول بیان می‌شود.

قضیه ۵۷. قضیه رول. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر است و $f(a)=f(b)=0$ آن‌گاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$.

اثبات. تابع f روی $[a,b]$ یا ثابت است یا ثابت نمی‌باشد. پس

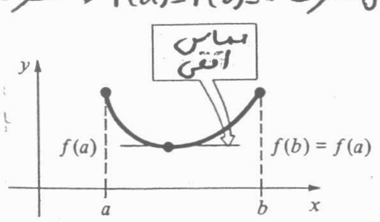
الف) اگر f روی $[a,b]$ ثابت باشد آن‌گاه برای هر $c\in(a,b)$، $f'(c)=0$.

ب) اگر f روی $[a,b]$ ثابت نباشد آن‌گاه x ای در (a,b) وجود دارد به طوری که $f(x)>0$ یا $f(x)<0$. فرض کنید $f(x)>0$. چون f روی $[a,b]$ پیوسته است، از قضیه مقدار اکسترمم می‌دانیم که f یک ماکزیمم مطلق در عددی مانند $c\in[a,b]$ دارد. اما از $f(x)>0$ و $f(a)=f(b)=0$ برای x ای در (a,b) نتیجه می‌گیریم که c نمی‌تواند یکی از نقاط انتهایی $[a,b]$ باشد. چون f روی (a,b) مشتق پذیر است، پس در c مشتق پذیر می‌باشد. بنابراین از قضیه (۵۳) داریم $f'(c)=0$. اثبات برای حالت $f(x)<0$ مشابه است.

مثال ۹۸. تابع $f(x)=-x^3+x$ تعریف شده روی $[-1,1]$ را در نظر بگیرید. چون f تابع چندجمله‌ای است پس روی $[-1,1]$ پیوسته و روی $(-1,1)$ مشتق پذیر می‌باشد، علاوه بر آن $f(-1)=f(1)=0$. بنابراین فرضیات قضیه رول برقرار است. در نتیجه برای حداقل یک عدد در $(-1,1)$ مانند c داریم $f'(c)=-3c^2+1=0$. برای یافتن این عدد معادله $f'(c)=0$ یا $-3c^2+1=0$ را حل می‌کنیم. حاصل دو جواب $c_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $c_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ در این فاصله است.

توجه کنید که تابع مثال (۹۸) در شرایط قضیه رول روی $[0,1]$ نیز برقرار است. در این حالت روی $[0,1]$ معادله $f'(c)=0$ دارای تنها یک جواب $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

تبصره ۵۸. نتیجه‌گیری قضیه رول برای حالتی که به جای شرط $f(a)=f(b)=0$، شرط $f(a)=f(b)$ را داشته باشیم هم برقرار است، شکل (۵۹).



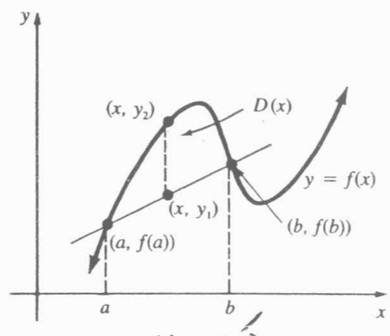
شکل ۵۹

از قضیه رول در اثبات قضیه مهم زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵۹. قضیه مقدار میانگین. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است. آنگاه عدد c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اثبات. همان‌گونه که در شکل (۶۰) نمایش داده شده است، فرض کنید $D(x)$ فاصله قائم بین نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ و خط قاطع گذرنده از نقاط $(a, f(a))$ و $(b,f(b))$ است.



شکل ۶۰

معادله خط قاطع به صورت

$$y-f(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

است. پس

$$D(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)\right] \tag{۷۹}$$

چون $D(a)=D(b)=0$ و D روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است، از قضیه رول نتیجه می‌شود که $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $D'(c)=0$. با توجه به (۷۹) داریم

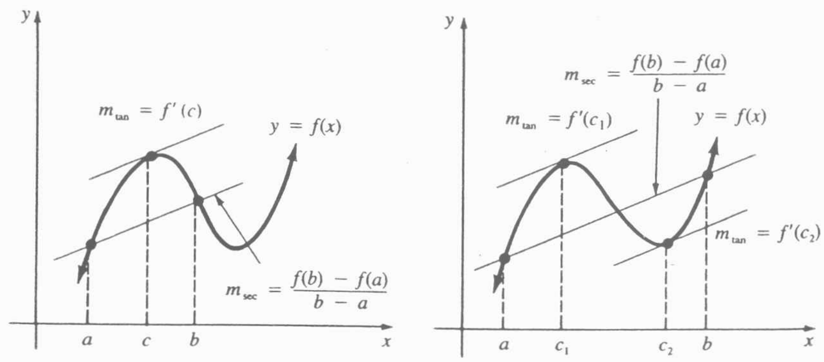
$$D'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

از $D'(c)=0$ داریم

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تبصره ۶۰. قضیه مقدار میانگین، به طور هندسی بیان می‌کند که شیب خط مماس در $(c, f(c))$ همان شیب خط قاطع گذرنده از $(a, f(a))$ و $(b,f(b))$ است، شکل (۶۱) را ببینید.

همچنین از شکل (۴۱)-ب دیده می‌شود که ممکن است بیش از یک عدد c در (a,b) با این خاصیت وجود داشته باشد.



(الف) شکل ۴۱ (ب)

مثال ۴۹. تابع $f(x)=x^3-12x$ تعریف شده بر $[-1,3]$ داده شده است، آیا عددی مانند c در $(-1,3)$ وجود دارد که در نتیجه‌گیری قضیه مقدار میانگین صدق کند؟

حل. f یک تابع چندجمله‌ای است، پس روی $[-1,3]$ پیوسته و روی $(-1,3)$ مشتق‌پذیر است. داریم

$$f(3)=-9, \quad f(-1)=11$$

$$f'(x)=3x^2-12, \quad f'(c)=3c^2-12$$

پس

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2-12$$

بنابراین

$$3c^2=7$$

گرچه معادله دارای دو جواب است، اما تنها یک جواب آن در $(-1,3)$ قرار دارد یعنی

$$c=\sqrt{\frac{7}{3}} \simeq 1.53$$

قضیه مقدار میانگین، ابزاری بسیار مفید در اثبات بسیاری از قضایا است. قبلاً دیدیم که اگر تابع f ثابت باشد یعنی $f(x)=k$ آنگاه $f'(x)=0$. عکس این نتیجه به صورت زیر بیان و اثبات می‌شود.

قضیه ۴۱. اگر $f'(x)=0$ برای هر x در فاصله $[a,b]$ آنگاه $f(x)$ روی فاصله فوق تابع ثابت است.

اثبات. فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در $[a,b]$ است بطوری که $x_2>x_1$، طبق قضیه مقدار میانگین، عدد c در (x_1,x_2) وجود دارد بطوری که

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

اما طبق فرض $f'(c)=0$ پس $f(x_2)-f(x_1)=0$ یعنی $f(x_1)=f(x_2)$. حال چون x_1 و x_2 دلخواه انتخاب شدند بنابراین تابع f در تمام نقاط فاصله دارای مقدار یکسان است یعنی f تابع ثابت است.

توابع صعودی و نزولی. با استفاده از قضیه مقدار میانگین به همراه مفهوم مشتق یک تابع مفاهیم صعود و نزول تابع را تعیین می‌کنیم. قبل از آن به عنوان یادآوری تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴۲. فرض کنید f تابع تعریف شده بر فاصله I بوده و x_1 و x_2 اعداد دلخواه در I بوده و $x_2>x_1$ است.

