فصل ۶ توابع متعالی

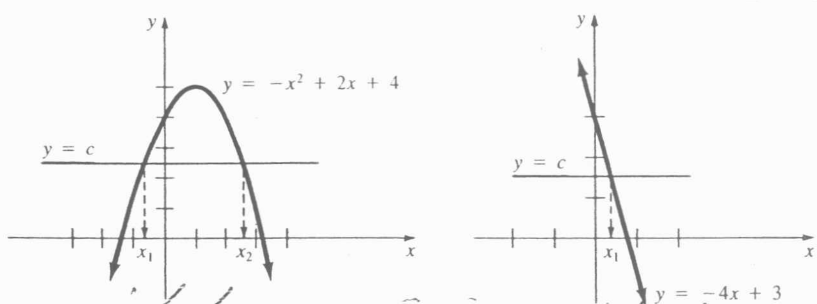
۱.۶ توابع مثلثاتی معکوس

۱.۱.۶ توابع معکوس

تعریف ۱. تابع f را یک به یک نامیم اگر هر عضو در برد تابع دقیقاً مشاطر شده توسط یک عضو دامنه X باشد.

آزمون خط افقی ۲. به طور هندسی، تعریف (۱) به معنای آن است که یک خط افقی (یا ثابت) نمودار یک تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. علاوه بر آن، اگر هر خط افقی نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن گاه تابع لزوماً یک به یک است. اگر خطی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند آن تابع یک به یک نیست.

مثال ۱. نمودارهای $g(x)=-x^2+2x+4$ و $f(x)=-4x+3$، نشان داده شده در شکل (۱)، مشخص می‌کند که عناصر x_1 و x_2 در دامنه g وجود دارند به طوری که $g(x_1)=g(x_2)=c$ اما تنها یک x_1 در دامنه f وجود دارد به طوری که $f(x_1)=c$. بنابراین g یک به یک نیست اما f یک به یک است.



الف) یک به یک نیست ب) یک به یک است

شکل ۱

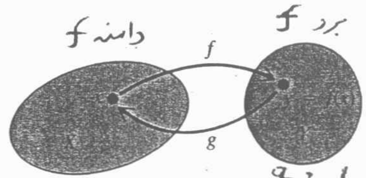
تابع معکوس یک تابع یک به یک ۳. فرض کنید f تابعی یک به یک با دامنه X و برد Y است. چون هر عضو y از Y دقیقاً مشاطر شده توسط یک عضو x از X است، تابع f باید توسط یک تابع g با دامنه Y و برد X مشخص شود، شکل (۲). f و g در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$f(x)=y \quad , \quad g(y)=x$$

یا

$$f(g(y))=y \quad , \quad g(f(x))=x \qquad (1)$$

تابع g را معکوس f نامیم. هر متغیر مستقل را با x نمایش می‌دهیم. پس (۱) به صورت زیر خلاصه می‌شود.



شکل ۲

تعریف ۴. فرض کنید f تابعی یک به یک با دامنه X و برد Y است. معکوس f تابع g با دامنه Y و برد X است به طوری که

$$\forall x\in Y,\quad f(g(x))=x$$
$$\forall x\in X,\quad g(f(x))=x \qquad (2)$$

به طور متعارف، معکوس تابع f را معمولاً با f^{-1} نمایش می‌دهیم. باید دقت کرد که $f^{-1}(x)$ به معنای $[f(x)]^{-1}=\frac{1}{f(x)}$ نیست. بر اساس این نمادگذاری تعریف (۴) به صورت

$$f(f^{-1}(x))=x \quad , \quad f^{-1}(f(x))=x \qquad (3)$$

نوشته می‌شود.

معادله اول در (۳) را می‌توان برای یافتن معکوس یک تابع یک به یک به طور صریح بکار برد.

مثال ۲. معکوس $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ برای $x\neq\frac{3}{2}$ را به دست آورید.

حل. از شکل (۳) دیده می‌شود که f یک به یک است، بنابراین از (۳) داریم

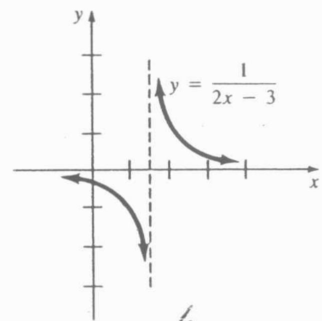
$$x=f(f^{-1}(x))=\frac{1}{2f^{-1}(x)-3}$$

با حل این معادله برای $f^{-1}(x)$ نتیجه می‌شود که

$$2f^{-1}(x)-3=\frac{1}{x}$$

$$2f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2x}$$



شکل ۳

امتحان.

$$f(f^{-1}(x))=\frac{1}{2(\frac{3x+1}{2x})-3}=\frac{x}{3x+1-3x}=x$$

$$f^{-1}(f(x))=\frac{3(\frac{1}{2x-3})+1}{2(\frac{1}{2x-3})}=\frac{\frac{2x}{2x-3}}{\frac{2}{2x-3}}=x$$

در مثال (۲)، دیده می‌شود که دامنه f (تمام اعداد حقیقی بجز $\frac{3}{2}$) و برد f (تمام اعداد حقیقی بجز ۰) به ترتیب برد و دامنه f^{-1} هستند.

تابع معکوس f را می‌توان به روش متعارفی زیر بدست آورد. اگر g معکوس f باشد آن‌گاه $x=g(y)$. بنابراین، تنها نیاز است که

الف) $y=f(x)$ را برای x حل کنیم.

ب) مجدداً متغیر وابسته x را با y و متغیر مستقل y را با x نمایش دهیم.

مثال ۳. معکوس $f(x)=-4x+3$ را بدست آورید.

حل. از مثال (۱) دیده می‌شود که f یک به یک است پس دارای یک معکوس می‌باشد. حال f را به صورت $y=-4x+3$ نوشته و x را برحسب y حل می‌کنیم

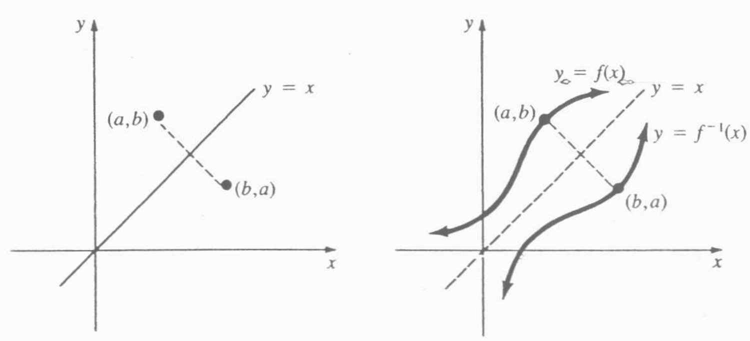
$$x=\frac{-y+3}{4}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم. داریم $y=\frac{-x+3}{4}$ یا $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

۵. نمودارهای f و f^{-1}. فرض کنید (a,b) نقطه‌ای دلخواه روی نمودار تابع یک به یک f است. در این صورت $b=f(a)$ و

$$f^{-1}(b)=f^{-1}(f(a))=a$$

نتیجه می‌دهد که (b,a) روی نمودار f^{-1} است. چون نقاط (a,b) و (b,a) نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، از شکل (۴) دیده می‌شود که f^{-1} انعکاس نمودار f در خط $y=x$ است.

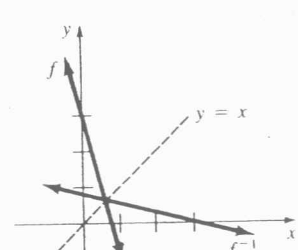


(الف) (ب)

شکل ۴

مثال ۴. نمودارهای f و f^{-1} از مثال (۳) را مقایسه کنید.

