فصل ۵. انتگرال - یادآوری و تکمیل

۵.۱ تابع اولیه

در فصل (۴) تنها مسئله اولیه زیر را در نظر گرفتیم:

تابع f داده شده است، مشتق آن یعنی f' را به دست آورید.

در این فصل و فصل های بعد از آن، مسئله زیر را در نظر می گیریم:

برای تابع f داده شده، تابعی بیابید که مشتق آن همان تابع f باشد.

یعنی برای تابع f داده شده، می خواهیم تابع F را به دست آوریم به طوری که برای هر x در فاصله ای، $F'(x)=f(x)$.

تعریف ۱. تابع اولیه. تابع F را یک تابع اولیه f روی فاصله I نامیم هرگاه

$$F'(x)=f(x), \qquad x\in I$$

مثال ۱. یک تابع اولیه $f(x)=2x$، تابع $F(x)=x^2$ است، زیرا $F'(x)=2x=f(x)$.

همواره بیش از یک تابع اولیه برای تابع f وجود دارد. برای مثال، در مثال (۱) توابع $F_1(x)=x^2-1$ و $F_2(x)=x^2+10$ نیز توابع اولیه $f(x)=2x$ هستند. زیرا

$$F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$$

لزوماً، اگر F یک تابع اولیه تابع f باشد آن گاه $G(x)=F(x)+C$ برای هر ثابت C، نیز تابع اولیه است. زیرا

$$G'(x)=\frac{d}{dx}(F(x)+C)=F'(x)+0=F'(x)=f(x)$$

بنابراین $F(x)+C$ نشان دهنده مجموعه توابعی است که هرکدام دارای مشتق $f(x)$ هستند. در واقع $F(x)+C$ کلی ترین تابع اولیه $f(x)$ است.

قضیه ۲ . اگر $G'(x)=F'(x)$ برای تمام xها در فاصله $[a,b]$ آنگاه عدد ثابت C وجود دارد به طوری که $\forall x\in[a,b],\ G(x)=F(x)+C$.

اثبات . قرار دهید $g(x)=G(x)-F(x)$. چون $G'(x)=F'(x)$ پس

$$g'(x)=G'(x)-F'(x)=0 \qquad x\in[a,b]$$

حال اگر x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در $[a,b]$ باشند که $a\le x_1<x_2\le b$ آنگاه از مقدار میانگین، عدد k در فاصله باز (a,b) وجود دارد به طوری که

$$g'(k)=\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

یا

$$g(x_2)-g(x_1)=g'(k)(x_2-x_1)$$

اما برای هر $x\in[a,b]$ داریم $g'(x)=0$ بالاخص $g'(k)=0$ بنابراین

$$g(x_2)-g(x_1)=0$$

یعنی $g(x_1)=g(x_2)$. چون x_1 و x_2 دلخواه اما مساوی اند پس تابع g یک تابع ثابت است. مثلا $g(x)=C$ بنابراین

$$G(x)-F(x)=C \Rightarrow G(x)=F(x)+C$$

مثال ۲ . الف) کلی ترین تابع اولیه $f(x)=2x$ به صورت $G(x)=x^2+C$ است .

ب) کلی ترین تابع اولیه $f(x)=2x+5$ به صورت $G(x)=x^2+5x+C$ است .

نماد انتگرال نامعین ۳ . اگر $F'(x)=f(x)$ ، کلی ترین تابع اولیه f توسط

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

نمایش داده می شود. نماد $\int$ که توسط لایب نیتز ارائه شد یک علامت انتگرال نامیده می شود. مفهوم $\int f(x)dx$ را انتگرال نامعین $f(x)$ نسبت به x نامیم و تابع $f(x)$ را انتگرالده گوئیم. روش یافتن یک تابع اولیه را پاد دیفرانسیل یا انتگرال گیری نامیم. عدد C را ثابت انتگرال گیری

گوییم. همان گونه که $\frac{d}{dx}(\ )$ نشان دهنده مشتق گیری نسبت به x است، نماد $\int (\ )\,dx$ نشان دهنده انتگرال گیری نسبت به x است.

انتگرال نامعین یک توان ۴. وقتی از تابع x^n مشتق می‌گیریم، ضریب مشتق n و توان آن $n-1$ است. برای یافتن تابع اولیه x^n، قانون مشتق گیری را بر می‌گردانیم یعنی توان یک واحد اضافه شده و بر توان جدید $n+1$ تقسیم می‌کنیم. انتگرال نامعین توان، وارون قانون توانی مشتق است. یعنی

اگر n یک عدد گویا بوده و $n\neq -1$ داریم

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (1)$$

اثبات. از قضیه مشتق تابع توانی (۱۴.۴) داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = (n+1)\,\frac{x^{(n+1)-1}}{n+1} + 0$$
$$= x^n$$

نکته ۵. رابطه داده شده در (۱) برای حالتی که $n=-1$ برقرار نیست. فعلاً تابعی که مشتق آن $\frac{1}{x} = x^{-1}$ شود را نداریم، در فصل های بعد به آن خواهیم پرداخت.

مثال ۳. مطلوب است (الف) $\int x^6 dx$ و (ب) $\int \frac{1}{x^5} dx$

حل. با $n=6$ از (۱) داریم

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$$

ب) $\frac{1}{x^5}$ را به صورت x^{-5} نوشته و با $n=-5$ از (۱) داریم

$$\int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$$
$$= -\frac{1}{4x^4} + C$$

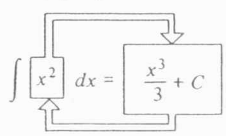
مثال ۴. مطلوب است $\int \sqrt{x}\, dx$.

حل. از $\sqrt{x} = x^{1/2}$ و فرمول (۱) داریم

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx$$
$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

نکته ۴. باید همواره بدانیم که نتیجه انتگرال گیری را می توان با مشتق گیری امتحان کرد برای مثال

انتگرال گیری



امتحان با مشتق گیری

مثال ۵. مطلوب است $\int dx$.

حل. چون $\int dx = \int 1\,dx$ و چون $\frac{d}{dx}(x+C) = 1+0 = 1$ پس

$$\int dx = x + C$$

نتیجه را می توان با $n=0$ در فرمول (۱) بدست آورد.

توابع اولیه گیری نیز دارای خواص مشابه با انتگرال معین بیان شده در فصل (۲) است.

قضیه ۷. اگر $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = g(x)$ آنگاه

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$
$$= F(x) + G(x) + C$$

مثال ۶. مطلوب است $\int (x^{-1/2} + x^4)\,dx$.

حل. از قضیه (۷) و رابطه (۱) داریم

$$\int (x^{-1/2} + x^4)\,dx = \int x^{-1/2}\,dx + \int x^4\,dx$$
$$= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{x^5}{5} + C$$
$$= 2x^{1/2} + \frac{x^5}{5} + C$$

قضیه ۸. اگر $F'(x)=f(x)$ آنگاه $\int k f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ که در آن k ثابت است.

تابع اولیه‌گیری یا انتگرال نامعین مجموع تعدادی متناهی تابع برابر با مجموع انتگرال‌های نامعین آنها است.

مثال ۷. مطلوب است $\int\left(4x-2x^{-1/3}+\frac{5}{x^2}\right)dx$

حل.

$$\int\left(4x-2x^{-1/3}+\frac{5}{x^2}\right)dx=4\int x\,dx-2\int x^{-1/3}dx+5\int x^{-2}dx$$
$$=4\left(\frac{x^2}{2}\right)-2\left(\frac{x^{2/3}}{2/3}\right)+5\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+C$$
$$=2x^2-3x^{2/3}-5x^{-1}+C$$

مثال ۸. تابع $y=f(x)$ را بیابید که نمودار آن از نقطه $(1,2)$ گذشته و در

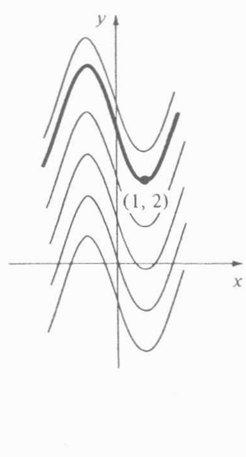
$$\frac{dy}{dx}=3x^2-3$$

صدق کند.

حل. از تعریف تابع اولیه، اگر $\frac{dy}{dx}=3x^2-3$ باشد آنگاه

$$y=\int(3x^2-3)\,dx$$

یعنی $y=x^3-3x+C$. حال وقتی $x=1$ داریم $y=2$ پس $2=1-3+C$ یا $C=4$. بنابراین $y=x^3-3x+4$. در نتیجه خانواده‌ای از تابع اولیه‌ها به صورت x^3-3x+C برای تابع $3x^2-3$ داریم که تنها یکی از آنها، نمودارش از نقطه $(1,2)$ می‌گذرد. شکل (۱)



شکل ۱

۲.۵ انتگرال‌های نامعین و جانشانی

در بخش قبل، تنها توابع اولیه‌گیری از توان‌های گویا x را دیدیم

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad (۲)$$

در این بخش، تابع اولیه‌گیری از قانون توان‌ها برای توابع (قضیه (۱۹.۴)) و تابع اولیه‌گیری از توابع مثلثاتی را بررسی می‌کنیم.