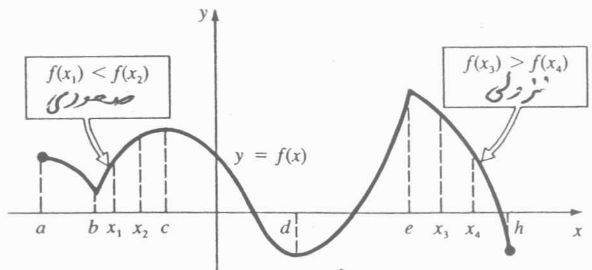
الف) f روی I صعودی است هرگاه $f(x_1)\leq f(x_2)$ و اکیداً صعودی است هرگاه $f(x_1)<f(x_2)$.

ب) f روی I نزولی است هرگاه $f(x_1)\geq f(x_2)$ و اکیداً نزولی است هرگاه $f(x_1)>f(x_2)$.

ج) f روی I یکنوا است هرگاه یا صعودی یا نزولی باشد و اکیداً یکنوا است هرگاه یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد.

به عبارت دیگر، نمودار یک تابع صعودی با افزایش x صعود می‌کند در حالی که نمودار یک تابع نزولی با افزایش x نزول می‌کند. در ضمن با توجه به تعریف (۴۲) یک تابع ثابت، تابعی است که هم صعودی و هم نزولی است. در شکل (۴۲) تابع f روی $[b,c]$ و $[d,e]$ صعودی است (اکیداً صعودی) و روی $[a,b]$، $[c,d]$ و $[e,h]$ نزولی (اکیداً

نزولی است)



شکل ۴۲

قضیه ۴۳. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر است.

الف) اگر برای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)>0$ آن گاه f روی $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

ب) اگر برای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)<0$ آن گاه f روی $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

اثبات. الف) فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در $[a,b]$ است و $x_1<x_2$. طبق قضیه مقدار میانگین، عدد c در (x_1,x_2) وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

اما $f'(c)>0$، بنابراین $f(x_2)-f(x_1)>0$ در نتیجه $f(x_1)<f(x_2)$. چون x_1 و x_2 دلخواه در $[a,b]$ انتخاب شده‌اند پس از تعریف (۴۲) نتیجه می‌شود که f روی $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

اثبات (ب) مشابه است.

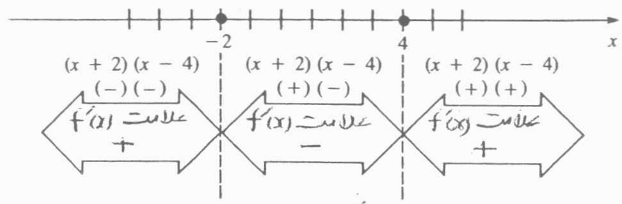
مثال ۱۰۰. فواصلی که تابع $f(x)=x^3-3x^2-24x$ صعودی است و فواصلی که f نزولی است را تعیین کنید.

حل. مشتق f عبارت است از

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

برای تعیین فواصلی که $f'(x)>0$ و $f'(x)<0$، باید به ترتیب نامعادله $(x+2)(x-4)>0$ و $(x+2)(x-4)<0$ را حل کنیم. یک روش حل این نامعادلات آزمودن علامت جبری

عامل های $(x+2)$ و $(x-4)$ روی فواصلی است که مقادیر بحرانی -2 و 4 در خط حقیقی به وجود می آورند. یعنی $(-\infty,-2]$ ، $[-2,4]$ ، $[4,\infty)$. شکل (۶۳) را ببینید.



شکل ۶۳

و سپس اطلاعات را در جدول زیر خلاصه می کنیم

فاصله	علامت $f'(x)$	$y = f(x)$
$(-\infty, -2)$	+	صعودی $(-\infty, -2]$
$(-2, 4)$	−	نزولی $[-2, 4]$
$(4, \infty)$	+	صعودی $[4, \infty)$

مثال ۱۰۱. فواصلی که روی آنها تابع $f(x)=x^{2/3}$ صعودی است و فواصلی که f روی آنها نزولی است را تعیین کنید.

حل. داریم

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

f' در ۰ تعریف نشده است. چون ۰ در دامنه f قرار دارد پس ۰ یک مقدار بحرانی است. حال می دانیم که برای $x<0$ مقدار $\sqrt[3]{x}<0$ و برای $x>0$ داریم $\sqrt[3]{x}>0$ پس اطلاعات را در جدول زیر خلاصه می کنیم

فاصله	علامت $f'(x)$	$y = f(x)$
$(-\infty, 0)$	−	نزولی $(-\infty, 0]$
$(0, \infty)$	+	صعودی $[0, \infty)$

اگر تابع f در یکی یا هر دو نقطه انتهایی $[a,b]$ ناپیوسته باشد آنگاه روی (a,b) ، $f'(x)>0$ (یا $f'(x)<0$) نتیجه می دهد که f صعودی (یا نزولی) روی فاصله باز (a,b) است.

تبصره ۶۴. عکس قسمتهای (الف) و (ب) قضیه (۶۳) لزوماً صحیح نیست. به عبارت دیگر، وقتی f روی یک فاصله صعودی (یا نزولی) است نمی‌توان نتیجه گرفت که $f'(x) > 0$ (یا $f'(x) < 0$). یک تابع می‌تواند، مثلاً، صعودی باشد اما مشتق‌پذیر نباشد.

۱۰.۴ رسم نمودار

۱.۱۰.۴ رسم نمودار و آزمون مشتق اول

از مطالب بیان شده در بخش‌های قبل، می‌توان قضیه زیر که به قضیه فرما معروف است را بیان کرد.

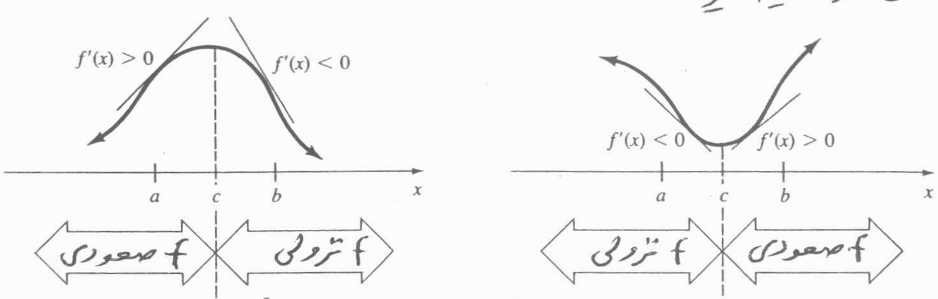
قضیه ۶۵. قضیه فرما. فرض کنید f در $x_0 \in D_f$ مشتق‌پذیر است. اگر f در x_0 دارای اکسترمم موضعی باشد آن‌گاه $f'(x_0) = 0$.

اثبات. تمرین

وقتی تابعی دارای یک اکسترمم موضعی (نسبی) باشد، این اکسترمم در نقاط بحرانی رخ می‌دهد. با یافتن نقاط بحرانی یک تابع، لیستی از امکان‌های ممکنه برای اکسترمم نسبی به دست می‌آوریم. در این بخش، از ایده‌های مطرح شده در دو بخش قبل استفاده کرده و آزمونی به دست می‌آوریم که بدانیم آیا نقاط بحرانی همان مختص x اکسترمم نسبی است. تکمیل بحث به بخش (۲.۱۰.۴) موکول می‌شود.

آزمون مشتق اول. فرض کنید f روی (a,b) مشتق‌پذیر است و c یک مقدار بحرانی تابع در این فاصله باشد. اگر برای هر $x \in (a,c)$، $f'(x) > 0$ و برای هر $x \in (c,b)$، $f'(x) < 0$ باشد آن‌گاه روی (a,b) نمودار همان گونه است که در شکل (۶۴) ـ الف نمایش داده شده است. یعنی $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی است. از طرف دیگر، اگر برای هر $x \in (a,c)$، $f'(x) < 0$

و برای هر $x\in(c,b)$ ، $f'(x)>0$ باشد، آنگاه نمودار تابع همان گونه است که در شکل (۶۴) - ب نمایش داده شده است، یعنی $f(c)$ یک می‌نیمم نسبی است. توضیحات فوق حالت خاصی از قضیه زیر است.