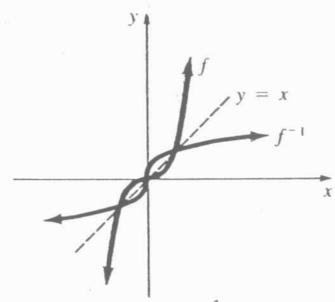
حل. نمودارهای $f(x)=-4x+3$ و $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ خطوط مستقیم‌اند. تلاقی x و تلاقی y نمودار f به ترتیب $\frac{3}{4}$ و 3 است. از طرف دیگر، تلاقی‌های x و y نمودار f^{-1} به ترتیب 3 و $\frac{3}{4}$ هستند. با رسم خطوط گذرنده از این نقاط شکل (۵) را داریم.



شکل ۵

مثال ۵. معکوس $f(x)=x^3$ را بدست آورده و نمودارهای f و f^{-1} را مقایسه کنید.

حل. با حل معادله $y=x^3$ برای x داریم $x=y^{1/3}$. از تعویض x و y با هم، دیده می‌شود که $f^{-1}(x)=x^{1/3}$. از واقعیت اینکه نمودارهای f و f^{-1} انعکاس‌های یکدیگر نسبت به خط $y=x$ می‌باشند، شکل (۶) را می‌توان بدست آورد.



شکل ۶

پیوستگی f^{-1}.

قضیه ۶. فرض کنید f تابع پیوسته و یک به یک روی فاصله $[a,b]$ است. دراین صورت f^{-1} روی فاصله $[f(a),f(b)]$ پیوسته است.

قضیه ۷. فرض کنید f تابعی پیوسته و صعودی روی فاصله $[a,b]$ است. دراین صورت f^{-1} موجود بوده و روی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی است.

مثال ۶. ثابت کنید $f(x)=5x^3+8x-9$ دارای معکوس است.

حل. چون f یک تابع چندجمله‌ای است، پس پیوسته می‌باشد. علاوه بر آن

$$f'(x)=15x^2+8>0 \qquad \forall x$$

پس f روی $(-\infty,\infty)$ صعودی است. حال از قضیه (۷) نتیجه می‌شود که f^{-1} موجود است.

درحالتی که f نزولی باشد نیز قضیه (۷) برقرار است.

در نتیجه بعد، معکوس تابع $y=f(x)$ را با $x=g(y)$ نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم مشتق‌پذیری f^{-1} را مورد بررسی قرار دهیم.

قضیه ۸. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است که دارای معکوس g می‌باشد. آنگاه g نیز مشتق‌پذیر است هرگاه $\frac{dy}{dx} = f'(x) \neq 0$ و

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \qquad (۴)$$

اثبات. چون f مشتق‌پذیر است، بنابراین پیوسته می‌باشد و وقتی $\Delta x \to 0$ داریم

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \to 0$$

طبق قضیه (۶)، g نیز پیوسته است. بنابراین $\Delta x \to 0$ وقتی که $\Delta y \to 0$. پس

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y/\Delta x} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\end{aligned}$$

معمولاً فرمول (۴) را به صورت

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (۵)$$

نمایش می‌دهیم. با جابجا کردن متغیرها، (۵) به صورت

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \qquad (۶)$$

نوشته می‌شود. حال اگر f^{-1} برای معکوس تابع f بجای g درنظر گرفته شود آنگاه رابطه (۶) به فرم زیر

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad (۷)$$

بیان می‌شود.

به وضوح، معادله (۷) نشان می‌دهد که برای محاسبه مشتق f^{-1} باید $f^{-1}(x)$ را بطور صریح بدانیم. بهرحال اگر (a,b) نقطه‌ای روی نمودار f باشد، رابطه (۷) به سادگی امکان محاسبه مشتق f^{-1} در نقطه (b,a) را بدون داشتن معادله تعریف کننده $f^{-1}(x)$ می‌دهد.

مثال ۷. برای تابع f در مثال (۶)، شیب خط مماس به نمودار f^{-1} در $(f(1),1)$ را به دست آورید.

حل. چون $f(x)=5x^3+8x-9$ داریم $f(1)=4$ و

$$f'(x)=15x^2+8$$

پس $f'(1)=23$. اما $f(1)=4$ نتیجه می‌دهد که $f^{-1}(4)=1$. حال از (۷) داریم

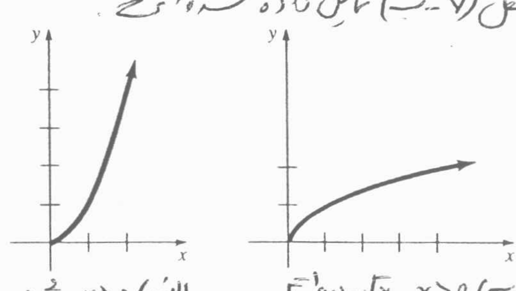
$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{23}$$

به عبارت دیگر، شیب خط مماس به نمودار f در $(1,4)$ برابر 23 است و شیب خط مماس به نمودار f^{-1} در $(4,1)$ برابر $\frac{1}{23}$ است.

در بخش های بعد، خواهیم دید که اغلب می‌توان برای یافتن مشتق یک تابع معکوس از مشتق گیری ضمنی استفاده کرد.

اگر تابع f یک به یک باشد آن گاه دارای یک معکوس است. برعکس، اگر f دارای یک معکوس باشد آن گاه یک به یک است. بنابراین اگر تابعی یک به یک نباشد دارای یک معکوس نیست. در مثال بعد نشان می‌دهیم که گاهی با تحدید دامنه یک تابع که یک به یک نیست به قسمتی از دامنه آن به طوری که روی آن قسمت یک به یک شود به تابعی جدید می‌رسیم که دارای یک معکوس است.

مثال ۸. دیدیم که $f(x)=x^2$ یک به یک نیست. به هر حال برای x های نامنفی از شکل (۷-الف) و قضیه (۸) نتیجه می‌شود که تابع جدید $F(x)=x^2,\ x\geq 0$ دارای معکوس $F^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$ است و تابع معکوس آن در شکل (۷-ب) نمایش داده شده است.



الف) $F(x)=x^2,\ x\geq 0$ ب) $F^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$

شکل ۷

۲.۱.۶ توابع مثلثاتی معکوس (توابع معکوس مثلثاتی)

در فصل دوم نمودارها و خواص از توابع مثلثاتی از قبیل

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot\frac{3\pi}{2} = 0$$

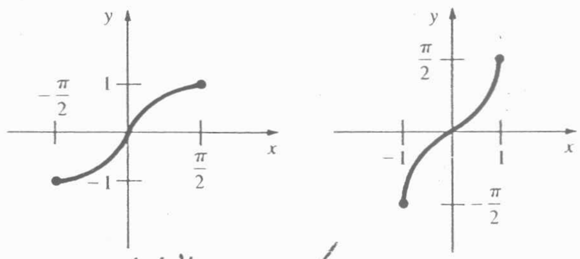
را دیدیم. باید توجه کرد که هیچیک از توابع مثلثاتی روی دامنه تعریف یک به یک نیستند، معهذا با توجه به توضیحات قبل از مثال (۸) بخش (۱.۱.۶) می توانیم تابع معکوس مثلثاتی را روی یک دامنه تحدید شده بدست آورد.

تابع معکوس سینوس ۹. با در نظر گرفتن $y=\sin x$ روی فاصله بسته $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ داده شده در شکل (۸ ـ الف) دیده می شود که برای هر y در $[-1, 1]$ تنها یک مقدار x در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ وجود دارد به طوری که $y=\sin x$. در ضمن تابع $y=\sin x$ روی این فاصله پیوسته و یکنوا است پس دارای تابع معکوس است. در ضمن دامنه و برد تابع اولیه داده شده، به ترتیب برد و دامنهٔ تعریف تابع معکوس است. پس تابع معکوس $\sin$ را با $\sin^{-1}x$ نشان داده و توسط

$$y=\sin^{-1}x \iff x=\sin y \qquad (۸)$$

تعریف می شود که در آن $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. نمودار $y=\sin^{-1}x$ در شکل (۸ ـ ب) نمایش داده شده است. با توجه به رابطه (۳) داریم

$$\sin(\sin^{-1}x)=x, \quad -1\le x\le 1, \quad \sin^{-1}(\sin x)=x, \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \qquad (۹)$$



(الف) شکل ۸ (ب)

مثال ۹. مطلوب است $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

حل. فرض کنید $y=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$. پس y زاویه‌ای است که $\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ پس $y=\frac{\pi}{4}$.
چون این عدد در $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ است پس می‌توان نوشت

$$\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}$$

نمادگذاری. باید دقت کرد که $\sin^{-1}x$ به معنای $(\sin x)^{-1}=\frac{1}{\sin x}$ نیست. نماد دیگری که گاهی اوقات به کار می‌رود به صورت

$$\arcsin x=\sin^{-1}x$$

است.