انتگرال نامعین توان یک تابع ۹. می‌خواهیم تابع F را بیابیم به طوری که

$$\int (5x+1)^{1/2} dx = F(x) + C$$

باید داشته باشیم

$$F'(x) = (5x+1)^{1/2}$$

با توجه به قانون مشتق‌گیری از توان‌های توابع، می‌دانیم که $(5x+1)^{1/2}$ مشتق تابع $(5x+1)^{3/2}$ است. اما مشتق تابع $(5x+1)^{3/2}$ برابر با $\frac{3}{2}(5)(5x+1)^{1/2} = \frac{15}{2}(5x+1)^{3/2}$ است. حال اگر مطابق رابطه (۲) عمل کنیم، داریم

$$\int (5x+1)^{1/2} dx \overset{?}{=} \frac{(5x+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C \qquad (۳)$$

اما پاسخ در (۳) را باید امتحان کنیم. زیرا از قانون توان برای توابع داریم

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(5x+1)^{1/2}\cdot 5$$
$$= 5(5x+1)^{1/2} \neq (5x+1)^{1/2}$$

برای جبران ضریب ۵ در (۳) از قضیه (۸) استفاده کرده داریم

$$\int (5x+1)^{1/2} dx = \int (5x+1)^{1/2} \boxed{\tfrac{1}{5}\cdot 5}\, dx$$

مساوی با 1

$$= \frac{1}{5}\int \boxed{(5x+1)^{1/2}\cdot 5}\, dx$$

مشتق $\frac{(5x+1)^{3/2}}{3/2}$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{2}{3}(5x+1)^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + C$$

کلید محاسبه انتگرال های نامعین مانند

$$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}dx \quad , \quad \int \sin 10x \, dx$$

در نتیجه معادلات که فرم قانون زنجیره‌ای انتگرال نامعین می باشد ،

قضیه ۱۰ . اگر F یک تابع اولیه f باشد آن گاه

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x)) + C \qquad (۴)$$

اثبات . طبق قانون زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x)$$
$$= f(g(x))\,g'(x)$$

بنابراین از تعریف یک تابع اولیه

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

برای بکارگیری (۴) باید به طور یقین ، فرم کامل زیر را داشته باشیم

تابع g و مشتق آن در f

$$\int f(\boxed{g(x)})g'(x)\,dx$$

بالاخص ، اگر $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ، که در آن n عددی گویا است و $n \neq -1$ و اگر $u = g(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد آن گاه

$$F(g(x)) = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \quad , \quad \frac{d}{dx}F(g(x)) = [g(x)]^n g'(x)$$

بنابراین از قضیه (۱۰) نتیجه می شود

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (۵)$$

اغلب برای تغییر متغیر در یک مسئله انتگرال گیری ، در نظر گرفتن جانشانی های زیر کمک کننده است

$$u = g(x) \quad , \quad du = g'(x)dx$$

بنابراین با جانشانی های فوق در (۴) ، رابطه (5) به صورت زیر خلاصه می شود .

اگر n یک عدد گویا و $u=g(x)$ تابع مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای $n\neq -1$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (۶)$$

مثال ۹. مطلوب است $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx$

حل. انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int (4x^2+3)^{-6}\, x\,dx$$

از $u=4x^2+3$ و $du=8x\,dx$، انتگرال را به فرم $\int u^{-6}du$ تبدیل می‌کنیم. پس کافی است در انتگرالده عدد 8 را ضرب و تقسیم کنیم. طبق (۶) نتیجه می‌شود که

$$\int (4x^2+3)^{-6} x\,dx = \frac{1}{8}\int \overbrace{(4x^2+3)^{-6}}^{u^{-6}}\ \overbrace{(8x\,dx)}^{du}$$

$$= \frac{1}{8}\int u^{-6}du$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{u^{-5}}{-5} + C$$

$$= -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5} + C$$

امتحان. از قانون توان برای توابع استفاده می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5} + C\right] = \left(-\frac{1}{40}\right)(-5)(4x^2+3)^{-6}(8x)$$

$$= \frac{x}{(4x^2+3)^6}$$

مثال ۱۰. مطلوب است $\int (x^2+3)^3\, x\,dx$

حل. اگر $u=x^2+2$ باشد آنگاه $du=2x\,dx$. بنابراین از (۶) داریم

$$\int (x^2+2)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2+2)^3}_{u^3}\ \underbrace{(2x\,dx)}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4} + C_1$$

$$= \frac{1}{8}(x^2+2)^4 + C_1 \qquad (۷)$$

حل دیگر. اگر قبل از انتگرال‌گیری از قضیه دوجمله‌ای استفاده کنیم، داریم

$$\begin{aligned}\int (x^2+2)^3 x\,dx &= \int (x^6+6x^4+12x^2+8)\,x\,dx\\ &= \int (x^7+6x^5+12x^3+8x)\,dx\\ &= \frac{x^8}{8}+6\left(\frac{x^6}{6}\right)+12\left(\frac{x^4}{4}\right)+8\left(\frac{x^2}{2}\right)+C_2\\ &= \frac{1}{8}x^8+x^6+3x^4+4x^2+C_2 \qquad (۸)\end{aligned}$$

توجه داریم که (۷) را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{8}(x^2+2)^4+C_1=\frac{1}{8}x^8+x^6+3x^4+4x^2+C_1$$

نوشت. اگرچه (۷) و (۸) دقیقاً یکی نیستند، اما دو نتیجه حاصل تنها دارای اختلافی در یک عدد ثابت هستند.

مثال ۱۱. مطلوب است $\int \sqrt{(7-2x^3)^4}\; x^2dx$.

حل. ابتدا انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int (7-2x^3)^{4/3}\, x^2dx$$

و سپس از $u=7-2x^3$ ، $du=-6x^2\,dx$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned}\int (7-2x^3)^{4/3}x^2dx &= -\frac{1}{6}\int (7-2x^3)^{4/3}(-6x^2dx)\\ &= -\frac{1}{6}\int u^{4/3}du\\ &= -\frac{1}{6}\,\frac{u^{7/3}}{7/3}+C\\ &= -\frac{3}{42}\,u^{7/3}+C\\ &= -\frac{1}{14}(7-2x^3)^{7/3}+C\end{aligned}$$

انتگرال نامعین توابع مثلثاتی ۱۱. اگر $u=g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه از فرمول های مشتق‌گیری

$$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}\;,\qquad \frac{d}{dx}(-\cos u)=\sin u\frac{du}{dx}$$

منجر به فرمول‌های انتگرال‌گیری

$$\int \cos u \frac{du}{dx}\,dx = \sin u + C \qquad (۹)$$

$$\int \sin u \frac{du}{dx}\,du = -\cos u + C \qquad (۱۰)$$

می‌شوند، چون $du = g'(x)dx = \frac{du}{dx}dx$ ، پس (۹) و (۱۰) معادل با

$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$

می‌باشند.

با توجه به مشتق توابع مثلثاتی در بخش (۴.) فرمول‌های انتگرال‌گیری زیر را داریم.

$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

مثال ۱۲. مطلوب است $\int 3\cos 3x\,dx$

حل. اگر $u = 3x$ آن گاه $du = 3dx$. بنابراین

$$\int \cos \underbrace{3x}_{u}\ \underbrace{(3dx)}_{du} = \int \cos u\,du$$

$$= \sin u + C$$

$$= \sin 3x + C$$

توضیح ۱۲. همان گونه که در شرح رابطه (۴) بیان شد، دیفرانسیل du قسمت مهمی در هر یک از فرمول‌های به دست آمده برای انتگرال است. قبل از به کار بردن یکی از فرمولها می‌توان انتگرالده را با ضرب و تقسیم یک ثابت چنان تغییر داد که du ساخته شود.

مثال ۱۳. مطلوب است $\int \sin 10x\, dx$

حل. اگر $u = 10x$ آنگاه بنا بر این $du = 10dx$ داریم. می‌نویسیم

$$\int \sin 10x\, dx = \frac{1}{10}\int \sin \underbrace{10x}_{u} \cdot \underbrace{(10dx)}_{du}$$
$$= \frac{1}{10}\int \sin u\, du$$
$$= \frac{1}{10}(-\cos u) + C$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 10x + C$$

در این مثال، می‌توان به جای ضرب و تقسیم عدد ۱۰، از $du = 10dx$ مقدار dx را یافت و آن را در انتگرال جایگزین کرد.

$$du = 10\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{10}du$$
$$\int \sin 10x\, dx = \int \sin u \cdot \left(\frac{1}{10}du\right)$$
$$= \frac{1}{10}\int \sin u\, du = \frac{1}{10}(-\cos u) + C$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 10x + C$$

مثال ۱۴. مطلوب است $\int \sec^2(1-4x)dx$.

حل. $u = 1-4x$ پس $du = -4dx$ در نتیجه $dx = -\frac{1}{4}du$

$$\int \sec^2(1-4x)\, dx = \int \sec^2 u \cdot \left(-\frac{1}{4}du\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\int \sec^2 u\, du$$
$$= -\frac{1}{4}\tan u + C$$
$$= -\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C$$

امتحان.

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C\right] = -\frac{1}{4}\sec^2(1-4x)\,\frac{d}{dx}(1-4x)$$
$$= -\frac{1}{4}\sec^2(1-4x)\cdot(-4)$$
$$= \sec^2(1-4x).$$

مثال ۱۵. مطلوب است $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

حل. ابتدا انتگرال را به صورت $\int (\cos x)^4 \sin x\, dx$ می‌نویسیم. با قرار دادن $u=\cos x$ داریم $du=-\sin x\, dx$، پس

$$\begin{aligned}\int (\cos x)^4 \sin x\, dx &= -\int (\cos x)^4 (-\sin x\, dx)\\ &= -\int u^4\, du\\ &= -\frac{u^5}{5}+C \qquad \text{از (۴)}\\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

نکته ۱۳. برخی اوقات لازم است که از اتحادهای مثلثاتی استفاده کنیم. فرمول‌های نیم زاویه را یادآوری می‌کنیم

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

در مسائلی که نیاز به تابع اولیه‌گیری از $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ است، از آنها استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱۶. مطلوب است $\int \cos^2 x\, dx$

حل. باید دقت کرد که انتگرال مورد نظر به صورت $\int u^2 du$ نیست. از فرمول‌های نیم زاویه داریم $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ پس

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int [1+\cos 2x]\, dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2dx)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]+C\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

مثال ۱۷. مطلوب است $\int \sin^2 x\, dx$.

حل. از اتحاد $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int [1-\cos 2x]\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2dx)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right] + C$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

توضیح مهم ۱۴. باید در تبدیل یک انتگرال و جایگذاری برحسب متغیرها دقت شود. تنها ضرب و تقسیم اعداد ثابت مجاز است. به عنوان مثال در انتگرال زیر استفاده از روش تغییر متغیر بیان شده، کاملاً نادرست است.

$$\int (4+x^2)^{1/2}\,dx \overset{?}{=} \frac{1}{2x}\int (4+x^2)^{1/2}\,2x\,dx$$
$$\overset{?}{=} \frac{1}{2x}\int u^{1/2}\,du \qquad \left(\frac{1}{2x}\cdot 2x = 1\right)$$
$$\overset{?}{=} \frac{1}{2x}\cdot\frac{3}{2}(4+x^2)^{3/2} + C$$

زیرا اگر از حاصل به دست آمده، مشتق بگیریم، برابر تابع زیر نشانه انتگرال نخواهد بود.

۳.۵. انتگرال معین

۱.۳.۵ نماد سیگما و مساحت محصور به یک نمودار

در فصل دوم با نماد سیگما و خواص آن کاملاً آشنا شدیم. بیان کردیم که:
فرض کنید a_k عددی حقیقی و وابسته به یک عدد صحیح k است. مجموع

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

را با نماد $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad (11)$$

اندیس مجموع، یک نماد ظاهری است. در واقع $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m$ و به همین ترتیب.
برخی از خواص نماد سیگما که در فصل دوم به طور مشروح مورد بررسی قرار گرفت را در اینجا آورده‌ایم.