الف) ماکزیمم نسبی　　شکل ۶۴　　ب) می‌نیمم نسبی

قضیه ۶۶. آزمون مشتق اول برای اکسترمم نسبی. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر بجز احتمالاً در نقطه بحرانی c است.

الف) اگر برای $a<x<c$ ، $f'(x)>0$ و برای $c<x<b$ ، $f'(x)<0$ باشد آنگاه $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر برای $a<x<c$ ، $f'(x)<0$ و برای $c<x<b$ ، $f'(x)>0$ باشد آنگاه $f(c)$ یک می‌نیمم نسبی است.

ج) اگر $f'(x)$ روی $a<x<c$ و $c<x<b$ دارای یک علامت جبری باشد آنگاه $f(c)$ یک اکسترمم نسبی نیست.

مثال ۱۰۲. نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ را رسم کنید.

حل. مشتق اول تابع به صورت

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3) \qquad (۸۵)$$

است، پس تابع دارای مقادیر بحرانی ۱- و 3 می‌باشد. حال از آزمون مشتق اول برای یافتن فواصل صعود و نزول و اکسترمم نسبی تابع استفاده می‌کنیم. از (۸۵) دیده می‌شود که برای $-\infty<x<-1$ ، $f'(x)>0$ ، برای $-1<x<3$ ، $f'(x)<0$ ، درستی این مطلب

در شکل (۴۵) دیده می‌شود. از قسمت (الف) قضیه (۴۴) نتیجه می‌شود که $f(-1)=7$ یک ماکزیمم نسبی است، به‌طور مشابه برای $-1<x<3$ ، $f'(x)<0$ و برای $3<x<\infty$ ، $f'(x)>0$. بنابراین از قسمت (ب) قضیه (۴۴) نتیجه می‌شود که $f(3)=-25$ مینیمم نسبی است.

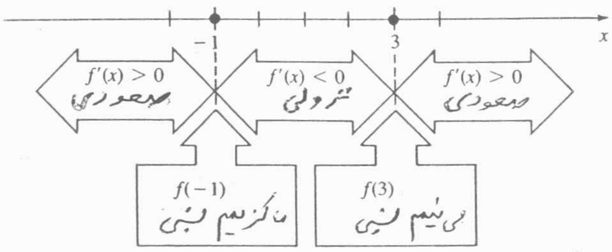
حال نمودار تابع دارای تلاقی $f(0)=2$ با محور y ها است. علاوه بر آن از معادله

$$x^3-3x^2-9x+2=0$$

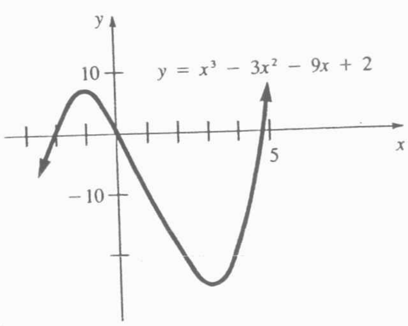
ریشه حقیقی -2 به دست می‌آید. پس تلاقی نمودار با محور x ها در $x=-2$ است. با تجزیه معادله داریم $(x+2)(x^2-5x+1)=0$ (از تقسیم معادله بر $x+2$ ، تجزیه حاصل می‌شود). طبق فرمول معادله درجه دوم، نمودار در دو نقطه

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2}\simeq 0.21,\qquad \frac{5+\sqrt{21}}{2}\simeq 4.79$$

محور x ها را قطع می‌کند. با استفاده از اطلاعات به دست آمده نمودار نشان داده شده در شکل (۴۶) نمایش داده شده است.



شکل ۴۵



شکل ۴۶

مثال ۱۰۲. نمودار $f(x)=x+\frac{1}{x}$ را رسم کنید.

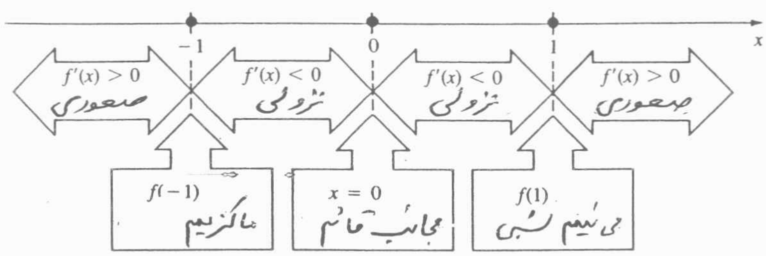
حل. با در نظر گرفتن تابع به صورت $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع با محورهای مختصات تلاقی ندارد و $x=0$ مجانب قائم است. نمودار نسبت به مبداء مختصات متقارن است، زیرا

$$f(-x)=-f(x)$$

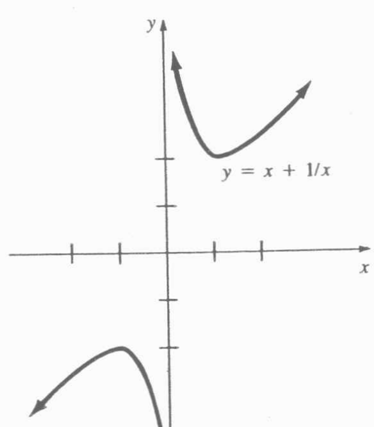
حال از مشتق تابع یعنی

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

نتیجه می‌شود که ۱- و ۱ مقادیر بحرانی تابع هستند. در شکل (۶۷) دیده می‌شود که برای $-\infty<x<-1$، $f'(x)>0$ و برای $-1<x<0$، $f'(x)<0$. بنابراین از آزمون مشتق اول نتیجه می‌گیریم که $f(-1)=-2$ یک ماکزیمم نسبی است. با توجه به تقارن، $f(1)=2$ یک می‌نیمم نسبی است. نمودار f در شکل (۶۸) داده شده است.



شکل ۶۷



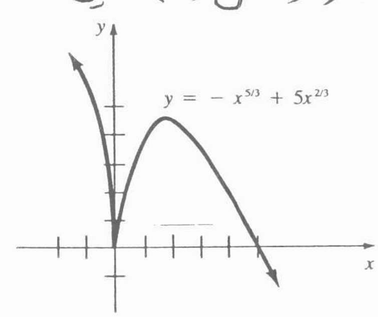
شکل ۶۸

مثال ۱۰۴. نمودار $f(x)=-x^{5/3}+5x^{2/3}$ را رسم کنید

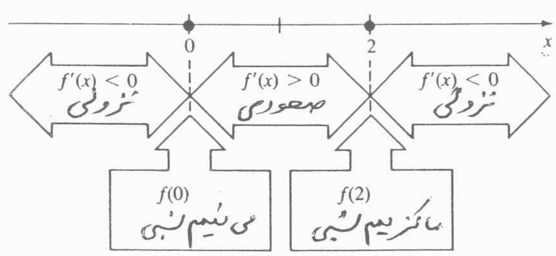
حل. مشتق تابع عبارت است از

$$f'(x)=-\frac{5}{3}x^{2/3}+\frac{10}{3}x^{-1/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(-x+2)$$

f' در ۰ موجود نیست اما ۰ در دامنه تعریف تابع است، زیرا $f(0)=0$. مقادیر بحرانی ۰ و 2 هستند. آزمون مشتق اول، شرح داده شده در شکل (۶۹)، نشان می‌دهد که $f(0)=0$ یک می‌نیمم نسبی $f(2)=-(2)^{5/3}+5(2)^{2/3}\simeq 4.76$ یک ماکزیمم نسبی است. نهایتاً با نوشتن تابع به صورت $f(x)=x^{2/3}(x+5)$ دیده می‌شود که نمودار محور xها را در نقاط ۰ و 5 قطع می‌کند. نمودار در شکل (۷۰) نمایش داده شده است.