مثال ۱۰. مطلوب است $\arcsin(\frac{1}{2})$.

حل. اگر $y=\arcsin\frac{1}{2}$ آنگاه $\frac{1}{2}=\sin y$. تنها عدد y در $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ که در رابطه $\frac{1}{2}=\sin y$ صدق می‌کند عدد $\frac{\pi}{6}$ است یعنی

$$\arcsin(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$$

نکته. گرچه ماشین‌های حساب نتیجه می‌دهند که

$$\arcsin(\frac{1}{2})=30^\circ$$

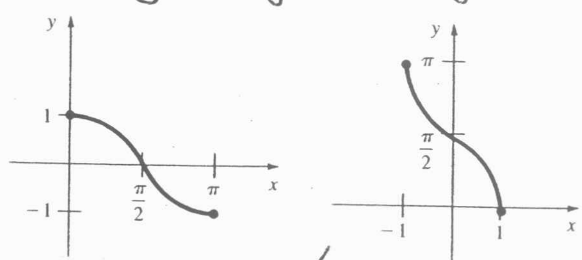
اما به صراحت می‌گوییم غلط است. خروجی یک تابع معکوس مثلثاتی زاویه‌ای برحسب رادیان است.

تابع معکوس کسینوس ۱۵. تابع $y=\cos x$ پیوسته و نزولی روی $[0,\pi]$ است بنابراین تابع معکوس کسینوس توسط

$$y=\cos^{-1}x \iff x=\cos y \qquad (۱۰)$$

تعریف می‌شود که در آن $-1\le x\le 1$ و $0\le y\le \pi$.

نمودارهای $y=\cos x$ و $y=\cos^{-1}x$ در شکل (۹) نمایش داده شده‌اند.



(الف) $y=\cos x,\ 0\le x\le \pi$ شکل ۹ (ب) $y=\cos^{-1}x,\ -1\le x\le 1$

مثال ۱۱. مطلوب است $\cos^{-1}(-1)$

حل. فرض کنید $y=\cos^{-1}(-1)$. از رابطه (۱۰) دیده می‌شود که تنها عدد y در فاصله بسته $[0,\pi]$ به طوری که $\cos y=-1$ برابر $y=\pi$ است. بنابراین

$$\cos^{-1}(-1)=\pi$$

مطابق (۹) داریم

$$\cos(\cos^{-1}x)=x \qquad -1\le x\le 1$$
$$\cos^{-1}(\cos x)=x \qquad 0\le x\le \pi$$

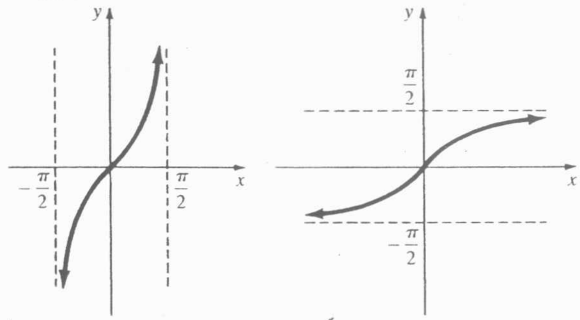
تابع معکوس تانژانت ۱۱. روی فاصله باز $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ تابع $y=\tan x$ پیوسته و صعودی است. بنابراین تابع معکوس تانژانت توسط

$$y=\tan^{-1}x \iff x=\tan y \qquad (۱۱)$$

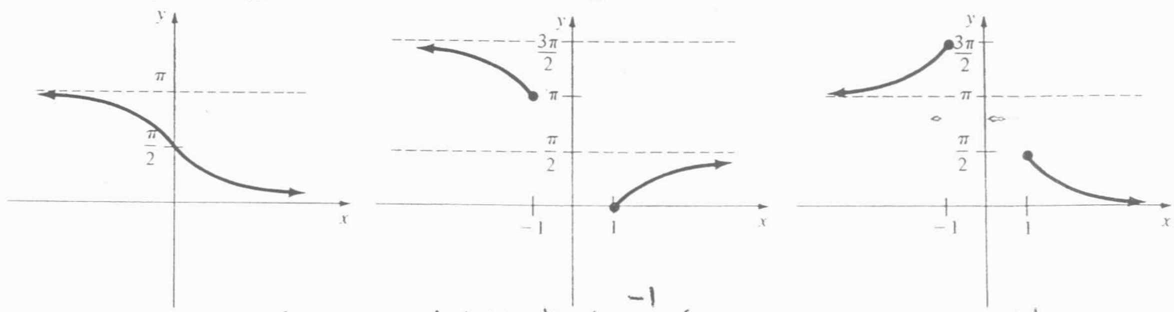
تعریف می‌شود که در آن $-\infty<x<\infty$ و $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. شکل (۱۰) را ببینید.

با تحدید دامنه‌های تعریف دیگر توابع مثلثاتی، این توابع نیز دارای تابع معکوس اند. در تعریف (۱۲) اطلاعات به دست آمده تاکنون برای توابع معکوس سینوس، کسینوس و تانژانت

به انضمام توابع معکوس کتانژانت، سکانت و کسکانت آمده است. نمودارهای $y=\cot^{-1}x$ ، $y=\sec^{-1}x$ و $y=\csc^{-1}x$ در شکل (۱۱) نمایش داده شده اند.



الف) $y=\tan x$ برای $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ب) $y=\tan^{-1}x$ برای $-\infty<x<\infty$ شکل ۱۰



الف) $y=\cot^{-1}x$ ، $-\infty<x<\infty$ ب) $y=\sec^{-1}x$ ، $|x|\leq 1$ ج) $y=\csc^{-1}x$ ، $|x|\geq 1$

شکل ۱۱

تعریف ۱۲. الف) $x=\sin y \Leftrightarrow y=\sin^{-1}x$ ، $|x|\leq 1$ و $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq \frac{\pi}{2}$

ب) $x=\cos y \Leftrightarrow y=\cos^{-1}x$ ، $|x|\leq 1$ و $0\leq y\leq \pi$

ج) $x=\tan y \Leftrightarrow y=\tan^{-1}x$ ، $-\infty<x<\infty$ و $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

د) $x=\cot y \Leftrightarrow y=\cot^{-1}x$ ، $-\infty<x<\infty$ و $0<y<\pi$

ه) $x=\sec y \Leftrightarrow y=\sec^{-1}x$ ، $|x|\geq 1$ و $y\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3\pi}{2})$

و) $x=\csc y \Leftrightarrow y=\csc^{-1}x$ ، $|x|\geq 1$ و $y\in(0,\frac{\pi}{2}]\cup(\pi,\frac{3\pi}{2}]$

مثال ۱۲. مطلوب است $\operatorname{arc\,sec}(-\sqrt{2})$

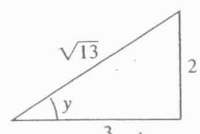
حل. فرض کنید $y=\operatorname{arc\,sec}(-\sqrt{2})$ پس $\sec y=-\sqrt{2}$ یا $\cos y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. تنها عدد y در $[0,\frac{\pi}{2})$ یا $[\pi,\frac{3\pi}{2})$ برقرار در شرط داده شده عبارت است از $y=\frac{5\pi}{4}$.