قضیه ۱۵. برای اعداد صحیح مثبت m و n داریم

الف) $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (c عدد ثابت دلخواه)

ب) $\sum_{1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{1}^{n} a_k \pm \sum_{1}^{n} b_k$

ج) $\sum_{1}^{m} a_k = \sum_{1}^{n} a_k + \sum_{n+1}^{m} a_k$ ، $n<m$

د) اگر c یک ثابت باشد آن‌گاه $\sum_{1}^{n} c = nc$

هـ) $\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

و) $\sum_{1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

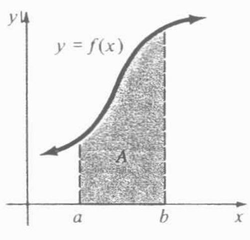
ز) $\sum_{1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ح) $\sum_{1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

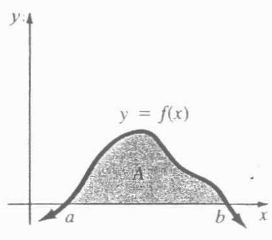
همان‌گونه که مشتق در ارتباط با مسئلهٔ هندسی ساختن یک مماس به منحنی در ارتباط است، مسئلهٔ تاریخی که منجر به تعریف انتگرال معین گردید، مسئلهٔ یافتن مساحت بود. بالاخص، برای ما یافتن مساحت ناحیه A محصور به محور xها، نمودار تابع نامنفی $y=f(x)$ تعریف‌شده بر فاصله‌ای چون $[a,b]$ و

الف) خطوط قائم $x=a$ و $x=b$، نشان داده شده در شکل (۲) یا

ب) محل‌های برخورد نمودار با محور xها، نشان داده شده در شکل (۳) جالب توجه است.



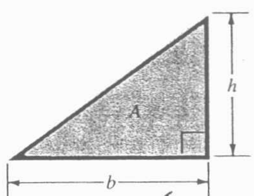
شکل ۲



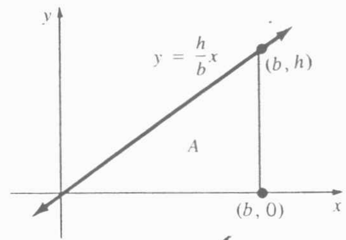
شکل ۳

این مساحت را مساحت محصور به نمودار f روی فاصله $[a,b]$ نامیم.

برای لحظه‌ای فرض کنید که فرمول محاسبه مساحت مثلث قائم‌الزاویه A در شکل (۴) را نمی‌دانیم. با قرار دادن یک دستگاه مختصات روی مثلث، شکل (۵)، دیده می‌شود که مسئله همان یافتن مساحت محصور به خط مستقیم $y=\frac{h}{b}x$ ، $y=0$ (محور xها) و $x=b$ است. به عبارت دیگر یافتن مساحت زیر نمودار $y=\frac{h}{b}x$ روی فاصله $[0,b]$ است.

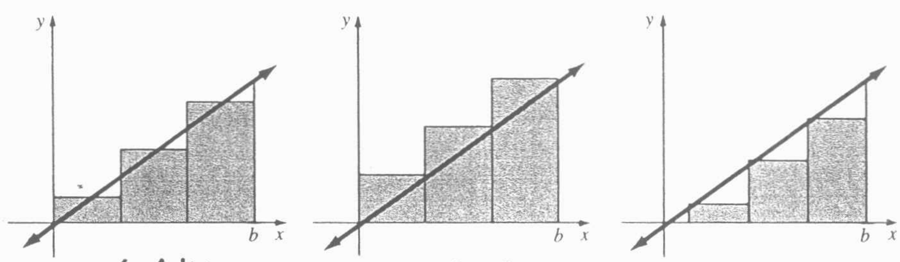


شکل ۴



شکل ۵

با استفاده از مستطیل‌ها، شکل (۶)، سه تقریب متفاوت برای مساحت A را در نظر گرفته‌ایم.



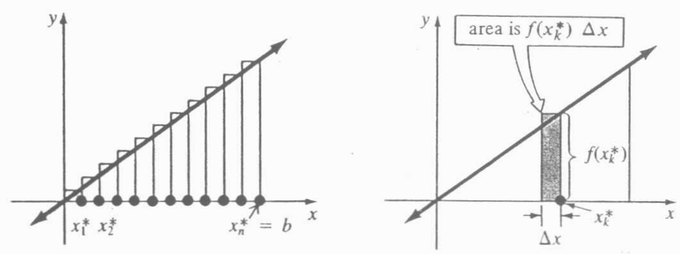
(الف) (ب) (ج)

شکل ۶

شکل (۶-ب) را با جزئیات بیشتر شرح می‌دهیم. با تقسیم فاصله $[0,b]$ به n زیرفاصله هر یک به طول $\Delta x = \frac{b}{n}$ شروع کرده‌ایم. اگر نقطه انتهایی راست این زیرفاصله‌ها را با x_k^* نمایش دهیم، در این صورت

$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$
$$x_2^* = 2\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_k^* = k\Delta x = k\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = n\Delta x = n\left(\frac{b}{n}\right) = b$$

همان گونه که در شکل (۷-الف) نشان داده است، مستطیلی با طول $f(x_k^*)$ و عرض Δx روی هر یک از n زیرفاصله ساخته‌ایم. چون مساحت مستطیل برابر عرض x طول است، پس مساحت هر مستطیل برابر $f(x_k^*)\Delta x$ است. شکل (۷-ب).



(الف) (ب)

شکل ۷

از جمع مساحت‌های این n مستطیل یک عدد تقریبی برای A به دست می‌آید. می‌نویسیم

$$A \simeq f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

یا با استفاده از نماد سیگما

$$A \simeq \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (۱۳)$$

به نظر می‌رسد که بتوانیم خطای ایجاد شده توسط این روش تقریبی را با افراز کردن $[0,b]$ به زیرتقسیم‌های ظریف‌تر کم کرد (در این حالت مساحت هر مستطیل نزدیک‌تر از مساحت محصور به نمودار روی زیرفاصله $[x_{k-1}, x_k]$ است). به عبارت دیگر، انتظار داریم که تقریب بهتر برای A را بتوان با کوچک‌تر کردن مستطیل‌ها ($n \to \infty$) که توسط نزول عرض‌ها ($\Delta x \to 0$) به دست می‌آید، تعیین کرد. داریم

$$f(x) = \frac{h}{b}x, \quad x_k^* = k\left(\frac{b}{n}\right), \quad f(x_k^*) = \frac{h}{n}\cdot k \quad \Delta x = \frac{b}{n}$$

پس

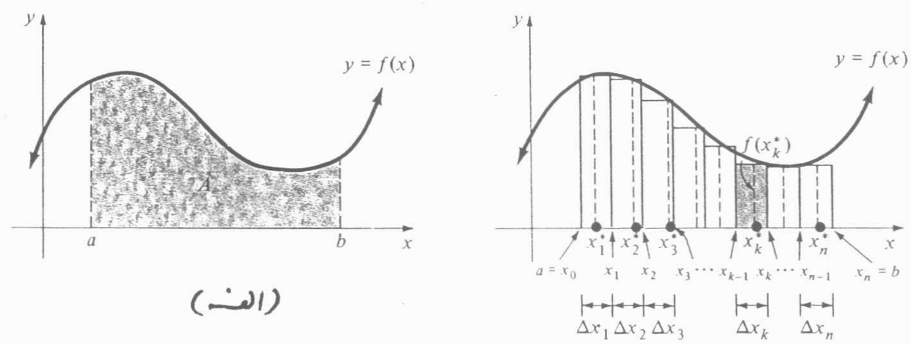
$$A \simeq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot k\right)\frac{b}{n} = \frac{bh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{bh}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

و نهایتاً وقتی $n \to \infty$، فرمول

$$A = \frac{1}{2}bh \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}bh$$

به دست می‌آید.

مسئله کلی ۱۶ . با توجه به مثال قبل، به سراغ مسئله کلی‌تر یافتن مساحت A محصور به نمودار تابع پیوسته $y=f(x)$ روی فاصله $[a,b]$ می‌رویم. همان گونه که در شکل (۸-الف) دیده می‌شود، فرض داریم برای هر x این فاصله $f(x) \geq 0$. با توجه به شکل (۸-ب) مساحت A را می‌توان با جمع مساحتهای n مستطیل ساخته شده روی فاصله تقریب زد.



(الف) (ب)

شکل ۸

روش یافتن A به صورت زیر خلاصه شده است.

۱. فاصله $[a,b]$ را به n زیرفاصله $[x_{k-1},x_k]$ با طول‌های مساوی برای $k=1,2,\dots,n$ افراز می‌کنیم که در آن $x_0=a$ و $x_n=b$ و

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

۲. طول هر زیرفاصله را با Δx نشان می‌دهیم. $\Delta x=x_k-x_{k-1}$

۳. عدد دلخواه x_k^* را در هر زیرفاصله $[x_{k-1},x_k]$ انتخاب کرده و حاصل ضرب $f(x_k^*)\Delta x$ را به دست می‌آوریم. این مقدار مساحت مستطیل روی k-امین زیرفاصله است.

۴. مجموع $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ را به دست می‌آوریم. این جمع مساحتهای n مستطیل است و یک تقریب برای مقدار A است.

با مقدمات بیان شده، اکنون آماده‌ایم که مفهوم مساحت محصور به یک نمودار را تعریف کنیم.

تعریف ۱۷. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته بوده و برای هر x در این فاصله $f(x)\geq 0$ است. مساحت A محصور به نمودار روی فاصله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۲)، طول هر زیرفاصله باهم مساوی است. درصورتی که طول زیرفاصله‌ها باهم مساوی نباشند، آن‌گاه نوع متفاوتی از حد در (۱۲) مورد نیاز است. باید به‌جای $n\to\infty$ از طول بزرگترین زیرفاصله به صفر استفاده کنیم.

برای استفاده از (۱۳)، نقطه x_k^* را مانند شکل (۶-ب) انتخاب می‌کنیم. یعنی فرض کنید x_k^* نقطه راست هر زیرفاصله است. چون تمام طول‌های زیرفاصله‌ها باهم مساوی هستند، پس $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و در نتیجه

$$x_1^* = x_0 + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2^* = x_0 + 2\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_k^* = x_0 + k\Delta x = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^* = x_0 + n\Delta x = a + n\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$$

با جایگزینی $a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ به‌جای x_k^* و $\frac{b-a}{n}$ به‌جای Δx در (۱۲)، مساحت A توسط

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (۱۴)$$

به دست می‌آید. توجه داریم که از $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $n\to\infty$ نتیجه می‌شود $\Delta x\to 0$.