شکل ۷۰



شکل ۶۹

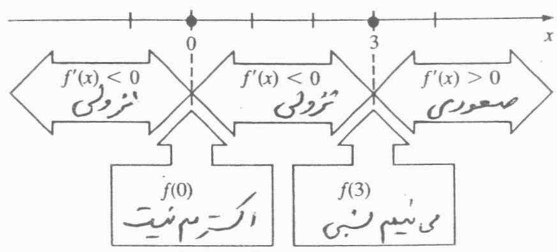
مثال ۱۰۵. نمودار $f(x)=x^4-4x^3+10$ را رسم کنید.

حل. مشتق تابع عبارت است از

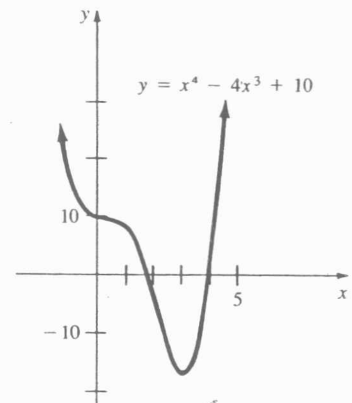
$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$$

پس ۰ و 3 مقادیر بحرانی تابع هستند. همان‌گونه که در شکل (۷۱) دیده می‌شود، f' دارای یک علامت جبری یکسان در هر دو فاصله $(-\infty,0)$ و $(0,3)$ است. بنابراین $f(0)=10$ اکسترمم نیست. در این حالت $f'(0)=0$ به معنای آن است که در نقطه $(0,10)$ تنها یک مماس افقی داریم. به هر حال از آزمون مشتق اول، دیده می‌شود که $f(3)=-17$ یک می‌نیمم نسبی است. نمودار تابع در شکل (۷۲) نشان داده شده است. نمودار تابع

نشان می دهد که $f(3)$ می نیمم مطلق نیز می باشد . دیده می شود که نمودار f دارای دو محل تلاقی با محور x ها است ، جوابهای حقیقی $x^4-4x^3+10=0$ واضح نیستند .



شکل ۷۱



شکل ۷۲

مثال ۱۰۶. نمودار $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+1}$ را رسم کنید .

حل . تلاقی با محور yها : $f(0)=-3$

تلاقی با محور xها : $f(x)=0 \Leftarrow x^2-3=0 \Leftarrow x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$

تقارن : محور y ها زیرا $f(-x)=f(x)$

مجانبهای قائم : چون $x^2+1\neq 0$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، مجانب قائم نداریم

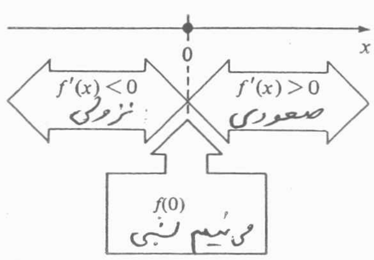
مجانبهای افقی : $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2+1}=1$ از تقارن داریم $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2+1}=1$. خط $y=1$ مجانب افقی

مشتق : $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+1)^2}$

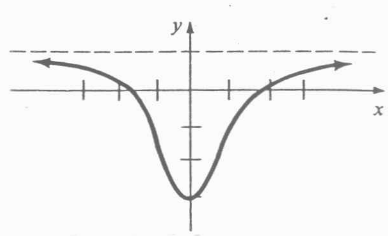
مقادیر بحرانی : $f'(x)=0 \Leftarrow 8x=0 \Leftarrow x=0$ تنها مقدار بحرانی تابع است .

آزمون مشتق اول : شکل (۷۳) ، $f(0)=-3$ می نیمم نسبی است .

نمودار : شکل (۷۴)

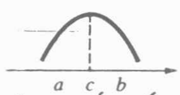
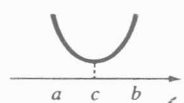
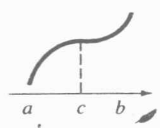
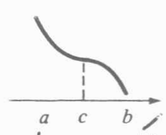


شکل ۷۳



شکل ۷۴

تبصره ۶۷. با خلاصه نویسی قضیه (۶۶) می توانیم به سادگی برای رسم و بررسی نمودارها عمل کنیم. معمولاً تنظیم جدولی به فرم زیر کمک کننده است.

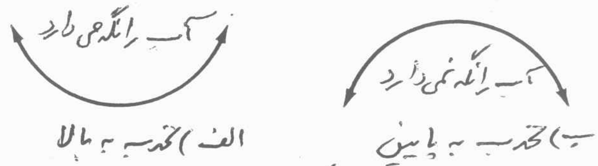
آزمون مشتق اول			
مقدار بحرانی	فاصله	علامت $f'(x)$ روی فاصله	نتیجه گیری
c	(a, c) (c, b)	$+$ $-$	 $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی
c	(a, c) (c, b)	$-$ $+$	 $f(c)$ یک مینیمم نسبی
c	(a, c) (c, b)	$+$ $+$	 اکسترمم ندارد
c	(a, c) (c, b)	$-$ $-$	 اکسترمم ندارد

۲.۱۰.۴ رسم نمودار و آزمون مشتق دوم

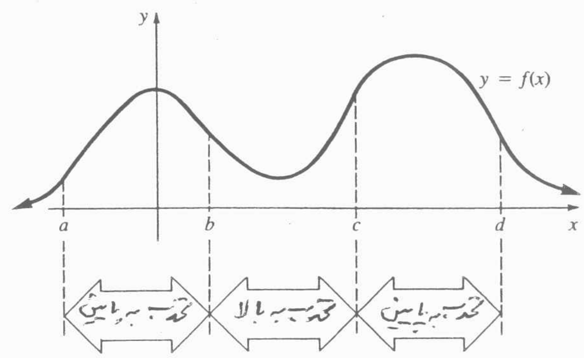
در این بخش، هدف کلی ما وابسته نمودن مفهوم محدب یک نمودار با مشتق دوم یک تابع است.

محدب ۶۸. احتمالاً ایده های شهودی از مفهوم محدب را داریم. در شکل (۷۵) - الف و (۷۵) - ب شکل هندسی محدب به سمت بالا و محدب به سمت پایین نشان داده شده است. اغلب به شکلی که دارای محدب به سمت بالا است کوزه آب رانگه می دارد و به شکلی که دارای محدب به سمت پایین است کوزه آب رانگه نمی دارد. در شکل (۷۶) نمودار تابعی آورده شده است که در

فاصله (b,c) دارای تحدب به سمت بالا است و در فواصل (a,c) و (c,d) دارای تحدب به سمت پایین است.



شکل ۷۵



شکل ۷۶

تعریف ۶۹. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر روی (a,b) است.

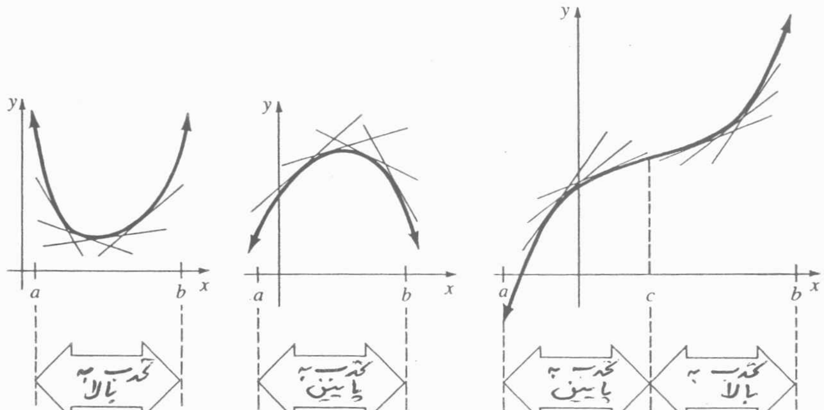
الف) اگر f' یک تابع صعودی روی (a,b) باشد، آنگاه نمودار f روی فاصله (a,b) دارای تحدب به سمت بالا است.