چون $\sec\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}$ داریم $\operatorname{arc\,sec}(-\sqrt{2})=\frac{5\pi}{4}$

مثال ۱۳. مطلوب است $\cos(\tan^{-1}\frac{2}{3})$

حل. فرض کنید $y=\tan^{-1}\frac{2}{3}$ پس $\frac{2}{3}=\tan y$. با استفاده از مثلث در شکل (۱۲) داریم

$$\cos(\tan^{-1}\frac{2}{3})=\cos y$$
$$=\frac{3}{\sqrt{13}}$$



شکل ۱۲

مثال ۱۴. مطلوب است $\cos(\sin^{-1}1)$

حل. چون $\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$ پس

$$\cos(\sin^{-1}1)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

تابع معکوس تانژانت در کاربردها دارای اهمیت زیاد است.

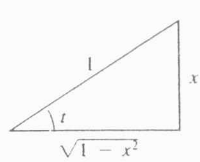
مثال ۱۵. اگر $t=\sin^{-1}x$ باشد، می‌توان x را به عنوان ضلع روبرو به زاویه t در مثلث قائم الزاویه با طول وتر واحد در نظر گرفت، شکل (۱۳). در این صورت ضلع دیگر $\sqrt{1-x^2}$ است. پس

$$\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

بنابراین

$$\sin^{-1}x=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (۱۲)$$

نتیجه مشابهی می‌توان برای $\cos^{-1}x$ به دست آورد.



شکل ۱۳

اگرچه فرمول (۱۲) از یک مثلث با $\frac{\pi}{2}>t>0$ حاصل شد، نتیجه برای $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ نیز معتبر است.

تبصره ۱۳. برد یک تابع معکوس مثلثاتی می‌توانند به دلخواه ادامه یابد زیرا یک تابع مثلثاتی دارای یک معکوس روی هر فاصله‌ای از محور xها است که روی آن تابع یک به یک باشد. برای مثال، دامنه $y=\sin x$ را به $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ می‌توان محدود کرد و حاصل $y=\sin^{-1}x$ برای $1\ge|x|$ دارای برد $\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{3\pi}{2}$ است. برد توابع در قسمت‌های (الف) تا (د) تعریف (۱۲) به تمام اعداد حقیقی می‌توانند توسیع یابد اما با تکرار یک قسمت مثلاً $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ برای $y=\sin^{-1}x$.

۳.۱.۶ مشتق و انتگرال شامل توابع معکوس مثلثاتی

مشتقات. مشتق یک تابع معکوس مثلثاتی را می‌توان با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی به دست آورد. تابع معکوس تانژانت و تابع معکوس کتانژانت با توجه به شکل‌های این توابع و قضایای مشتق، همواره برای هر x مشتق‌پذیرند. اما چهار تابع معکوس مثلثاتی در $x=-1$ یا $x=1$ مشتق‌پذیر نیستند.

تابع معکوس سینوس ۱۴. برای $-1<x<1$ و $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ داریم

$$y=\sin^{-1}x \iff x=\sin y$$

پس با مشتق‌گیری ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}\sin y$$

$$1=\frac{dy}{dx}\cos y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y} \qquad (۱۳)$$

برای محدوده داده شده روی y داریم $\cos y>0$ و $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ پس با جاگذاری در (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (۱۴)$$

باید دقت کرد که (۱۴) در $x=-1$ و $x=1$ تعریف نشده است.

تابع معکوس تانژانت ۱۵. برای $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ داریم

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$$

و بنابراین

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} \tan y$$

$$1 = \frac{dy}{dx} \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \qquad (۱۵)$$

چون $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ پس (۱۵) نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad (۱۶)$$

تابع معکوس سکانت ۱۶. برای $|x| > 1$ و $0 < y < \frac{\pi}{2}$ یا $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$

$$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow x = \sec y$$

با مشتق‌گیری داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \qquad (۱۷)$$

با توجه به محدوده y،

$$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \qquad |x| > 1$$

پس از (۱۷) داریم

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (۱۸)$$

البته، رابطه (۱۸) با شکل (۱۱-ب) سازگار است. شیب خط مماس به نمودار برای $x < -1$ منفی و برای $x > 1$ مثبت است.

مشتق ترکیب یک تابع معکوس مثلثاتی با تابع مشتق‌پذیر $u = g(x)$ از قانون زنجیره‌ای حاصل می‌شود

$$۱)\quad \frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad (2$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad (3$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad (4$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad (5$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad (6$$

مثال ۱۶. مطلوب است مشتق $y=\sin^{-1}5x$

حل. از (۱) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\frac{d}{dx}5x = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

مثال ۱۷. مطلوب است مشتق $y=\tan^{-1}\sqrt{2x+1}$

حل.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\sqrt{2x+1})^2}\frac{d}{dx}(2x+1)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{1+(2x+1)}\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}\cdot 2$$

$$= \frac{1}{(2x+2)\sqrt{2x+1}}$$

مثال ۱۸. مطلوب است مشتق $y=\sec^{-1}x^2$

حل. برای $x^2>1$ داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}}\frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}}$$

$$= \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

انتگرال‌ها ۱۷. از فرمول‌های مشتق‌گیری، انتگرال‌های معادلی به دست می‌آید

با توجه به فرمول های مشتق گیری از توابع معکوس مثلثاتی، فرمول های زیر برای انتگرال ها حاصل می شوند.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C \qquad (۱۹)$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C \qquad (۲۰)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C \qquad (۲۱)$$

باید دقت کرد که در فرمول های (۱۹) و (۲۱) تحدیدهایی برای u وجود دارند. در (۱۹) باید $|u|<1$ باشد و در (۲۱) داریم $|u|>1$.

مثال ۱۹. مطلوب است $\int \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}}$

حل. از عدد ۱۰۰ فاکتور می گیریم و با قراردادن $u = \frac{x}{10}$ ، $du = \frac{dx}{10}$ از فرمول (۱۹) داریم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{1}{10} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{10})^2}}$$

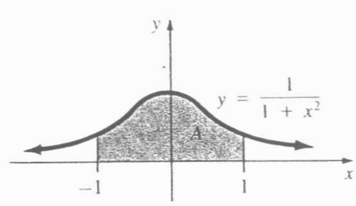
$$= \int \frac{\frac{dx}{10}}{\sqrt{1-(\frac{x}{10})^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C = \sin^{-1}\frac{x}{10} + C$$

مثال ۲۰. مساحت محصور به نمودار $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ روی $[-1, 1]$ را بدست آورید.

حل. از شکل (۱۴)، دیده می شود که f تابعی نامنفی است، پس

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_{-1}^{1} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$



شکل ۱۴

مثال ۲۱. مطلوب است $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$.

حل. دیده می‌شود که انتگرال به شکل فرمول‌های (۱۹) - (۲۱) نیست. اگر قرار دهیم

$$u=\tan^{-1}x, \quad du=\frac{dx}{1+x^2}$$

پس

$$\int\frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{(\tan^{-1}x)^3}{3}+C$$

۱۸. انتگرال توابع گویا. وقتی به مسئله یافتن $\int f(x)\,dx$ توجه داریم که در آن $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا است، از قاعده زیر استفاده می‌کنیم.

اگر درجه $P(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه $Q(x)$ باشد، قبل از انجام انتگرال‌گیری، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، یعنی

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\text{یک چندجمله‌ای}+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

که در آن درجه $R(x)$ کوچکتر از درجه $Q(x)$ است.