مثال ۱۸. مساحت محصور به نمودار $f(x)=x+2$ روی فاصله $[0,4]$ را به دست آورید.

حل. مساحت به ذوزنقه در شکل (۴) محصور است. با قرار دادن $a=0$ و $b=4$ داریم

$$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

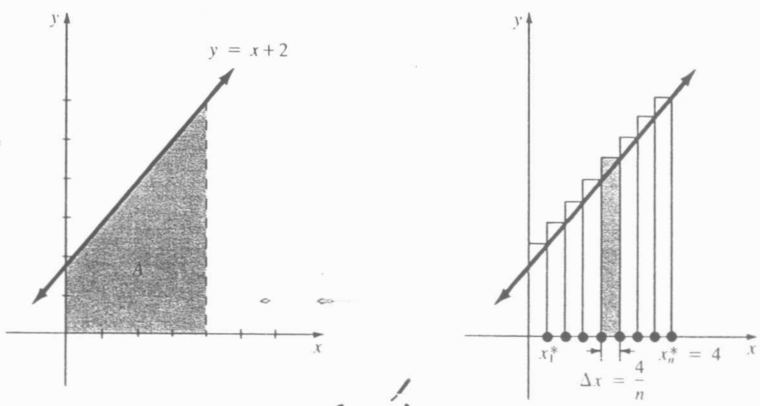
از (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{4}{n}\right)\frac{4}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k}{n}+2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

بنابراین

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16\,n(n+1)}{2n^2}+8\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[8\left(1+\frac{1}{n}\right)+8\right]=8+8=16$$

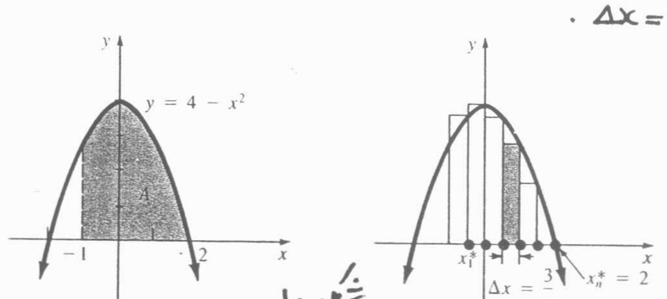


شکل ۹

مثال ۱۹. مساحت محصور به نمودار $f(x)=4-x^2$ روی فاصله $[-1,2]$ را بدست آورید.

حل. مساحت مورد نظر در شکل (۱۰) نشان داده شده است. چون $a=-1$ و $b=2$

پس $\Delta x=\frac{2-(-1)}{n}=\frac{3}{n}$.



شکل ۱۰

عرض هر مستطیل برابر $\frac{3}{n}$ است. با شروع در $x=-1$، نقاط سمت راست هر زیرفاصله به صورت

$$x_1^*=-1+\frac{3}{n}$$
$$x_2^*=-1+2\left(\frac{3}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_k^*=-1+k\left(\frac{3}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^*=-1+n\left(\frac{3}{n}\right)=2$$

است. طول هر مستطیل برابر است با

$$f(x_1^*) = f(-1+\tfrac{3}{n}) = 4-[-1+\tfrac{3}{n}]^2$$

$$f(x_2^*) = f(-1+2(\tfrac{3}{n})) = 4-[-1+2(\tfrac{3}{n})]^2$$

$$\vdots$$

$$f(x_n^*) = f(-1+n(\tfrac{3}{n})) = f(2) = 4-(2)^2 = 0$$

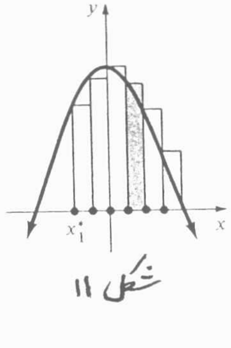
مساحت k-امین مستطیل برابر عرض x طول می‌باشد یعنی

$$\begin{aligned} f(x_k^*)(\tfrac{3}{n}) &= \left(4-[-1+k(\tfrac{3}{n})]^2\right)\tfrac{3}{n} \\ &= \left(3+\tfrac{6}{n}k-\tfrac{9}{n^2}k^2\right)\tfrac{3}{n} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+6\frac{k}{n}-9\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3+6\frac{k}{n}-9\frac{k^2}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[3\sum_1^n 1+\frac{6}{n}\sum_1^n k-\frac{9}{n^2}\sum k^2\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[3n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[9+9(1+\tfrac{1}{n})-\tfrac{9}{2}(1+\tfrac{1}{n})(2+\tfrac{1}{n})\right] \\ &= 9+9-9 = 9 \end{aligned}$$

تبصره ۱۸. در رابطه با انتخاب نقطه x_k^* در سمت راست هر زیر فاصله، نکته‌ای وجود دارد. همان گونه که قبلاً نیز بیان شد x_k^* می‌تواند هر عدد دلخواهی در $[x_{k-1}, x_k]$ باشد. اگر x_k^* را نقاط چپ هر زیر فاصله در نظر بگیریم، در این صورت مستطیل‌ها در شکل (۱۱) نمایش داده شده‌اند. در این حالت داریم $x_k^* = -1+(k-1)\frac{3}{n}$ برای $k=1,2,\dots,n$ (مربوط به مثال (۱۹)). بقیه عملیات با نقاط x_k^* مشابه در مثال (۱۹) است و نهایتاً دیده می‌شود که در این حالت نیز مساحت محصور مورد نظر برابر ۹ می‌باشد.



شکل ۱۱

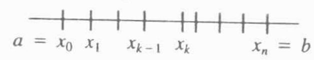
۲.۳.۵ تعریف انتگرال معین

همان‌گونه که در فصل دوم به طور مفصل در رابطه با مفهوم انتگرال معین بررسی کردیم، می‌توان آن را در پنج مرحله به شرح زیر توصیف کرد. برای $y=f(x)$،

۱. فرض کنید f روی فاصله بسته $[a,b]$ تعریف شده است.

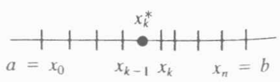
۲. فاصله $[a,b]$ را به n زیرفاصله $[x_{k-1}, x_k]$ به طول $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ افراز کنید. فرض کنید P نشان دهنده افراز

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$



۳. فرض کنید $\|P\|$ طول بزرگترین زیرفاصله است. عدد $\|P\|$ را نُرم افراز P نامند.

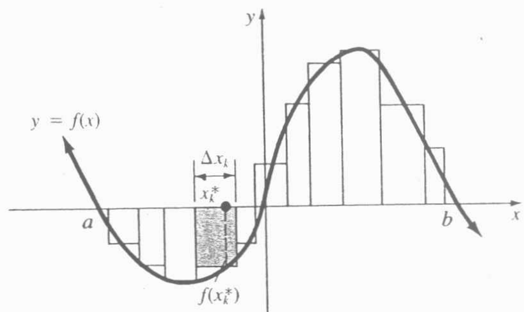
۴. عدد x_k^* را در هر زیرفاصله انتخاب کنید.



۵. مجموع زیر را تشکیل دهید

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k \qquad (۱۵)$$

جمع‌های به دست آمده در (۱۵) برای افرازهای مختلف از $[a,b]$ را به عنوان جمع‌های ریمان می‌شناسیم. گرچه روش مطرح شده در پنج مرحله بسیار شبیه تعریف مساحت محصور به یک نمودار است، اما تفاوت‌های مهمی وجود دارد. مشاهده می‌شود که جمع‌های ریمان نیازی به پیوسته بودن یا نامنفی بودن f روی $[a,b]$ ندارد. بنابراین (۱۵) لزوماً یک تقریب برای مساحت محصور به یک نمودار نیست. تفکر مساحت محصور به نمودار به مساحت بین نمودار یک تابع نامنفی و محور xها منجر می‌شود. همان‌گونه که در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود، اگر به ازای xهایی در $[a,b]$، $f(x)<0$ باشد، یک جمع ریمان می‌تواند شامل جملات $f(x_k^*)\Delta x_k$ با $f(x_k^*)<0$ باشد. در این حالت حاصل‌ضرب‌های $f(x_k^*)\Delta x_k$ اعداد منفی‌اند که منفی آن‌ها در مساحت مشاهده می‌شود.



شکل ۱۲

مثال ۲۰. جمع ریمان برای $f(x)=x^2-4$ روی $[-2,3]$ را با پنج زیرفاصله تعیین شده توسط

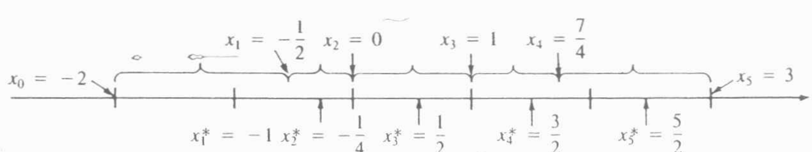
$$x_0=-2,\quad x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=0,\quad x_3=1,\quad x_4=\frac{7}{4},\quad x_5=3$$

و

$$x_1^*=-1,\quad x_2^*=-\frac{1}{4},\quad x_3^*=\frac{1}{2},\quad x_4^*=\frac{3}{2},\quad x_5^*=\frac{5}{2}$$

بدست آورید.

حل. شکل (۱۳) نشان دهنده نقاط x_k و x_k^* روی فاصله است.



شکل ۱۳

بنابراین

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = -\frac{1}{2}-(-2)=\frac{3}{2}$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1-0=1$$
$$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = \frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$$
$$\Delta x_5 = x_5 - x_4 = 3-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$$

و

$$f(x_1^*)=f(-1)=-3,\quad f(x_2^*)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{63}{16},\quad f(x_3^*)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4},\quad f(x_4^*)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{4}$$
$$f(x_5^*)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

بنابراین جمع ریمان برابر است با

$$f(x_1^*)\Delta x_1+f(x_2^*)\Delta x_2+f(x_3^*)\Delta x_3+f(x_4^*)\Delta x_4+f(x_5^*)\Delta x_5$$
$$=(-3)\left(\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{63}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{15}{4}\right)(1)+\left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$=-\frac{279}{32}\simeq-8.72$$

نکته ۱۹. برای تابع f تعریف شده روی یک فاصله $[a,b]$ تعداد نامتناهی امکان برای مجموعهای ریمان روی یک افراز P داده شده وجود دارد، زیرا اعداد x_k^* را می‌توان به دلخواه در هر زیر فاصله $[x_{k-1},x_k]$ انتخاب کرد.