ب) اگر f' یک تابع نزولی روی (a,b) باشد، آنگاه نمودار f روی فاصله (a,b) دارای تحدب به سمت پایین است.

به عبارت دیگر اگر شیب خط مماس روی (a,b) صعود (نزول) کند آنگاه نمودار تابع دارای تحدب به سمت بالا (پایین) روی فاصله است. تمثالی تعریف (۶۹) در شکل (۷۷) نمایش داده شده است. به عبارت معادل، نمودار تابع محدب به سمت بالا است (روی یک فاصله) هرگاه نمودار در هر نقطه از فاصله بالای خط مماس در نقطه باشد، نمودار دارای تحدب به سمت پایین روی یک فاصله است هرگاه نمودار زیر خطوط مماس در نقاط فاصله باشد.

در بخش (۹.۴) دیدیم که علامت جبری مشتق یک تابع مشخص کننده صعود یا نزول تابع روی یک فاصله است. حال اگر تابع مشتق یعنی f' را با g نمایش دهیم، در صورت وجود g' علامت g' مشخص کننده صعود یا نزول f' است. این علامت $g'=f''$ مشخص کننده

صعودی یا نزولی تابع f' است. به عنوان مثال اگر روی (a,b) داشته باشیم $f''(x) > 0$ آن گاه نمودار f' صعودی و در نتیجه نمودار f دارای تحدب به سمت بالا است. بنابراین آزمون زیر برای تحدب تابع f را داریم.



الف) f' صعودی از $-$ به $+$

ب) f' نزولی از $+$ به $-$

ج) f' نزولی روی (a,c)
f' صعودی روی (c,b)

شکل ۲۷

قضیه ۷۰. آزمون تحدب. فرض کنید f تابعی است که f'' روی (a,b) موجود باشد.

الف) اگر برای هر x در (a,b) داشته باشیم $f''(x) > 0$ آن گاه نمودار f روی (a,b) دارای تحدب به سمت بالا است.

ب) اگر برای هر x در (a,b) داشته باشیم $f''(x) < 0$ آن گاه نمودار f روی (a,b) دارای تحدب به سمت پایین است.

مثال ۱۰۷. فواصلی که نمودار تابع $f(x) = -x^3 + \frac{9}{2}x^2$ دارای تحدب به سمت بالا و فواصلی که دارای تحدب به سمت پایین است، را به دست آورید.

حل. از

$$f'(x) = -3x^2 + 9x$$

$$f''(x) = -6x + 9 = 6\left(-x + \frac{3}{2}\right)$$

دیده می‌شود که برای $6\left(-x+\frac{3}{2}\right) > 0$ یا $x < \frac{3}{2}$، $f''(x) > 0$ است و وقتی $x > \frac{3}{2}$.

است، $f''(x)<0$ می‌باشد. بنابراین از قضیه (۷۰) نتیجه می‌شود که نمودار f روی $(-\infty,\frac{3}{2})$ دارای تحدب به سمت بالا و روی $(\frac{3}{2},\infty)$ دارای تحدب به سمت پایین است.

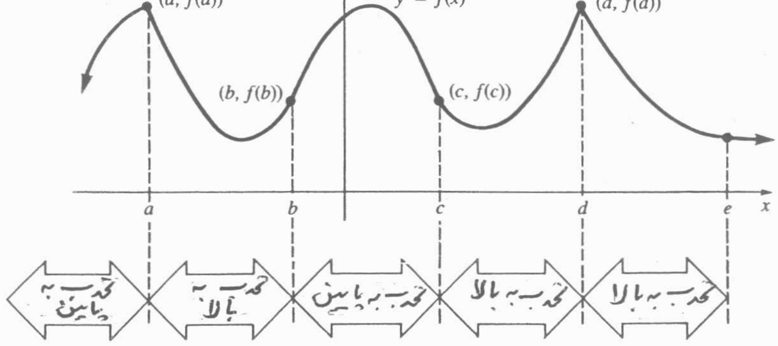
نقطه عطف ۷۱. نمودار تابع در شکل (۱۰۷) در نقطه متناظر به $x=\frac{3}{2}$ دارای تغییر تحدب است. وقتی x از $\frac{3}{2}$ صعود می‌کند نمودار f در نقطه $(\frac{3}{2},\frac{27}{4})$ دارای تغییر از تحدب به بالا به تحدب به طرف پایین است. نقطه‌ای روی نمودار تابع f که در آن تحدب تابع تغییر می‌کند (از بالا به پایین) و برعکس را نقطه عطف تابع نامیم.

تعریف ۷۲. فرض کنید f در c پیوسته است. نقطه $(c,f(c))$ را نقطه عطف تابع نامیم هرگاه فاصله باز (a,b) شامل c وجود داشته باشد به طوری که نمودار f یا

الف) محدب به طرف بالا روی (a,c) و محدب به پایین روی (c,b) باشد یا

ب) محدب به طرف پایین روی (a,c) و محدب به بالا روی (c,b) باشد.

شکل (۷۸) نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد که دارای سه نقطه عطف است: نقاط $(a,f(a))$، $(b,f(b))$ و $(c,f(c))$. توجه کنید که $(d,f(d))$ یک نقطه عطف نیست زیرا نمودار تابع روی فواصل (c,d) و (d,e) دارای تحدب به سمت بالا است.



شکل ۷۸

به عنوان نتیجه‌ای از تعریف‌های (۶۹) و (۷۲) مشاهده می‌کنیم که:
یک نقطه عطف $(c, f(c))$ در عدد c یی رخ می‌دهد که $f''(c)=0$ یا $f''(c)$ وجود ندارد.

مثال ۱۰۸. تمام نقاط عطف تابع $f(x)=-x^3+x^2$ را به دست آورید.

حل. مشتق‌های اول و دوم f عبارتند از:

$$f'(x)=-3x^2+2x, \qquad f''(x)=-6x+2$$

چون در $x=\frac{1}{3}$، $f''(x)=0$، پس نقطه $(\frac{1}{3}, \frac{2}{27})$ تنها امکان برای نقطه عطف است.
از طرفی

$$f''(x)=6(-x+\tfrac{1}{3})>0 \qquad x<\tfrac{1}{3}$$
$$f''(x)=6(-x+\tfrac{1}{3})<0 \qquad x>\tfrac{1}{3}$$

پس نمودار f روی $(-\infty, \frac{1}{3})$ دارای تحدب به سمت بالا و روی $(\frac{1}{3}, \infty)$ تحدب به سمت پایین است. بنابراین $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$ یا $(\frac{1}{3}, \frac{2}{27})$ یک نقطه عطف است.

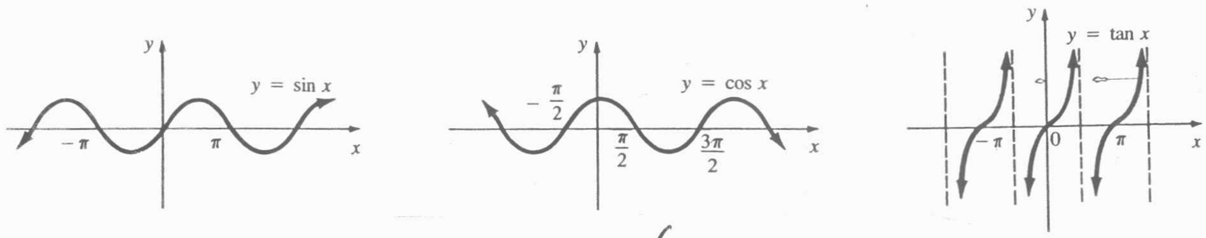
مثال ۱۰۹. نقاط عطف تابع $f(x)=5x-(x-4)^{1/3}$ را به دست آورید.