مثال ۲۲. مطلوب است $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

حل. ابتدا تقسیم در انتگرالده را انجام می‌دهیم

$$\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$$

پس

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=x-\tan^{-1}x+C$$

برای راحتی در محاسبات، انتگرال‌ها در فرمول‌های (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) را توسیع می‌دهیم. برای $a>0$ داریم

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\frac{u}{a}+C \qquad (۲۲)$$

$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C \qquad (۲۳)$$

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+C \qquad (۲۴)$$

مثال ۲۳. مطلوب است $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-16}}$

حل. مشاهده می‌شود که انتگرال به فرم یکی از فرمول‌های (۲۲)-(۲۴) نیست اما با ضرب صورت و مخرج انتگرال ده در x داریم

$$u=x^2, \quad du=2xdx \quad , \quad a=4$$

پس از (۲۴) داریم

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-16}} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2\sqrt{x^4-16}}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-4^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\sec^{-1}\frac{u}{4}+c$$
$$= \frac{1}{8}\sec^{-1}\frac{x^2}{4}+c$$

تکمیل مربعات ۱۹. برای رسیدن به فرمول‌های انتگرال‌گیری (۲۴)-(۲۲)، گاهی لازم است که عبارت‌ها را به مربعات کامل تبدیل کنیم. از جبر مقدماتی می‌دانیم که برای مربع کامل کردن عبارت x^2+bx جمله‌ای را اضافه و کم می‌کنیم. یعنی

$$x^2+bx = x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$=\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}$$

مثال ۲۴. مطلوب است $\int \frac{dx}{x^2+12x+37}$

حل. ابتدا در مخرج عبارت را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم

$$x^2+12x+37 = (x^2+12x)+37$$
$$=(x^2+12x+36-36)+37$$
$$=(x^2+12+36)+1$$
$$=(x+6)^2+1$$

حال با فرض $u=x+6$, $du=dx$ از (۲۳) داریم

$$\int \frac{dx}{x^2+12x+37} = \int \frac{dx}{(x+6)^2+1}$$
$$= \int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= \tan^{-1} u + C$$
$$= \tan^{-1}(x+6) + C$$

برای کامل کردن مربعات عبارت a^2x^2+bx ، $a \neq 1$ داریم

$$ax^2+bx = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$$

سپس جمله $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ را به داخل پرانتز اضافه و کم می‌کنیم.

$$ax^2+bx = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$$
$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$$

مثال ۲۵. مطلوب است $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$

حل. ابتدا از فرمول تکمیل به مربعات استفاده می‌کنیم

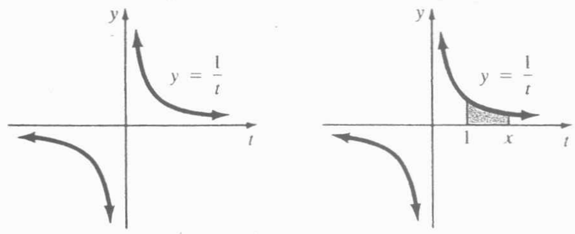
$$4-6x-9x^2 = 4-(9x^2+6x)$$
$$= 4-9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)$$
$$= 5-(3x+1)^2$$

با $u=3x+1$ ، $du=3dx$ و $a=\sqrt{5}$ داریم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{\sqrt{5-(3x+1)^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-u^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}} + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x+1}{\sqrt{5}} + C$$

۲.۶ تابع لگاریتم طبیعی

نمودار تابع $y=\frac{1}{t}$ که در $t=0$ ناپیوسته است، در شکل (۱۵) نمایش داده شده است. همان گونه که در شکل (۱۵-ب) دیده می‌شود، برای $t>0$ داریم $\frac{1}{t}>0$ پس مساحت محصور به نمودار روی فاصله $[1,x]$ توسط $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ به دست می‌آید.



(الف) (ب)
شکل ۱۵

تعریف ۲۰. تابع لگاریتم طبیعی را با $\ln x$ نمایش داده و توسط

$$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (۲۵)$$

برای $x>0$ تعریف می‌شود.

مثال ۲۶. مقدار $\ln 2$ را تخمین بزنید.

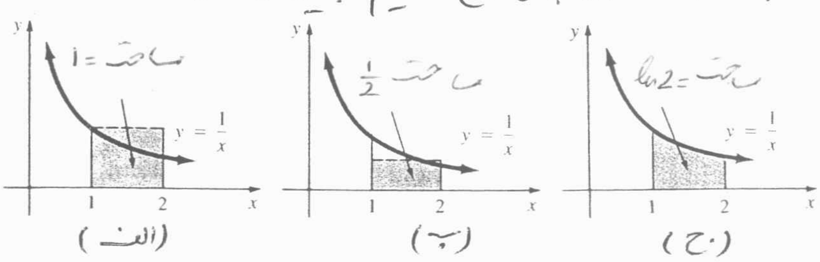
حل. از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای برای تخمین $\int_1^2 \frac{dt}{t}$ استفاده می‌کنیم.

$$\ln 2=\int_1^2 \frac{dt}{t} \simeq 0.6949$$

مساحت نشان داده شده در شکل (۱۶) را در نظر بگیرید. می‌توان نامساوی زیر برای مقدار $\ln 2$ را داشت

$$\frac{1}{2}<\ln 2<1 \qquad (۲۶)$$

نتیجه در (۲۶) را به طور نموداری برای تابع لگاریتم طبیعی می‌توان به دست آورد.



(الف) (ب) (ج)
شکل ۱۶

مشتق $\ln x$. ۲۱. مشتق تابع لگاریتم طبیعی را می‌توان از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آورد. یادآوری می‌کنیم که $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. بنابراین $\frac{d}{dx}\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{x}$ به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}, \quad x>0 \qquad (۲۷)$$

توجه کنید که در (۲۵) و (۲۷) پاسخ به یکی از سؤالات مطرح شده برای انتگرال را به دست می‌دهد. یعنی تابع لگاریتم طبیعی، تابع اولیه x^{-1} است. نتیجه به دست آمده در (۲۷) را می‌توان با استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای ترکیب تابع لگاریتم طبیعی و یک تابع مشتق‌پذیر مثبت $u = g(x)$ تعمیم داد.

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \quad u>0 \qquad (۲۸)$$

خواص لگاریتم طبیعی ۲۲. از قانون بیان شده در (۲۸) برای اثبات خواص لگاریتم طبیعی که در قضیه بعد خلاصه شده‌اند، استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲۳. فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند و فرض کنید t یک عدد گویا است آن‌گاه

الف) $\ln ab = \ln a + \ln b$

ب) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

ج) $\ln a^t = t \ln a$

اثبات. الف) تابع $F(x) = \ln ax$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(x)=\ln x$. پس

$$F'(x) = \frac{1}{ax}\cdot\frac{d}{dx}(ax)$$
$$= \frac{a}{ax}$$
$$= \frac{1}{x} = f'(x)$$

پس ثابت c وجود دارد به طوری که

$$F(x) = f(x) + C$$

چون $\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$ پس

$$F(1) = f(1) + C$$

$$\ln a = \ln 1 + C$$

بنابراین $C = \ln a$. درنتیجه $F(x) = \ln x + \ln a$ با جایگزینی $x = b$ داریم

$$\ln ab = \ln b + \ln a = \ln a + \ln b$$

ج) دو تابع $F(x) = \ln x^t$ و $G(x) = t \ln x$ را در نظر بگیرید که در آن t عددی گویا است پس

$$F'(x) = \frac{1}{x^t} \cdot t x^{t-1} = \frac{t}{x}$$

$$G'(x) = \frac{t}{x}$$

عدد ثابت C وجود دارد به طوری که $F(x) = G(x) + C$، حال از $F(1) = G(1) + C$ داریم $\ln 1 = t \ln 1 + C$ یعنی $C = 0$. حال با جایگزینی $x = a$ در $\ln x^t = t \ln x$ داریم

$$\ln a^t = t \ln a$$

اثبات قسمت (ب)، با توجه به (الف) و (ج) حاصل می‌شود (تمرین).

۲۴. نمودار $\ln x$. ابتدا مشاهده می‌کنیم که

$$\ln 1 = 0 \tag{۲۹}$$

یعنی نمودار $y = \ln x$ محور xها را در $(1, 0)$ قطع می‌کند. حال

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} > 0, \qquad x > 0 \tag{۳۰}$$

پس $y = \ln x$ تابعی صعودی روی $(0, \infty)$ است، علاوه بر آن

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad x > 0 \tag{۳۱}$$

پس نمودار $y = \ln x$ روی $(0, \infty)$ دارای تحدب به طرف پایین است. همچنین وقتی n یک عدد صحیح است، قسمت (ج) قضیه (۲۲) و نامساوی (۲۶) نتیجه می‌دهد که

$$\ln 2^n = n\ln 2 > \frac{n}{2} \qquad (۳۲)$$

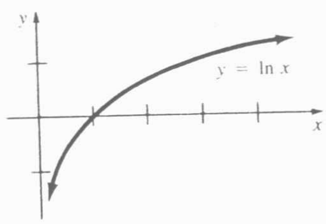
از (۳۲) نتیجه می‌گیریم که $\ln x$ را می‌توان با انتخاب x به اندازه کافی بزرگ، بزرگ گردانید

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad (۳۳)$$

نهایتاً، چون $\ln x = -\ln(\frac{1}{x})$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ داریم

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad (۳۴)$$

با قرار دادن اطلاعات بدست آمده در یک جدول نمودار شکل (۱۷ - الف) برای تابع $y=\ln x$ به دست می‌آید. البته می‌توانیم با استفاده از تقریب $\ln 2$ در مثال (۲۶) برخی انقاط تقریبی نمودار را نیز تعیین کنیم که در (۱۷ - ب) آورده شده است.