مثال ۲۱. جمع ریمان برای تابع f و افراز داده شده برای $[-2,3]$ از تابع مثال (۲۰) را بدست آورید اگر نقاط $x_1^*=-\frac{3}{2}$، $x_2^*=-\frac{1}{8}$، $x_3^*=\frac{3}{4}$، $x_4^*=\frac{3}{2}$ و $x_5^*=2.1$ باشند.

حل.
$$f(x_1^*)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{4}$$
$$f(x_2^*)=f\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{255}{64}$$
$$f(x_3^*)=f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{55}{16}$$
$$f(x_4^*)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{4}$$
$$f(x_5^*)=f(2.1)=0.41$$

چون Δx_k همانند مثال ( ) است، پس
$$\sum_{k=1}^{5}f(x_k^*)\Delta x_k=\left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{255}{64}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{55}{16}\right)(1)+\left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+(0.41)\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$=-8.85$$

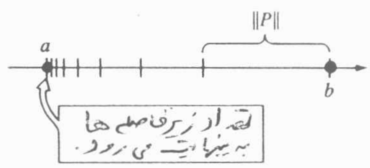
توضیح ۲۰. اگر جمع ریمان $\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\Delta x_k$ به عدد L برای هر افراز P از $[a,b]$ که $\|P\|$ به صفر میل می‌کند، نزدیک شود، می‌نویسیم
$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\Delta x_k=L \qquad (19)$$
و گوئیم L انتگرال معین f در $[a,b]$ است. اگر حد در (۱۹) موجود باشد، گوئیم تابع f انتگرال‌پذیر روی فاصله است. در تعریف زیر از نمادی برای L استفاده کرده‌ایم.

تعریف ۲۱. فرض کنید f تابع تعریف شده روی فاصله بسته $[a,b]$ است. در این صورت انتگرال معین f از a تا b را با $\int_a^b f(x)dx$ نمایش داده و توسط

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k \qquad (۱۷)$$

تعریف می‌شود.

اعداد a و b را به ترتیب حدود پایینی و بالایی انتگرال نامند. علامت انتگرال $\int$ توسط لایب‌نیتز برگرفته از حرف S کلمه مجموع معرفی شد. توجه کنید $\|P\|\to 0$ نتیجه می‌دهد که تعداد زیرفاصله‌ها یعنی n به بینهایت میل می‌کند. بهرحال، همانگونه که در شکل (۱۳) نشان داده شده است $n\to\infty$ نتیجه نمی‌دهد که $\|P\|\to 0$.



شکل ۱۳

قضیه ۲۲. اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $\int_a^b f(x)dx$ موجود است، یعنی f روی فاصله انتگرال‌پذیر است.

افراز منظم ۲۳. وقتی انتگرال معین موجود است، حد در (۱۷) برای هر افراز از $[a,b]$ و هر انتخاب x_k^* در زیرفاصله‌های $[x_{k-1},x_k]$ موجود است. بالاخص با انتخاب زیرفاصله‌های به طول مساوی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_k^* = a+k\frac{b-a}{n}$ برای $k=1,2,\dots,n$، می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \qquad (۱۸)$$

افراز P از $[a,b]$ که زیرفاصله‌های با یک طول را به وجود آورد یک افراز منظم نامیم. به سادگی دیده می‌شود که فرمول‌های $\int_a^b f(x)dx$ در (۱۷) و (۱۸) دقیقاً همان فرمول‌های (۱۳) و (۱۴) در بخش (۱.۲.۵) برای یافتن مساحت محصور به منحنی $y=f(x)$ روی $[a,b]$ است. بهرحال تعریف (۲۱) یک مفهوم کلی‌تر است، زیرا همان طور که قبلاً توجه کردیم، لزومی ندارد که f روی $[a,b]$ پیوسته باشد یا روی فاصله $f(x)\geq 0$. بنابراین انتگرال

معین لزوماً مساحت نیست. در حال حاضر می‌پذیریم که انتگرال معین به طور ساده یک عدد حقیقی است. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا مساحت محصور به نمودار یک تابع نامنفی پیوسته یک انتگرال معین است؟ جواب مثبت است.

قضیه ۲۴. اگر f روی $[a,b]$ پیوسته بوده و برای هر x در این فاصله $f(x)\geq 0$ باشد آنگاه مساحت A محصور به نمودار f روی $[a,b]$ برابر است با

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

مثال ۲۲. مطلوب است محاسبه $\int_{-2}^{1} x^3dx$.

حل: چون $f(x)=x^3$ روی $[-2,1]$ پیوسته است، از قضیه (۲۲) نتیجه می‌شود انتگرال معین موجود است. از افراز منتظم در (۱۸) استفاده می‌کنیم.

$$\Delta x=\frac{1-(-2)}{n}=\frac{3}{n}, \qquad x_k^*=-2+k\left(\frac{3}{n}\right)$$

داریم

$$f\left(-2+\frac{3k}{n}\right)=\left(-2+\frac{3k}{n}\right)^3$$

$$=-8+36\left(\frac{k}{n}\right)-54\left(\frac{k^2}{n^2}\right)+27\left(\frac{k^3}{n^3}\right)$$

از (۱۸) و فرمول‌های جمع در فصل دوم، نتیجه می‌شود که

$$\int_{-2}^{1}x^3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(-2+\frac{3k}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[-8+36\left(\frac{k}{n}\right)-54\left(\frac{k^2}{n^2}\right)+27\left(\frac{k^3}{n^3}\right)\right]$$

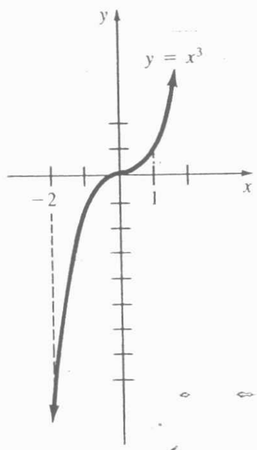
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[-8n+\frac{36}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{54}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-24+54\left(1+\frac{1}{n}\right)-27\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= -24 + 54 - 27(2) + \frac{81}{4}$$

$$= -\frac{15}{4}$$

شکل (۱۴) نشان می‌دهد که مساحت را در نظر گرفته‌ایم



شکل ۱۴

در زیر برنامه به زبان BASIC برای محاسبه تقریب انتگرال زیر آورده شده است.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

```
10 REM EVALUATION OF DEFINITE INTEGRALS
   VIA RIEMANN SUMS
20 DEF FNY(X) = ...
30 INPUT "WHAT IS THE INTERVAL? ";A,B
40 INPUT "HOW MANY SUBDIVISIONS? ";N
50 LET H = (B - A)/N
60 FOR X = A + H TO B STEP H
70 LET R = R + FNY(X)
80 NEXT X
90 LET R = R * H
100 PRINT "USING ";N; " SUBDIVISIONS, THE
    RIEMANN SUM YIELDS ";R
110 END
```

۴.۵ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

در انتهای بخش ۱.۳.۵، بیان کردیم که روشی ساده برای محاسبه انتگرال معین، با محاسبه تابعی خاص بجای محاسبه یک حد مجموع وجود دارد. این روش ساده را بنام قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌شناسیم. در این قضیه، خواهیم دید که مفهوم یک تابع اولیه برای تابعی پیوسته پلی ارتباطی بین حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال است.

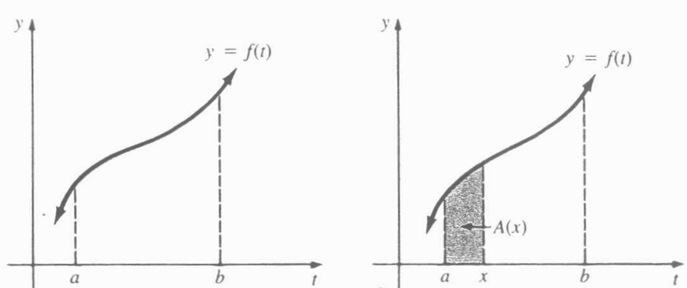
قضیه اساسی اول ۲۵. فرض کنید f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ است و برای هر t در $[a,b]$، $f(t)\geq 0$. در این صورت انتگرال

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad (۱۹)$$

معرف مساحت نشان دهنده مساحت محصور به نمودار f روی فاصله می‌باشد. حال اگر x هر عددی در $[a,b]$ باشد آن گاه تابع

$$A(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (۲۰)$$

مساحت محصور به نمودار f روی فاصله $[a,x]$ است. شکل (۱۵) را ببینید.



شکل ۱۵

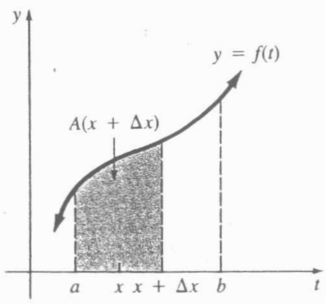
اگر $\Delta x>0$ آن گاه

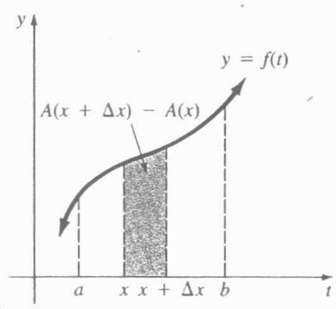
$$A(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (۲۱)$$

مساحت ناحیه در شکل (۱۶ - الف) است، در حالی که تفاضل

$$A(x+\Delta x)-A(x) \qquad (۲۲)$$

مساحت ناحیه نشان داده شده در شکل (۱۶ - ب) است.



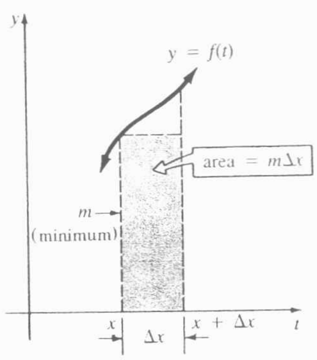


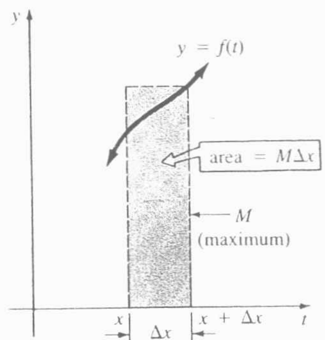
(الف) شکل ۱۶ (ب)

چون f روی $[x, x+\Delta x]$ پیوسته است از قضیه مقدار اکستریم (قضیه ( )) می‌دانیم که f مقدار مینیمم m و مقدار ماکزیمم M خود را روی فاصله می‌پذیرد. پس تفاضل در (۲۲) بین دو عدد $m\Delta x$ و $M\Delta x$ قرار دارد

$$m\Delta x \leq A(x+\Delta x) - A(x) \leq M\Delta x$$

در شکل (۱۷) کران‌های پایین و بالا مشخص شده‌اند.