حل. از

$$f'(x)=5-\frac{1}{3}(x-4)^{-2/3}, \qquad f''(x)=\frac{2}{9}(x-4)^{-5/3}$$

نتیجه می‌شود که f'' در 4 موجود نیست ($4 \in D_f$). چون برای $x<4$ داریم $f''(x)<0$ و برای $x>4$ داریم $f''(x)>0$ پس نمودار تابع روی $(-\infty, 4)$ دارای تحدب به پایین و روی $(4, \infty)$ دارای تحدب به بالا است. بنابراین $(4, f(4))$ یا $(4, 20)$ یک نقطه عطف است.

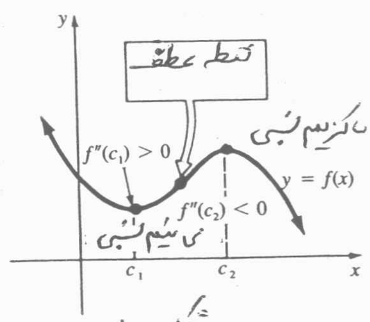
مثال ۱۱۰. با ملاحظه نمودارهای $y=\sin x$، $y=\cos x$ و $y=\tan x$ در شکل (۷۹) به نظر می‌رسد که محل تلاقی نمودارها با محور x ها برای هر یک از این توابع، می‌توانند نقاط عطف باشند. این ادعا را اثبات یا رد کنید.



شکل (۷۹)

تحدب یک نمودار با مفهوم اکسترمم‌های نسبی نمودار می‌توانند به هم وابسته باشند، این مطلب در بحث بعد که آن را آزمون مشتق دوم نامیده‌ایم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

آزمون مشتق دوم ۷۳. اگر c یک مقدار بحرانی تابع $y=f(x)$ باشد و مثلاً داشته باشیم $f''(c)>0$ آن‌گاه نمودار f روی فاصله‌ای مانند (a,b) شامل c دارای تحدب به سمت بالا است. در این صورت، لزوماً $f(c)$ یک می‌نیمم نسبی است. به طور مشابه اگر در یک مقدار بحرانی باشد c، $f''(c)<0$ آن‌گاه $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی است. این مطلب به عنوان آزمون مشتق دوم در شکل (۸۰) نمایش داده شده است.



شکل ۸۰

قضیه ۷۴. آزمون مشتق دوم برای اکسترمم نسبی. فرض کنید f تابعی است که f'' آن روی (a,b) شامل عدد بحرانی c موجود است.

الف) اگر $f''(c)>0$ باشد آن‌گاه $f(c)$ یک می‌نیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(c)<0$ باشد آن‌گاه $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی است.

ممکن است این سؤال پیش آید که چرا به آزمون دیگری برای اکسترمم نسبی نیاز داریم درصورتی که آزمون مشتق اول در اختیار ما است؟ اگر تابع مورد نظر چندجمله‌ای باشد محاسبه مشتق دوم آن ساده است، با توجه به قضیه (۷۴) تنها نیاز به تعیین علامت f'' در مقادیر بحرانی است. این کار را با محاسبه f' در چپ و راست مقادیر بحرانی و تعیین علامت آن مقایسه کنید. از طرف دیگر، اگر f' به سادگی بدست نیاید، این عمل می‌تواند سخت باشد. درحالی که اگر تابع به صورت حاصل‌ضرب، خارج قسمت، توان و غیره باشد استفاده از قضیه (۷۴) طولانی و خسته‌کننده است. قضیه‌های (۷۰) و (۷۴) هریک دارای مزیت‌ها و معایب خاص خود می‌باشند.

مثال ۱۱۱. نمودار $f(x)=x^4-x^2$ را رسم کنید.

حل.

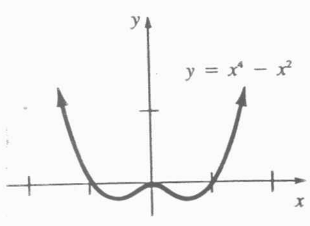
$$f'(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$$

$$f''(x)=12x^2-2$$

مقادیر بحرانی f اعداد ۰، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. آزمون مشتق دوم در جدول زیر خلاصه شده است.

x	علامت $f''(x)$	$f(x)$	نتیجه‌گیری
0	−	0	rel. max.
$\sqrt{2}/2$	+	−1/4	rel. min.
$-\sqrt{2}/2$	+	−1/4	rel. min.

حال از $f(x)=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$ نتیجه می‌شود که نمودار f از نقاط $(0,0)$، $(-1,0)$ و $(1,0)$ می‌گذرد. علاوه بر آن، چون f یک چندجمله‌ای با توانهای زوج است، نتیجه می‌گیریم که نمودار متقارن نسبت به محور yها است. در شکل (۸۱)، دیده می‌شود که نمودار دارای دو نقطه عطف $(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{5}{36})$ و $(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{5}{36})$ است.



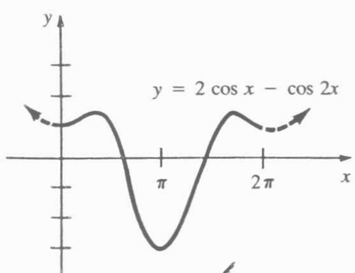
شکل ۸۱

مثال ۱۱۲. نمودار $f(x)=2\cos x-\cos 2x$ را رسم کنید.

حل. $f'(x)=-2\sin x+2\sin 2x$

$$f''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$$

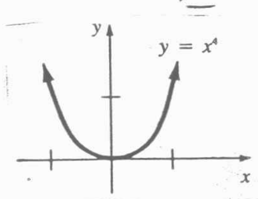
با استفاده از اتحاد $\sin 2x=2\sin x\cos x$ معادله $f'(x)=0$ منجر به $(\sin x)(1-2\cos x)=0$ می‌شود. جواب‌های $\sin x=0$ به صورت $0,\pm\pi,\pm 2\pi,\dots$ و جواب‌های $\cos x=\frac{1}{2}$ به صورت $\pm\frac{\pi}{3},\pm\frac{5\pi}{3},\dots$ است. اما چون f دارای دوره تناوب 2π است کافی است آن مقادیر بحرانی را در $[0,2\pi]$ یعنی $0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3},2\pi$ را در نظر بگیریم. آزمون مشتق دوم را برای این مقادیر بکار برده و نتایج در جدول زیر خلاصه شده‌اند. نمودار f در شکل (۸۲) نمایش داده شده است.



شکل ۸۲

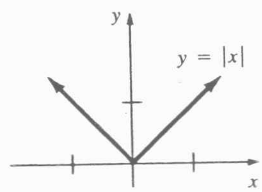
x	علامت $f''(x)$	$f(x)$	نتیجه گیری
0	+	1	rel. min.
$\pi/3$	−	$\frac{3}{2}$	rel. max.
π	+	−3	rel. min.
$5\pi/3$	−	$\frac{3}{2}$	rel. max.
2π	+	1	rel. min.

تبصره ۷۵. الف) نباید از قضیه (۷۴) این برداشت شود که وقتی نموداری دارای تحدب به طرف بالا (به طرف پایین) روی (a,b) است آن گاه برای تمام xها در فاصله $f''(x)>0$ (یا $f''(x)<0$). شرایطی که در قسمت (الف) و (ب) قضیه (۷۴) آمده است کافی است اما لازم نیست. برای مثال واضح است که در شکل (۸۳) و تعریف (۶۹) تابع دوبار مشتق پذیر $f(x)=x^4$ دارای تحدب به سمت بالا است اما در هر فاصله که شامل مبدا باشد، اما از $f''(x)=12x^2$ داریم $f''(0)=0$.