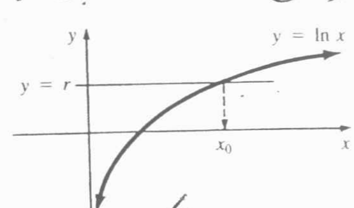


x	$\ln x$
$\frac{1}{4}$	$-2\ln 2 \approx -1.39$
$\frac{1}{2}$	$-\ln 2 \approx -0.69$
4	$2\ln 2 \approx 1.39$
8	$3\ln 2 \approx 2.08$
64	$6\ln 2 \approx 4.17$

(الف) شکل ۱۷ (ب)

تابع معکوس $y=\ln x$

با درنظر گرفتن نمودار تابع لگاریتم طبیعی، دیده می‌شود که تابع لگاریتم طبیعی یک به یک است. برای هر عدد حقیقی r، تنها یک مقدار x_0 وجود دارد به طوری که $\ln x_0 = r$. شکل (۱۸) را ببینید. علاوه بر آن تابع برای $x>0$ صعودی است، پس تابع لگاریتم طبیعی دارای وارون است. این تابع معکوس در بخش بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.



شکل ۱۸

گرچه دامنه تعریف تابع لگاریتم طبیعی $y=\ln x$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است، دامنه $y=\ln|x|$ به مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز $x=0$ توسیع می‌یابد. علاوه بر آن

$$x>0, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$x<0, \quad \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{(-x)}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

پس

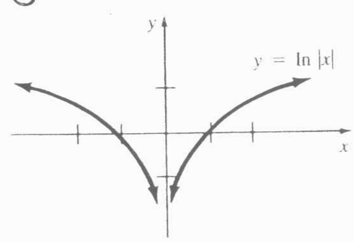
$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x\neq 0 \qquad (۳۵)$$

مثال ۲۷. شیب خط مماس بر نمودار $y=\ln|x|$ در $x=2$ و $x=-2$ را بدست آورید.

حل. از (۳۵) داریم $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$، پس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=\frac{1}{2}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2}=-\frac{1}{2}$$

همانگونه که در شکل (۱۹) دیده می‌شود نمودار $y=\ln|x|$ نسبت به محور yها متقارن است.



شکل ۱۹

وقتی $u=g(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، از قانون زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad u\neq 0 \qquad (۳۶)$$

مثال ۲۸. مشتق گیری کنید. (الف) $y=\ln(2x-3)$ و (ب) $y=\ln|2x-3|$.

حل. الف) برای $2x-3>0$ از ( ) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{2}{x-3} \qquad (۳۷)$$

ب) برای $2x-3\neq 0$ از (۳۶) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{2}{x-3} \qquad (۳۸)$$

گرچه (۳۷) و (۳۸) یکسان هستند، اما اساساً یک تابع نیستند. تفاوت آنها ساده است، دامنه در (۳۷) برابر $(\frac{3}{2},\infty)$ است درحالی که دامنه در (۳۸) مجموعه اعداد حقیقی بجز $x=\frac{3}{2}$ است.

مثال ۲۹. مطلوب است مشتق $y=\ln|\sin x|$.

حل. برای $\sin x \neq 0$ از (۳۶) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\sin x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

مثال ۳۰. مطلوب است مشتق $y = \ln x^3$.

حل. چون x^3 باید مثبت باشد پس $x > 0$ است. بنابراین

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3}\frac{d}{dx}x^3 = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

مثال ۳۱. توابع $f(x) = \ln x^4$ و $g(x) = 4\ln x$ یکسان نیستند، چون برای هر $x \neq 0$، $x^4 > 0$ پس دامنه f تمام اعداد حقیقی غیر $x = 0$ است. دامنه g بازه $(0, \infty)$ است. بنابراین

$$f'(x) = \frac{4}{x}, \qquad x \neq 0$$

درحالی که

$$g'(x) = \frac{4}{x}, \qquad x > 0$$

مثال ۳۲. مطلوب است مشتق $y = \ln \dfrac{x^{1/2}(2x+7)^4}{(3x^2+1)^2}$

حل. با استفاده از خواص لگاریتم، برای $x > 0$ داریم

$$\begin{aligned} y &= \ln x^{1/2}(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 \\ &= \ln x^{1/2} + \ln(2x+7)^4 - \ln(3x^2+1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln x + 4\ln(2x+7) - 2\ln(3x^2+1) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + 4\cdot\frac{1}{2x+7}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{3x^2+1}\cdot 6x \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{8}{2x+7} - \frac{12x}{3x^2+1} \end{aligned}$$

مثال ۳۳. مطلوب است مشتق $y = \ln(\ln x)$

حل. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$$

تبصره ۲۵. در کار کردن با لگاریتم باید به موارد زیر دقت کرد.

$\ln x^2$ با $(\ln x)^2$ یکسان نیست

$\ln(x^2+4)$ با $\ln x^2+\ln 4$ یکسان نیست

$\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(3x+2)}$ با $\ln(x+1)-\ln(3x+2)$ یکسان نیست

$\ln\dfrac{x}{x+1}$ با $\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$ یکسان نیست.

۳.۶ تابع نمائی

در بخش (۲.۶) مشاهده کردیم که $y=\ln x$ تابعی یک به یک است و در نتیجه دارای یک معکوس است. معکوس تابع لگاریتم طبیعی را با $y=\exp x$ نشان داده و آن را تابع نمائی یا تابع نمائی طبیعی نامیم.

تعریف ۲۶. $y=\exp x \iff x=\ln y$

دامنه و برد ۲۷. چون دامنه تابع لگاریتم طبیعی مجموعه اعداد حقیقی مثبت است پس برد تابع نمائی مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\exp x>0 \qquad \forall x$$

به طور مشابه، چون مقادیر $y=\ln x$ می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، پس دامنه $y=\exp x$ مجموعه اعداد حقیقی است. $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$. در ضمن

$$\ln(\exp x)=x \quad \forall x, \qquad \exp(\ln x)=x, \quad x>0 \qquad (۳۹)$$

عدد e. ۲۸. عدد $\exp 1$ یک عدد مهم در ریاضیات است و آن را با نماد e نشان می‌دهیم.

$$e=\exp 1$$

می‌توان نشان داد که e با دوازده رقم اعشار عبارت است از

$$e = 2.718281828459$$

عدد e مشابه با عدد π یک عدد گنگ است و $2.7 < e < 2.8$.