(الف) شکل (۱۷) (ب)

با تقسیم بر Δx داریم

$$m \leq \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq M$$

با توجه به اینکه $\lim_{\Delta x \to 0^+} m = \lim_{\Delta x \to 0^+} M = f(x)$ داریم

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x) \qquad (۲۳)$$

حال از تعریف مشتق، رابطه (۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A'(x) = f(x) \qquad (۲۴)$$

استدلال مشابه برای $\Delta x < 0$ نیز برقرار است. بنابراین قضیه زیر را که به قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال معروف است را ثابت کردیم.

قضیه ۲۶ . فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته است و فرض کنید x عددی دلخواه در این فاصله است . اگر $G(x)$ تابعی تعریف شده توسط

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

باشد آن گاه $G'(x)=f(x)$.

باید دقت کرد که در اینجا $\int_a^x f(t)dt$ را با $G(x)$ نمایش داده ایم ، زیرا در صورت قضیه (۲۶) تابع f لزوماً روی $[a,b]$ نامنفی نیست پس انتگرال لزوماً نشان دهنده مساحت که با $A(x)$ در (۲۰) نمایش داده شده نمی باشد .

مثال ۲۳ . الف) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x t^3dt=x^3$

ب) $\frac{d}{dx}\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,dt=\sqrt{x^2+1}$

قضیه اساسی دوم ۲۷ . برای تابع پیوسته f ، عبارت $G'(x)=f(x)$ برای $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ به معنای آن است که $G(x)$ یک تابع اولیه تابع زیر نشانه انتگرال است . اگر F هر تابع اولیه f باشد ، از قضیه (۲) می دانیم که $G(x)-F(x)=C$ یا $G(x)=F(x)+C$ که در آن C ثابت دلخواهی است . در نتیجه برای هر x در $[a,b]$ داریم

$$F(x)+C=\int_a^x f(t)dt \qquad (۲۵)$$

حال اگر در (۲۵) قرار دهیم $x=a$ آن گاه

$$F(a)+C=\int_a^a f(t)dt$$

پس $C=-F(a)$ زیرا $\int_a^a f(t)dt=0$. بنابراین (۲۵) به صورت

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt$$

است . چون معادله اخیر برای $x=b$ نیز برقرار است ، پس

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt \qquad (۲۶)$$

بنابراین قضیه زیر را ثابت کردیم که به قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال معروف است .

قضیه ۲۸. فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته است و F هر تابع دلخواهی است که در شرط $F'(x)=f(x)$ صدق می‌کند آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \tag{۲۷}$$

تفاضل در (۲۷) را معمولاً به صورت

$$F(x)\Big|_a^b$$

می‌نویسیم. یعنی

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{انتگرال معین}} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{انتگرال نامعین}}\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

چون قضیه (۲۸) برای هر تابع اولیه $F(x)$ برقرار است، پس همیشه ثابت انتگرال‌گیری C را برابر صفر می‌گیریم. اگر $C\neq 0$ آنگاه

$$(F(x)+C)\Big|_a^b=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

مثال ۲۴. در مثال (۲۲) با توجه به تعریف انتگرال معین دیدیم که

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx=-\frac{15}{4}$$

چون $F(x)=\frac{x^4}{4}$ یک تابع اولیه $f(x)=x^3$ است. از قضیه (۲۸) داریم

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{(-2)^4}{4}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{16}{4}=-\frac{15}{4}$$

مثال ۲۵. مطلوب است $\int_1^3 x\,dx$

حل. یک تابع اولیه $f(x)=x$ تابع $F(x)=\frac{x^2}{2}$ است. پس

$$\int_1^3 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^3=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$$

مثال ۲۶. مطلوب است $\int_{-2}^{2}(3x^2-x+1)\,dx$

حل.

$$\int_{-2}^{2}(3x^2-x+1)\,dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$=(8-2+2)-(-8-2-2)=20$$

مثال ۲۷. مطلوب است $\int_{\pi/6}^{\pi} \cos x\, dx$

حل. یک تابع اولیه $f(x)=\cos x$ تابع $F(x)=\sin x$ است. بنابراین

$$\int_{\pi/6}^{\pi}\cos x\, dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi}$$

$$= \sin\pi - \sin\frac{\pi}{6} = 0-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۲۸. مطلوب است $\int_0^3 |x-2|\,dx$

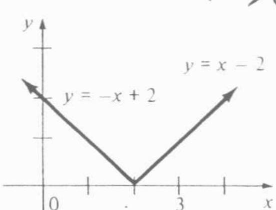
حل. از تعریف قدرمطلق داریم

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x-2\geq 0 \\ -(x-2) & x-2<0 \end{cases}$$

یا

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -x+2 & x<2 \end{cases}$$

نمودار $f(x)=|x-2|$ در شکل (۱۸) نشان داده شده است.



شکل ۱۸

پس

$$\int_0^3 |x-2|\,dx = \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^3$$

$$= (-2+4) + \left(\frac{9}{2}-6\right) - (2-4) = \frac{5}{2}$$

۲۹. جابه‌جایی در یک انتگرال معین. در بخش (۲.۵) از یک جابه‌جایی در محاسبه یک انتگرال نامعین به صورت $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ استفاده کردیم. حال از جابه‌جایی برای محاسبه یک انتگرال معین نیز می‌توان استفاده کرد و $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ را محاسبه نمود. معمولاً این عمل به دو طریق انجام می‌شود.

الف) انتگرال معین را با جانشانی $u=g(x)$ محاسبه کنیم. با جایگذاری $u=g(x)$ در تابع اولیه بدست آمده و بکارگیری قضیه اساسی برحسب حدود اولیه $x=a$ و $x=b$ مقدار انتگرال را تعیین کنیم.

ب) در انتگرال معین با جانشانی $u=g(x)$ برای انتگرالده، حدود انتگرالگیری را متناظر به مقدار u در $x=a$ و مقدار u در $x=b$ تغییر دهیم و سپس انتگرالگیری کنیم.

قضیه ۳۰. فرض کنید $u=g(x)$ تابعی با مشتق پیوسته روی $[a,b]$ است و f تابعی پیوسته روی برد g باشد. اگر $F'(u)=f(u)$ و $c=g(a)$ و $d=g(b)$، آنگاه

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(d)-F(c) \qquad (۲۸)$$

اثبات.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx &= \int_c^d f(u)\,\frac{du}{dx}\,dx\\ &= \int_c^d f(u)\,du\\ &= F(u)\Big|_c^d = F(d)-F(c).\end{aligned}$$

مثال ۲۹. مطلوب است $\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\;x\,dx$

حل. از روش (الف) در بالا استفاده می‌کنیم. برای محاسبه انتگرال نامعین داده شده توسط $\int \sqrt{2x^2+1}\;x\,dx$ داریم

$$u=2x^2+1, \quad du=4x\,dx$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2+1}\;x\,dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+1}\,(4x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{4}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}+C = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}+C\end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\;x\,dx = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(9^{3/2}-1^{3/2}\right) = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3}$$

این انتگرال را از روش (ب) حل کنید. (تمرین)

وقتی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها (تابع زوج) یا نسبت به مبداء (تابع فرد) متقارن روی فاصله متقارن $[-a,a]$ است، انتگرال معین $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ را می‌توان با روشی کوتاه‌تر حل کرد.

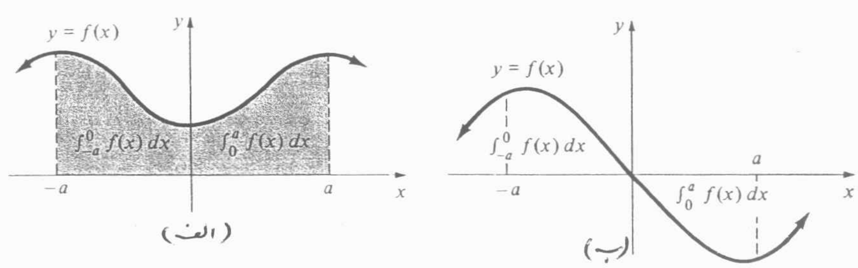
قضیه ۳۱. قانون تابع زوج. فرض کنید f یک تابع انتگرال‌پذیر زوج روی $[-a,a]$ است. آن‌گاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (۲۹)$$

قضیه ۳۲. قانون تابع فرد. فرض کنید f یک تابع انتگرال‌پذیر فرد روی $[-a,a]$ است آن‌گاه

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad (۳۰)$$

اثبات این دو قضیه به عنوان تمرین واگذار می‌شود. اما از نظر هندسی با توجه به شکل (۱۹) می‌توان نتایجی را داشت. نکته در قضیه (۳۲) این است که: وقتی از یک تابع انتگرال‌پذیر فرد f روی فاصله متقارن $[-a,a]$ انتگرال می‌گیریم، نیازی به یافتن تابع اولیه f برای به کارگیری قضیه (۲۸) نیست و مقدار انتگرال معین صفر است.



تابع زوج
مساحت محصور به تابع f روی $[-a,0]$ برابر مساحت روی $[0,a]$ است.

تابع فرد
مقدار انتگرال معین روی $[-a,0]$ قرینه مقدار انتگرال معین روی $[0,a]$ است.