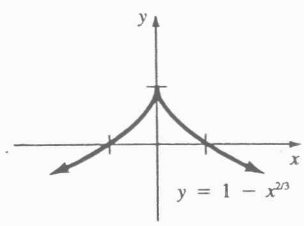


شکل ۸۳

ب) مفاهیم شهودی "آب نگه می دارد" و "آب می ریزد" مترادف با مفاهیم تحدب به سمت بالا و تحدب به سمت پایین نیستند. در شکل های (۸۴) و (۸۵) نمودارهای توابع $f(x)=|x|$ روی $(-1,1)$ و $g(x)=1-x^{2/3}$ روی $(-1,1)$ به ترتیب "آب نگه می دارد" و "آب می ریزد" می باشند. اما نمی توان به هیچ کدام از آنها تحدب را نسبت داد زیرا f و g روی فاصله مشتق پذیر نیستند. علاوه بر آن توابع مشتق پذیری وجود دارند که نمودارهای آنها دارای تحدب نیست. به عنوان تمرین، چنین توابعی را بیابید.

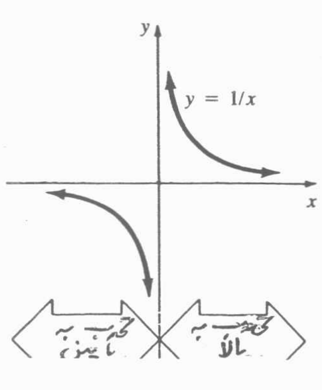


شکل ۸۴



شکل ۸۵

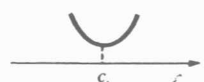
ج) اگر $(c,f(c))$ یک نقطه عطف باشد آنگاه $f''(c)=0$ یا $f''(c)$ وجود ندارد. عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست. یعنی نمی توان از این واقعیت که $f''(c)=0$ یا $f''(c)$ وجود ندارد نتیجه گرفت که $(c,f(c))$ یک نقطه عطف است. برای مثال مشتق دوم تابع $f(x)=x^4$ در $x=0$ صفر است. در شکل (۸۳) دیده می شود که $(0,f(0))$ نقطه عطف نیست زیرا منحنی تغییر تحدبی روی $(0,\infty)$ و روی $(-\infty,0)$ ندارد. علاوه بر آن، برای $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ و مشتق دوم در $x=0$ وجود ندارد و برای $x<0$ داریم $f''(x)<0$ و برای $x>0$ داریم $f''(x)>0$. بهرحال ۰ مختص x نقطه عطف نیست زیرا f در این مقدار پیوسته نیست. شکل (۸۶)



شکل ۸۶

د) نکته مهم دیگری که باید توجه کرد این است که آزمون مشتق دوم بیان نمی‌کند که اگر $f(c)$ یک اکسترمم نسبی باشد آنگاه حتماً یا $f''(c)>0$ یا $f''(c)<0$ است. در شکل (۸۵) دیده می‌شود که $f(x)=1-x^{2/3}$ دارای یک ماکزیمم مطلق در ۰ است اما $f''(0)$ موجود نیست. به طور مشابه $f(x)=x^4$ دارای یک مینیمم مطلق در ۰ است اما $f''(0)=0$. بنابراین آزمون مشتق دوم منجر به نتیجه‌ای نمی‌شود. وقتی آزمون مشتق دوم نتیجه‌ای نمی‌دهد باید از آزمون مشتق اول استفاده کرد.

ه) در نتیجه‌گیری‌ها، قضیه (۷۴) و تبصره قبل را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد.

آزمون مشتق دوم		
نتیجه‌گیری	f'' در مقدار بحرانی	مقدار بحرانی
 $f(c)$ یک مینیمم نسبی	+	c
 $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی	−	c
بدون نتیجه‌گیری	0	c

۳.۱۰.۴ برخی از کاربردهای اکسترمم

در علوم، مهندسی و اقتصاد بیشتر به دنبال ماکزیمم و مینیمم مقدار توابع هستند. به عنوان مثال، یک شرکت معمولاً به دنبال ماکزیمم کردن سود و مینیمم کردن هزینه‌ها است. اگر به سوپرمارکت رفتید، این آزمایش را انجام دهید: با استفاده از یک خط‌کش کوچک ارتفاع و قطر همه قوطی‌هایی که شامل $300\ mm^3$ مواد غذایی هستند را اندازه‌گیری کنید. واقعیت این است که تمام این قوطی‌ها حجم یکسان دارند یک موضوع تصادفی نیست زیرا ابعاد خاصی وجود دارند که مقدار مثلاً آهن استفاده شده را مینیمم می‌کند و علاوه بر آن هزینه‌های ساخت را برای شرکت تولیدکننده مینیمم می‌کند. در روش تکامل، بسیاری از اتومبیل‌هایی که به اقتصادی

بودن معروفند، ظاهر یکسانی دارند. این موضوع ساده‌ای نیست که یک کمپانی تولیدکننده اتومبیل از موفقیت کمپانی های رقیب تقلید کند. اما مهندسان برای یک حجم داده شده، به دنبال طراحی هستند که مقدار مواد به کار برده شده را به حداقل برسانند.

نکات مهم: در مثال ها و مسائل بعد یا تابعی به ما داده شده است یا باید از درک لغات و مفاهیم تابعی که به دنبال ماکزیمم یا می نیمم کردن آن هستیم را بسازیم. در این قسمت هفت مرحله مهم در حل مسئله min - max را آورده ایم.

1) مسئله را با حوصله بخوانید و برای یافتن پاسخ عجله نکنید.

2) اگر لازم بود شکلی بکشید.

3) متغیرها را معرفی کنید و هر رابطه ای بین آنها را یادداشت کنید.

4) با استفاده از متغیرهای ضروری تابعی بسازید که قرار است می نیمم یا ماکزیمم شود. اگر بیشتر از یک متغیر استفاده شده است، سعی کنید رابطه ای بین متغیرها بیابید که تابع را به یک تابع یک متغیره تبدیل کند.

5) فاصله ای که تابع در آن تعریف شده است را یادداشت کرده و همه مقادیر بحرانی را بیابید.

6) اگر تابع مورد نظر که قرار است ماکزیمم یا می نیمم آن را به دست آورید، پیوسته است و روی فاصله بسته تعریف شده باشد $[a,b]$، آن گاه اکسترمم های نقاط انتهایی را امتحان کنید. اگر اکسترمم مورد نظر در نقاط انتهایی نباشد، باید مقادیر بحرانی را در فاصله باز (a,b) امتحان کنید و اکسترمم در این بازه رخ می دهد.

7) اگر تابع مورد نظر که قرار است ماکزیمم یا می نیمم آن را به دست آورید، بر یک فاصله باز (یا فاصله ای که بسته نیست) تعریف شده است، آن گاه آزمون مشتق اول باید برای هر مقدار بحرانی انجام شود.

در اولین مثال، مراحل کار را شماره گذاری کرده ام.

مثال ۱۱۳. دو عدد نامنفی بیابید که جمع آنها ۱۵ باشد و حاصل ضرب یکی با مجذور دیگری

ماکزیمم شود.

حل. (2) رسم یک شکل امکان پذیر نیست.

3) فرض کنید x و y دو عدد نامنفی مورد نظر باشند یعنی $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و $x+y=15$.