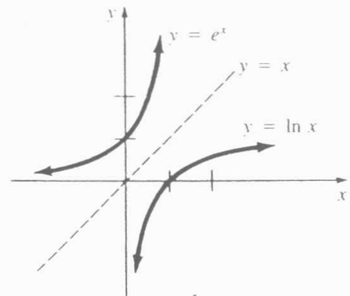
نمودار $y = e^x$

چون $y = e^x$ تابع معکوس تابع لگاریتم طبیعی است، نمودار آن را با انعکاس نمودار $y = \ln x$ نسبت به خط $y = x$ به دست آورد. بالاخص توجه داریم که

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty, \quad \Rightarrow \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

نمودارهای $y = \ln x$ و $y = e^x$ در شکل (۲۰) نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲۰

قضیه ۲۸. فرض کنید r و s اعداد حقیقی دلخواه و t عددی گویا است. در این صورت

الف) $e^0 = 1$

ب) $e^1 = e$

ج) $e^r e^s = e^{r+s}$

د) $\dfrac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$

هـ) $(e^r)^t = e^{rt}$

و) $e^{-r} = \dfrac{1}{e^r}$

اثبات. الف) $e^0 = 1$ زیرا $\ln 1 = 0$

د) فرض کنید $M = e^r$ و $N = e^s$ پس $r = \ln M$ و $s = \ln N$. حال از قانون خارج قسمت

برای لگاریتم طبیعی داریم

$$\ln\frac{M}{N} = \ln M - \ln N = r - s$$

بنابراین

$$\frac{M}{N} = e^{r-s} \Rightarrow \frac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$$

هـ) فرض کنید $M = e^{-r}$. بنابراین

$$\ln M = -r$$

$$-\ln M = r$$

$$\ln M^{-1} = r$$

$$\ln\frac{1}{M} = r$$

$$\frac{1}{M} = e^r$$

یعنی $M = \frac{1}{e^r}$ یا $e^{-r} = \frac{1}{e^r}$.

اثبات های دیگر قسمت ها به عنوان تمرین واگذار می شود.

حال از (۳۹) می دانیم که $\ln(\exp x) = x$ و بنابراین $\ln(\exp 1) = 1$ یعنی

(۴۱) $$\ln e = 1$$

اگر t عددی گویا باشد، از (۴۱) و (ج) قضیه (۲۳) برای لگاریتم طبیعی داریم

(۴۲) $$\ln e^t = t\ln e = t.1 = t$$

اما با توجه به تعریف (۲۴)، رابطه (۴۲) معادل است با

(۴۳) $$e^t = \exp t$$

با توجه به (۴۳) از e^x برای هر عدد حقیقی x بجای $\exp x$ استفاده می کنیم.

تعریف ۲۹. برای هر عدد حقیقی x

$$e^x = \exp x$$

تابع $y = e^x$ را تابع نمائی با پایه e نامیم، عدد x را نما و e را پایه گوئیم، در زیر مطالب بیان شده برای تابع نمائی را با نماد e بیان می کنیم.

(۴۴) $y=e^x$ اگر و تنها اگر $x=\ln y$

(۴۵) $y=e^x$ معکوس $y=\ln x$ است.

(۴۶) دامنه $y=e^x$ مجموعه $(-\infty,\infty)$ است.

(۴۷) برد $y=e^x$ مجموعه $(0,\infty)$ است یعنی برای هر x، $e^x>0$.

(۴۸) برای هر x، $\ln e^x = x$

(۴۹) برای هر $x>0$، $e^{\ln x}=x$.

مقادیر عددی e^x در جدولی محاسبه شده است و در ماشین های حساب کلیدی برای محاسبه e^x وجود دارد.

مثال ۳۴. از ماشین حساب دیده می شود که

$$e^2 \simeq 7.3891$$

مثال ۳۵. اگر $y>0$ یک عدد باشد به طوری که $\ln y=-1$ آن گاه (۴۴) نتیجه می دهد $y=e^{-1}$. از قسمت (ج) قضیه (۲۸) داریم

$$y=\frac{1}{e}$$

و از (۴۰) داریم

$$e^{-1}\simeq 0.3679$$

مشتق e^x.

می دانیم که اگر $y=e^x$ آن گاه $\ln y=x$. با مشتق گیری از این معادله نسبت به x داریم $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1$ یا $\frac{dy}{dx}=y$، چون $y=e^x$ پس

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x \tag{۵۰}$$

با استفاده از قانون زنجیره ای

$$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx} \tag{۵۱}$$

که در آن $u=g(x)$ تابعی مشتق پذیر است.

مثال ۳۶. مطلوب است مشتق $y=e^{4x}$.

حل. از (۵۱) داریم

$$\frac{dy}{dx} = e^{4x}\cdot\frac{d}{dx}(4x) = e^{4x}(4) = 4e^{4x}$$

مثال ۳۷. مطلوب است مشتق $y=e^{1/x^3}$.

حل. از (۵۱) داریم

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^3}\cdot\frac{d}{dx}(x^{-3}) = e^{1/x^3}(-3x^{-4}) = -\frac{3e^{1/x^3}}{x^4}$$

مثال ۳۸. مطلوب است مشتق $y=\ln(e^{4x}+e^{-4x})$

حل.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{4x}+e^{-4x}}\,\frac{d}{dx}(e^{4x}+e^{-4x})$$

$$= \frac{1}{e^{4x}+e^{-4x}}\cdot(4e^{4x}-4e^{-4x}) = \frac{4(e^{4x}-e^{-4x})}{e^{4x}+e^{-4x}}$$

مثال ۳۹. شیب خط مماس بر نمودار $y=e^{2\sqrt{x}}\ln 3x$ را در $x=1$ به دست آورید.

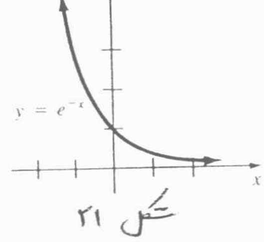
حل. از قاعدهٔ حاصل‌ضرب داریم

$$\frac{dy}{dx} = e^{2\sqrt{x}}\frac{1}{3x}\cdot 3 + \ln 3x\cdot e^{2\sqrt{x}}\,2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

پس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = e^{2} + e^{2}\ln 3 = e^{2}(1+\ln 3)$$

مثال ۴۰. مشتق $f(x)=e^{kx}$ برابر $f'(x)=ke^{kx}$. چون $e^{kx}>0$ پس برای $k<0$ داریم $f'(x)<0$ و برای $k>0$ داریم $f'(x)>0$. این نشان می‌دهد که f روی $(-\infty,\infty)$ صعودی است برای $k>0$ و تابعی نزولی است هرگاه $k<0$. نمودار f در شکل (۲۱) برای حالت $k=-1$ رسم شده است.



شکل ۲۱

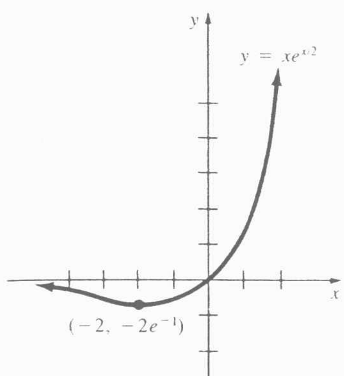
مثال ۱۴. نمودار $y=xe^{x/2}$ را رسم کنید.

حل. چون $f(0)=0$ پس نمودار از مبداء می‌گذرد. هیچ محل تلاقی دیگری وجود ندارد.

وقتی $x<0$ داریم $y<0$ و برای $x>0$ داریم $y>0$. از طرفی

$$\frac{dy}{dx}=xe^{x/2}\cdot\frac{1}{2}+e^{x/2}$$
$$=\frac{1}{2}e^{x/2}(x+2)$$

نتیجه اگر آن را برابر صفر می‌گذاریم، حاصل نقطه بحرانی -2 است. زیرا برای $x<-2$ داریم $\frac{dy}{dx}<0$
و برای $x>-2$ داریم $\frac{dy}{dx}>0$. پس از آزمون مشتق اول نتیجه می‌شود که $f(-2)=-2e^{-1}$
می‌نیمم نسبی است. نمودار در شکل (۲۲) آورده شده است.



شکل ۲۲

تبصره ۳۰. عدد e را می‌توان به صورت یک حد بیان کرد. در فصل‌های بعد ثابت می‌کنیم

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=0 \qquad (۵۲)$$

این حد نتایج مهمی دارد و باید بخاطر سپرده شود. اغلب حد در (۵۲) به عنوان تعریف عدد e اختیار می‌شود. اگر فرض کنیم $n=\frac{1}{h}$، $h>0$ آن‌گاه وقتی $h\to 0$ داریم $n\to\infty$.
بنابراین (۵۲) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \qquad (۵۳)$$

در جدول برخی از تقریب‌ها برای حد در (۵۳) آمده است.

h	$(1+h)^{1/h}$
0.1	2.5937425
0.01	2.7048138
0.001	2.7169238
0.0001	2.7181459
0.00001	2.7182546
−0.0001	2.7184177
−0.00001	2.7182818

تبصره ۲۱. اعداد e و π را متعالی گوییم. یک عدد متعالی عددی است که ریشه هیچ معادله چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نمی‌باشد. برای مثال $\sqrt{2}$ یک عدد گنگ است اما متعالی نیست زیرا ریشه چندجمله‌ای $x^2-2=0$ است. اثبات اینکه e یک عدد متعالی است توسط ریاضیدان فرانسوی چارلز هرمیت در 1873 ارائه شده درحالی که نه سال بعد متعالی بودن π توسط ریاضیدان آلمانی فردیناند لیندمن به اثبات رسید.