شکل ۱۹

مثال ۳۰. مطلوب است $\int_{-1}^{1}(x^4+x^2)\,dx$

حل. چون

$$f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x)$$

پس انتگرالده یک تابع زوج روی فاصله متقارن $[-1,1]$ است. پس از قضیه (۳۱) داریم

$$\int_{-1}^{1}(x^4+x^2)\,dx=2\int_{0}^{1}(x^4+x^2)\,dx$$

$$=2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

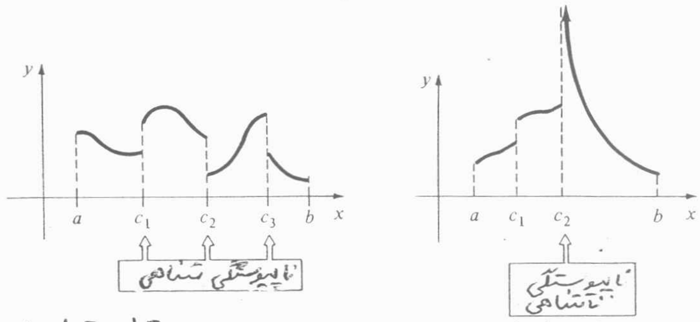
$$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{15}$$

مثال ۳۱. مطلوب است $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\,dx$

حل. چون $f(x)=\sin x$ روی فاصله متقارن $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تابعی فرد است، پس از قضیه (۳۲) داریم

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\,dx=0$$

تابع قطعه قطعه پیوسته ۳۳. تابع f را قطعه قطعه پیوسته روی فاصله $[a,b]$ نامیم هرگاه حداکثر تعداد متناهی نقطه c_k برای $k=1,2,\dots,n$ $(c_{k-1}<c_k)$ وجود داشته باشد به طوری که f دارای یک ناپیوستگی متناهی یا یک پرش در آنها بوده و روی هر فاصله باز (c_{k-1},c_k) پیوسته باشد، شکل (۲۰).



الف) پیوسته قطعه قطعه است

ب) پیوسته قطعه قطعه نیست

شکل ۲۰

یک تابع قطعه قطعه پیوسته انتگرال پذیر است. انتگرال معین یک تابع قطعه قطعه پیوسته روی

روی $[a,b]$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

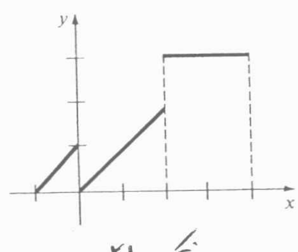
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

مثال ۳۲. مطلوب است $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ که در آن

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 2 \\ 3 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

حل. نمودار تابع قطعه‌قطعه پیوسته f در شکل (۲۱) نشان داده شده است. با توجه به توضیحات بالا داریم

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx + \int_{2}^{4} 3\,dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} + 3x\Big|_{2}^{4} \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$



شکل ۲۱

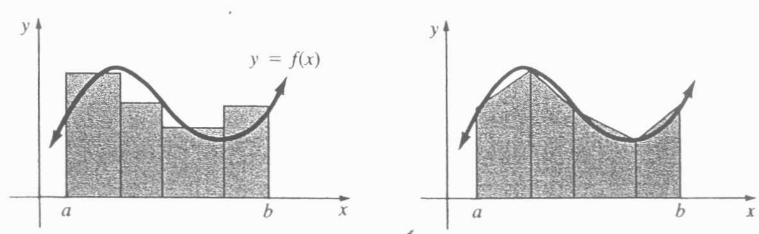
تبصره ۳۴. تابع اولیه با توجه به قضیه اساسی، ابزاری مفید و بسیار مهم برای محاسبه انتگرال‌های معین است. سؤالی که مطرح می‌شود این است که: وقتی می‌توان $\int_a^b f(x)\,dx$ را با محاسبه $\int f(x)\,dx$ در دو عدد a و b به دست آورد، چرا بحث روی حد مجموع را باید مطرح کرد؟ برای پاسخ به این سؤال باید دقت کرد که توابعی وجود دارند که تابع اولیه آنها یعنی $\int f(x)\,dx$ را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی بیان کرد. برای مثال تابع پیوسته $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ برحسب توابع مقدماتی تابع اولیه‌ای ندارد ولی از پیوستگی آن، می‌دانیم که $\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\,dx$ وجود دارد.

۵.۵ انتگرال‌گیری تقریبی

اگر تابع اولیه هر تابع پیوسته‌ای را بتوان برحسب توابع مقدماتی مانند چندجمله‌ایها، توابع گویا یا توابع مثلثاتی شرح داد، محاسبه انتگرال معین ساده و راحت است. اما در واقع چنین نیست. پس قضیه (۲۸) را نمی‌توان برای محاسبه هر انتگرال معینی به کار برد. گاهی اوقات بهتر است که مقدار تقریبی برای $\int_a^b f(x)dx$ به دست آوریم. در این بخش دو روش عددی برای این هدف را معرفی می‌کنیم.

در این بخش نیز بهتر است که انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را به عنوان مساحت محصور به نمودار f روی $[a,b]$ در نظر بگیریم. گرچه پیوستگی f در اینجا الزامی است، اما هیچ تأکیدی بر شرط $f(x)\geq 0$ روی فاصله نداریم.

یک روش تقریب انتگرال معین، همان فرآیندی است که منجر به یافتن مساحت محصور به نمودار تابع یعنی مستطیل‌های مقدماتی و جمع مساحت‌های آنها است. شکل (۲۲-الف) را ببینید. این عمل اساساً همان ایده جمع ریمانی است. به هر حال از شکل (۲۲-ب) دیده می‌شود که تخمین بهتری برای $\int_a^b f(x)dx$ را می‌توان با جمع مساحت‌های ذوزنقه‌ها بجای مساحت‌های مستطیل‌ها به دست آورد.



(الف) (ب)

شکل ۲۲

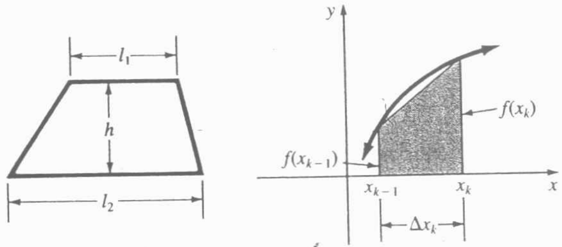
قانون ذوزنقه ۳۵. مساحت ذوزنقه نشان داده شده در شکل (۲۳-الف) برابر است با

$$h\frac{l_1+l_2}{2}$$

بنابراین برای یک عنصر ذوزنقه‌ای در شکل (۲۳-ب) مساحت A_k آن برابر

$$A_k=(\Delta x_k)\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$$

است.



(الف) شکل ۲۳ (ب)

درحالت کلی، برای یک افراز منتظم از فاصله [a,b] که تابع f روی آن پیوسته است، قانون ذوزنقه توسط

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \Delta x \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \Delta x \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} + \cdots + \Delta x \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \qquad (۳۱)$$

بدست می‌آید. چون $\Delta x = \frac{b-a}{2}$، پس (۳۱) به صورت

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \qquad (۳۲)$$

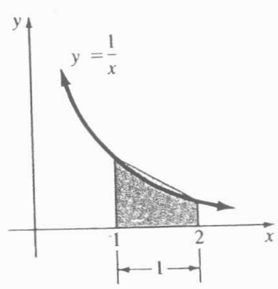
تبدیل می‌شود که در آن $x_0=a$ و $x_n=b$ و $x_k=a+k\Delta x$ برای $k=0,1,\dots,n$ است.

بعنوان مثال، چون تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی هر فاصله‌ای که شامل صفر نباشد پیوسته است پس روی [a,b] که شامل صفر نیست، پیوسته و در نتیجه انتگرال پذیر است. اما تاکنون تابع F ای که $F'(x)=\frac{1}{x}$ شود را نمی‌شناسیم، یعنی تابع اولیه آن را نمی‌دانیم.

مثال ۲۳. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را به روش ذوزنقه‌ای برای $n=1$، $n=2$ و $n=6$ تقریب بزنید.

حل. همانگونه که در شکل (۲۴) دیده می‌شود، درحالت $n=1$ تنها یک ذوزنقه داریم و $\Delta x=1$ و $f(1)=1$ و $f(2)=\frac{1}{2}$ بنابراین از (۳۲) داریم

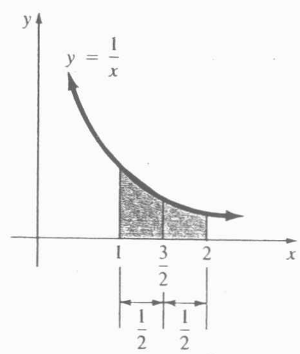
$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\right]=0.75$$



شکل ۲۴

برای $n = 2$، شکل (۲۵) نشان می‌دهد که $\Delta x = \frac{1}{2}$، $x_0 = 1$، $x_1 = 1+\Delta x = \frac{3}{2}$ و $x_2 = 1 + 2\Delta x = 2$ و $f(x_0) = 1$، $f(x_1) = \frac{2}{3}$ و $f(x_2) = \frac{1}{2}$. بنابراین از (۳۲) داریم

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\right] \simeq 0.7083$$



شکل ۲۵

نهایتاً برای $n = 6$، $\Delta x = \frac{1}{6}$، $x_0 = 1$، $x_1 = 1 + \Delta x = \frac{7}{6}$، ...، $x_6 = 1 + 6\Delta x = 2$
مقادیر مورد نیاز در جدول زیر خلاصه شده‌اند

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
5	$\frac{11}{6}$	$\frac{6}{11}$
6	2	$\frac{1}{2}$

با استفاده از (۳۲) داریم

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq \frac{1}{12}\left[1 + 2\left(\frac{6}{7}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 2\left(\frac{6}{11}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$\simeq 0.6949.$$

حال فرض کنید $I = \int_a^b f(x)dx$ و T_n تقریب I با استفاده از n ذوزنقه است. خطا در روش را با استفاده از $E_n = |I - T_n|$ تعریف می‌کنیم. یک کران بالایی برای خطا را می‌توان در زیر دید:

قضیه ۲۶. اگر عدد $M > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای x در $[a,b]$ داشته باشیم

اگر $|f''(x)| \le M$ آن‌گاه

$$E_n \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2} \qquad (۳۳)$$

مشاهده می‌شود که کران بالایی فوق برای E_n نسبت معکوس با n^2 دارد، پس اگر تعداد ذوزنقه‌ها دو برابر شود، خطای E_{2n} کمتر از $\frac{1}{4}$ کران خطا برای E_n است. در مثال بعد دیده می‌شود که می‌توان از (۳۳) برای تعیین تعداد ذوزنقه‌های مورد نیاز جهت رسیدن به یک دقت خاص استفاده کرد.

مثال ۳۴. n را چنان بیابید که (۳۲) تقریب $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را تا دو رقم اعشار دقت به دست دهد.

حل. معادل ذوزنقه‌ای با دو رقم اعشار دقت برای مقادیری از n که کران بالایی $\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ اکیداً کوچکتر از 0.005 شود، انجام می‌دهیم. برای $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

چون f'' روی $[1,2]$ نزولی است پس برای هر $x\in[1,2]$ ، $f''(x) \le f''(1) = 2$

بنابراین با $M=2$ و $b-a=1$ قرار می‌دهیم

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.005$$

یا $n^2 > \frac{100}{3} \simeq 33$. با انتخاب $n \ge 6$ دقت لازم به دست می‌آید.