4) فرض کنید P نشان دهنده حاصل ضرب مورد نظر است.

$$P = xy^2$$

از (3) داریم $y=15-x$ پس P برحسب x تنها به صورت زیر است.

$$P(x) = x(15-x)^2$$

5) تابع $P(x)$ تنها برای $0 \leq x \leq 15$ تعریف شده است. زیرا اگر $x>15$ آنگاه شرط $y=15-x$ نتیجه می‌دهد که $y<0$ و این تناقض است، حال طبق قانون حاصل ضرب

$$P'(x) = x.\,2(15-x)(-1) + (15-x)^2$$
$$= (15-x)(15-3x)$$

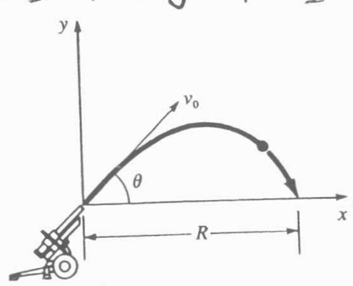
تنها نقطه بحرانی در $(0,15)$ برابر $x=5$ است.

6) در نقاط انتهایی داریم $P(0) = P(15) = 0$ که مقدار می‌نیمم حاصل ضرب است، بنابراین $P(5) = 5(10)^2 = 500$ مقدار ماکزیمم است. پس دو عدد نامنفی 5 و 10 می‌باشند.

مثال ۱۱۴. در فیزیک نشان داده می‌شود که اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، بُرد افقی R یک پرتابه توسط

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta, \qquad 0<\theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad (81)$$

به دست می‌آید، که در آن v_0 سرعت اولیه ثابت، g جاذبه زمین و θ زاویه پرتاب است. شکل (۸۷)

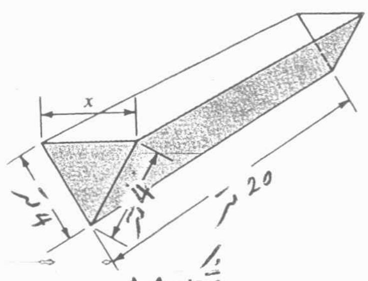


شکل ۸۷

از $\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g}(2\cos 2\theta) = 0$ نتیجه می‌شود $\cos 2\theta = 0$ یا $2\theta = \frac{\pi}{2}$، بنابراین تنها مقدار بحرانی در $(0, \frac{\pi}{2})$ برابر $\theta = \frac{\pi}{4}$ است. همان‌گونه که در مثال (۱۱۳) مشاهده شد، نقاط انتهایی می‌نیمم برد را نتیجه می‌دهند، $R(0) = R(\frac{\pi}{2}) = 0$ پس $R(\frac{\pi}{4}) = \frac{v_0^2}{g}$ ماکزیمم برد است. به عبارت دیگر، اگر پرتابه با زاویه 45° پرتاب شود ماکزیمم برد را خواهیم داشت.

مثال ۱۱۵. یک آبشخور دارای طول 20 متر است و انتهای آن به شکل مثلث متساوی الساقین است که اضلاع مساوی آنها برابر 4 متر می‌باشد. ابعاد ضلع سوم مثلث‌ها را چنان تعیین کنید که حجم آبشخور ماکزیمم باشد.

حل. اطلاعات داده شده در شکل (۸۸) آورده شده است.



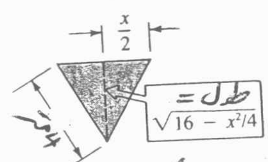
شکل ۸۸

حجم آبشخور برابر با

$$V = (\text{مساحت مثلث انتهایی}) \times (\text{طول})$$

از شکل (۸۹) و قضیه فیثاغورث، مساحت مثلث برابر $\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}$ است. پس حجم به عنوان تابعی از x به صورت

$$V(x) = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}\right)(20) = 5x\sqrt{64 - x^2}$$



شکل ۸۹

علاوه بر آن، $V(x)$ روی فاصله بسته $[0, 8]$ تعریف شده است. با بدست آوردن مشتق داریم

$$V'(x) = -10\frac{x^2 - 32}{(64 - x^2)^{1/2}}$$

حال برای $x = \pm 4\sqrt{2}$ داریم $V'(x) = 0$. پس تنها مقدار بحرانی V در $(0, 8)$ برابر $4\sqrt{2}$ است. چون $V(0) = V(8) = 0$ پس ماکزیمم حجم وقتی حاصل می‌شود که $x = 4\sqrt{2}$ باشد و مقدار حجم ماکزیمم $V(4\sqrt{2}) = 160\ m^3$ است.

تبصره ۷۷. غالباً یک مسئله چندین راه حل دارد، در مثال (۱۱۴)، می‌توان فقط تابع P را که به صورت حاصل ضرب است برحسب y به دست آوریم.

$$P = xy^2 = (15 - y)y^2 = 15y^2 - y^3$$

و P' را می‌توان بدون استفاده از قانون حاصل ضرب به دست آورد.

مثال ۱۱۶. ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت، محاط در بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ را به دست آورید.

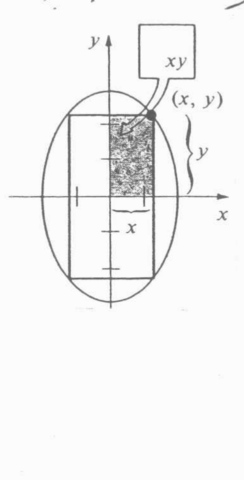
حل. همان گونه که در شکل (۹۰) دیده می‌شود، می‌توانیم قسمتی از مستطیل مورد نظر را که در ناحیه اول است و دارای مختصات (x, y) واقع بر بیضی را اختیار کرد. پس مساحت مستطیل برابر $A = 4xy$ است، اما از حل $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ برای y داریم

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

بنابراین مساحت به عنوان تابعی از x توسط

$$A(x) = 6x\sqrt{4 - x^2}$$

برای $0 \le x \le 2$ داده می‌شود. $A(x)$ دارای ماکزیمم است که در مقدار بحرانی $\sqrt{2}$ رخ می‌دهد. بنابراین ابعاد مستطیل محاط شده با بیشترین مساحت برابر $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ است و مساحت متناظر $A = 12$ است.



شکل ۹۰

مثال ۱۱۷ . نقطه‌ای در ربع اول روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ را که تا $(2,4)$ نزدیکترین فاصله را داشته باشد به دست آورید.

حل. فرض کنید (x,y) ، $x>0$ ، $y>0$ نقطه‌ای روی دایره است که فاصله آن تا نقطه $(2,4)$ کمترین است. شکل (۹۱) را ببینید. از فرمول فاصله داریم

$$d=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$$

یا $d^2=(x-2)^2+(y-4)^2$. اگر d^2 می‌نیمم شود آنگاه d نیز می‌نیمم خواهد بود. قرار می‌دهیم $D=d^2$. با بسط $(x-2)^2$ و $(y-4)^2$ و استفاده از $x^2+y^2=1$ (یا با استفاده از $y=\sqrt{1-x^2}$) داریم

$$D(x)=x^2-4x+4+(1-x^2)-8\sqrt{1-x^2}+16$$
$$=-4x-8\sqrt{1-x^2}+21 \qquad 0\leq x\leq 1$$

با مشتق‌گیری داریم

$$D'(x)=-4-4(1-x^2)^{-1/2}(-2x)=\frac{-4\sqrt{1-x^2}+8x}{\sqrt{1-x^2}}$$

بعد از ساده کردن، نتیجه می‌شود که $\frac{1}{\sqrt5}$ یک جواب معادله $D'(x)=0$ در فاصله $[0,1]$ است.

چون $D(0)=13$ ، $D(\frac{1}{\sqrt5})=21-20/\sqrt5\simeq 12{,}06$ و $D(1)=17$. پس D و در نتیجه d برای $x=\frac{1}{\sqrt5}$ می‌نیمم است، یعنی نقطه $(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})$ روی دایره دارای کمترین فاصله تا نقطه $(2,4)$ است.