این مثال مشخص می‌کند که تقریب $\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq 0.6949$ در مثال (۳۳) برای $n=6$ دارای دو رقم اعشار دقت است. به طریق مشابه می‌توان دید که مقدار این انتگرال تعیین تا چهار رقم اعشار برابر $\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq 0.6931$ است.

مثال ۳۵. مقدار تقریبی $\int_{1/2}^1 \cos\sqrt{x}\, dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به دست آورید به طوری که خطای تقریب کمتر از 0.001 باشد.

حل. مشتق دوم $f(x)=\cos\sqrt{x}$ را به دست می‌آوریم

$$f''(x)=\frac{1}{4x}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\cos\sqrt{x}\right)$$

برای $x\in[\frac{1}{2},1]$ داریم $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\le 1$ و $0<\cos\sqrt{x}\le 1$ پس $|f(x)|\le\frac{1}{4x}$

بنابراین روی این فاصله، $|f''(x)|\le\frac{1}{2}$. در نتیجه با $M=\frac{1}{2}$ و $b-a=\frac{1}{2}$ از (۳۲) قرار می‌دهیم

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12n^2}<0.001$$

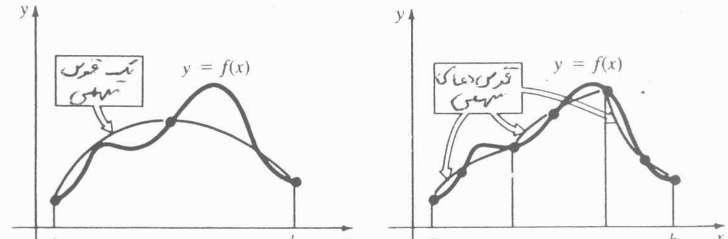
یا $n^2>\frac{125}{24}\simeq 5.21$، در نتیجه برای بدست آوردن دقت مورد نیاز، قرار می‌دهیم $n=3$ و $\Delta x=\frac{1}{6}$. اطلاعات مورد نیاز در جدول زیر آورده شده است

k	x_k	$f(x_k)$
0	$\frac{1}{2}$	0.7602
1	$\frac{2}{3}$	0.6848
2	$\frac{5}{6}$	0.6115
3	1	0.5403

حال از (۳۲) داریم

$$\int_{1/2}^{1}\cos\sqrt{x}\,dx\simeq\frac{1}{12}\left[\cos\sqrt{\frac{1}{2}}+2\cos\sqrt{\frac{2}{3}}+2\cos\sqrt{\frac{5}{6}}+\cos 1\right]$$
$$\simeq 0.3244$$

گرچه از شکل واضح نیست، یک روش بهتر برای تقریب انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را می‌توان با در نظر گرفتن قوس های سهموی بجای وترهای استفاده شده از قاعده ذوزنقه‌ای به دست آورد. می‌توان ثابت کرد که قوس سهمی گذرنده از سه نقطه خاص به نمودار f نزدیکتر از یک خط مستقیم است. شکل (۲۶) را ببینید. با جمع کردن مساحت های زیر قوس‌های سهمی می‌توان یک تقریب برای انتگرال به دست آورد.



(الف) یک قوس　　　　(ب) سه قوس

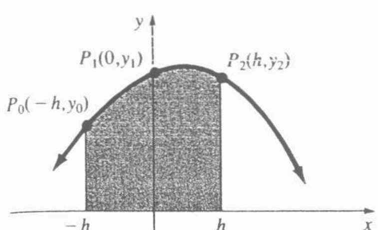
شکل ۲۶

برای شروع، مساحت محصور به یک قوس سهمی گذرنده از نقاط $P_0(x_0,y_0)$، $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را که در آن $x_0<x_1<x_2$ و $x_1-x_0=x_2-x_1=h$ به دست می‌آوریم. همان‌گونه که در شکل (۲۷) دیده می‌شود، این مساحت را می‌توان با یافتن محصور به نمودار

$$y=Ax^2+Bx+C$$

روی فاصله $[-h,h]$ به دست آورد به طوری که P_0، P_1 و P_2 دارای مختصات $(-h,y_0)$، $(0,y_1)$ و (h,y_2) به ترتیب هستند. فاصله $[-h,h]$ را برای سادگی اختیار کرده‌ایم. مساحت مورد نظر وابسته به موقعیت محور yها نیست.

$$\text{مساحت}=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,dx$$
$$=\left(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Big|_{-h}^{h}$$
$$=\frac{h}{3}\left(2Ah^2+6C\right) \qquad (۳۴)$$



شکل ۲۷

اما، چون نمودار از $(-h,y_0)$، $(0,y_1)$ و (h,y_2) می‌گذرد، باید

$$y_0=Ah^2-Bh+C \qquad (۳۵)$$

$$y_1=C \qquad (۳۶)$$

$$y_2=Ah^2+Bh+C \qquad (۳۷)$$

با جمع (۳۵) و (۳۷) و با استفاده از (۳۶) داریم $2Ah^2=y_0+y_2-2y_1$. بنابراین (۳۴) به صورت

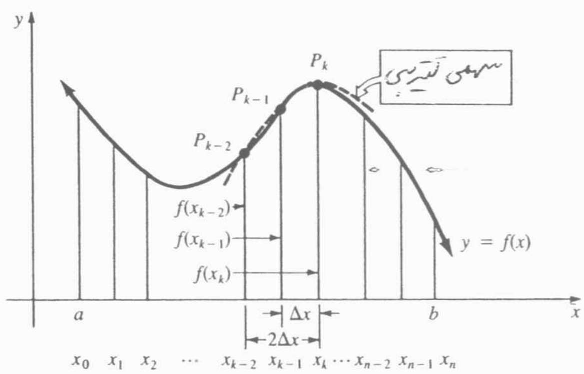
$$\text{مساحت}=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right) \qquad (۳۸)$$

شرح داده می‌شود.

قانون سیمپسون ۳۷. حال فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته است و فاصله را به

n زیرفاصله با طول برابر $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم کرده‌ایم که در آن n یک عدد صحیح زوج است.
همان گونه که در شکل (۲۸) دیده می‌شود، روی هر زیرفاصلهٔ $[x_{k-2}, x_k]$ با عرض $2\Delta x$ نمودار f را به وسیلهٔ یک قوس سهمی گذرنده از نقاط P_{k-2}، P_{k-1} و P_k روی نمودار متناظر به نقاط انتهایی و نقطهٔ میانی زیرفاصله تقریب می‌زنیم. اگر A_k نشان دهندهٔ مساحت محصور به سهمی روی $[x_{k-2}, x_k]$ باشد، از (۳۸) داریم

$$A_k = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_{k-2}) + 4f(x_{k-1}) + f(x_k)\right]$$



شکل ۲۸

بنابراین قانون سیمپسون شامل جمع تمام A_k هاست، یعنی

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] + \cdots + \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \qquad (۳۹)$$

با استفاده از $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، (۳۹) به صورت زیر خواهد بود

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \qquad (۴۰)$$

که در آن $x_0 = a$، $x_n = b$ و $x_k = a + k\Delta x$ برای $k = 0, 1, \ldots, n$. مجدداً توجه داریم که n در (۴۰) باید زوج باشد زیرا هر A_k نشان دهندهٔ مساحت محصور به یک قوس سهمی روی زیرفاصله‌ای به عرض $2\Delta x$ است.

خطا برای قانون سیمپسون ۳۸. اگر $I = \int_a^b f(x)\,dx$، آن گاه همانند قبل، خطا در روش

برابر است با $E_n = |I - S_n|$ که در آن S_n نشان دهنده طرف راست رابطه (۴۰) است. قضیه زیر یک کران بالایی برای E_n را با استفاده از کران بالایی برای مشتق چهارم بدست می‌دهد.

قضیه ۳۹. اگر عدد $M > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر x در $[a,b]$، $|f^{(4)}(x)| \le M$، آن گاه

$$E_n \le \frac{M(b-a)^5}{180 n^4} \qquad (41)$$

مثال ۳۶. مقدار n را چنان تعیین کنید که (۴۰) یک تقریب برای $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ با دو رقم اعشار دقت را نتیجه دهد.

حل. برای $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ و در روی $[1,2]$ داریم

$$f^{(4)}(x) \le f^{(4)}(1) = 24$$

بنابراین با $M = 24$ از (۴۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{24(1)^5}{180 n^4} < 0.005$$

یا $n^4 > \frac{80}{3} \simeq 26.67$ و بنابراین $n > 2.27$، چون n باید یک عدد صحیح زوج باشد کافی است $n \geq 4$ باشد.

مثال ۳۷. تقریب $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با قانون سیمپسون برای $n=4$ بدست آورید.

حل. برای $n=4$ داریم $\Delta x = \frac{1}{4}$. از (۴۰) و جدول زیر داریم

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right] \simeq 0.6933$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{7}$
4	2	$\frac{1}{2}$

در زیر برنامه‌هایی به زبان BASIC برای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و قاعدهٔ سیمپسون آورده شده‌اند.

```
10 REM EVALUATION OF DEFINITE INTEGRALS
   VIA THE TRAPEZOIDAL RULE
20 DEF FNY(X) = ...
30 INPUT "WHAT IS THE INTERVAL? ";A,B
40 INPUT "HOW MANY SUBDIVISIONS? ";N
50 LET H = (B - A)/N
60 LET T = FNY(A) + FNY(B)
70 FOR X = A + H TO B - H/2 STEP H
80 LET T = T + 2 * FNY(X)
90 NEXT X
100 LET T = T * H/2
110 PRINT "USING ";N; " SUBDIVISIONS, THE
    TRAPEZOID RULE YIELDS ";T
120 END
```

```
10 REM EVALUATION OF DEFINITE INTEGRALS
   USING SIMPSON'S RULE
20 DEF FNY(X) = ...
30 INPUT "WHAT IS THE INTERVAL? ";A,B
40 INPUT "HOW MANY SUBDIVISIONS? ";N
50 LET H = (B - A)/N
60 LET S = FNY(A) + FNY(B)
70 FOR X = A + H TO B - H/2 STEP 2 * H
80 LET S = S + 4 * FNY(X)
90 NEXT X
100 FOR X = A + 2 * H TO B - 3 * H/2 STEP
    2 * H
110 LET S = S + 2 * FNY(X)
120 NEXT X
130 LET S = H * S/3
140 PRINT "USING ";N; " SUBDIVISIONS,
    SIMPSON'S RULE YIELDS ";S
150 END
```