۴.۶ انتگرال‌هایی شامل توابع لگاریتمی و نمایی

به عنوان نتیجه‌ای از فرمول‌های ( ) و ( ) از بخش (۲.۶)، تابع اولیه یا انتگرال نامعین لگاریتم طبیعی را به صورت زیر داریم

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (۵۴)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \qquad (۵۵)$$

به طور مشابه

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad (۵۶)$$

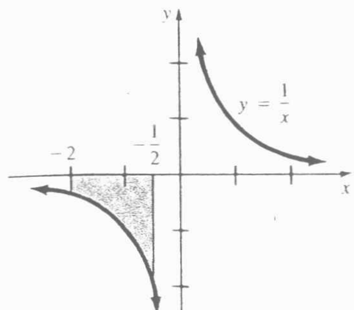
$$\int e^u\,du = e^u + C \qquad (۵۷)$$

مثال ۴۲. مساحت A ناحیه محصور به نمودار $y=\frac{1}{x}$ و محور xها روی فاصله $[-2,-\frac{1}{2}]$ را به دست آورید.

حل. چون روی این فاصله $f(x)=\frac{1}{x}<0$ پس

$$A=\int_{-2}^{-1/2}\left|\frac{1}{x}\right|dx$$
$$=-\int_{-2}^{-1/2}\frac{1}{x}\,dx$$
$$=-\ln|x|\Big|_{-2}^{-1/2}$$
$$=-\ln\left|\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\ln|(-2)|$$
$$=\ln 2-(\ln 1-\ln 2)$$
$$=2\ln 2\simeq 1.3863$$

مساحت در شکل (۲۳) نمایش داده شده است .



شکل ۲۳

مثال ۴۳ . مطلوب است $\int \frac{dx}{x-7}$

حل . اگر $u=x-7$ آنگاه $du=dx$ پس

$$\int\frac{dx}{x-7}=\int\frac{du}{u}$$
$$=\ln|u|+C$$
$$=\ln|x-7|+C$$

مثال ۴۴ . مطلوب است $\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$

حل . اگر $u=x^3+5$ ، آنگاه $du=3x^2dx$ ، پس

$$\int\frac{x^2}{x^3+5}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+5}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}$$
$$=\frac{1}{3}\ln|u|+C$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x^3+5|+C$$

مثال ۴۵. مطلوب است $\int \frac{dx}{1+e^{-2x}}$

حل. انتگرال داده شده به فرم (۵۵) نیست. به هر حال اگر صورت و مخرج را در e^{2x} ضرب کنیم، داریم

$$\int \frac{dx}{1+e^{-2x}} = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$$

حال اگر $u=e^{2x}+1$ آنگاه $du=2e^{2x}dx$، پس

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^{-2x}} &= \int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C
\end{aligned}$$

توجه کنید که قدر مطلق را می‌توانیم حذف کنیم زیرا $e^{2x}+1>0$ است.

مثال ۴۶. مطلوب است $\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$

حل. گرچه این انتگرال شبیه به انتگرال در مثال (۴۵) است، مشاهده می‌شود که $e^{2x}=(e^{x})^{2}$

پس اگر $u=e^{x}$ آنگاه $du=e^{x}dx$، پس

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx &= \int \frac{du}{1+u^{2}} \\
&= \tan^{-1}u+C \\
&= \tan^{-1}e^{x}+C
\end{aligned}$$

مثال ۴۷. مطلوب است $\int e^{5x}dx$

حل. فرض کنید $u=5x$ پس $du=5dx$ و داریم

$$\begin{aligned}
\int e^{5x}dx &= \frac{1}{5}\int e^{5x}(5dx) \\
&= \frac{1}{5}\int e^{u}du \\
&= \frac{1}{5}e^{u}+C=\frac{1}{5}e^{5x}+C
\end{aligned}$$

مثال ۴۸. مطلوب است $\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx$

حل. با استفاده از $u=\frac{4}{x}$ ، $du=-\frac{4}{x^2}dx$ داریم

$$\int \frac{e^{4/x}}{x^2}dx = -\frac{1}{4}\int e^{4/x}\left(-\frac{4}{x^2}dx\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\int e^u du$$
$$= -\frac{1}{4} e^u + C$$
$$= -\frac{1}{4} e^{4/x} + C$$

مثال ۴۹. مطلوب است $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

حل. انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int (1+e^x)^{-1/2} e^x dx$$

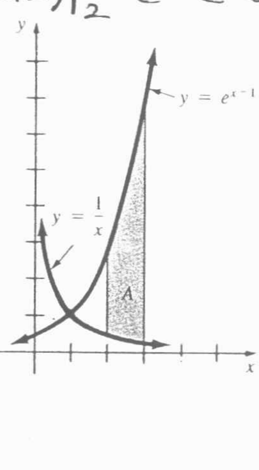
فرض کنید $u=1+e^x$ پس $du=e^x dx$ داریم

$$\int (1+e^x)^{-1/2} e^x dx = \int u^{-1/2} du$$
$$= 2u^{1/2} + C$$
$$= 2(1+e^x)^{1/2} + C$$

مثال ۵۰. مساحت A ناحیه محصور به نمودارهای $y=e^{x-1}$ و $y=\frac{1}{x}$ روی فاصله $[2,3]$ را بدست آورید.

حل. اگر توابع را با $f(x)=e^{x-1}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ در شکل (۲۴) نشان دهیم. در این صورت روی فاصله $[2,3]$ ، $f(x)-g(x)\geq 0$ پس

$$A=\int_2^3\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\left(e^{x-1}-\ln x\right)\Big|_2^3=e^2-e-\ln 3+\ln 2\simeq 4.2653$$



شکل ۲۴

فرمول های انتگرال گیری زیر، ارتباط برخی از توابع مثلثاتی و توابع لگاریتم طبیعی را بیان می‌کنند.

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad (۵۸)$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C \qquad (۵۹)$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad (۶۰)$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \qquad (۶۱)$$

برای بدست آوردن (۵۸)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= -\int \frac{(-\sin x)\,dx}{\cos x} \\ &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

برای اثبات (۶۰) از مشتق استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln|\sec x + \tan x| &= \frac{1}{\sec x + \tan x}\,\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) \\ &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \\ &= \frac{(\sec x)(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x\end{aligned}$$

پس $\ln|\sec x + \tan x|$ تابع اولیه $\sec x$ است.

هر یک از فرمول های بالا را می‌توان با توجه به قانون زنجیره‌ای به فرم کلی نوشت.

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C \qquad (۶۲)$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C \qquad (۶۳)$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad (۶۴)$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C \qquad (۶۵)$$

که در آنها $u = g(x)$ و $du = g'(x)\,dx$ است.

مثال ۵۱. مطلوب است $\int x \sec x^2 dx$

حل. فرض کنید $u = x^2$ و $du = 2x dx$، پس

$$\int x \sec^2 x dx = \frac{1}{2} \int (\sec x^2)(2x dx)$$
$$= \frac{1}{2} \int \sec u \, du$$
$$= \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$$
$$= \frac{1}{2} \ln |\sec x^2 + \tan x^2| + C$$

۵.۶ توابع نمایی و لگاریتمی با پایه‌های دیگر

با توجه به خاصیت

$$a^t = e^{\ln a^t} = e^{t \ln a}$$

که در آن t عددی گویا و $a > 0$ است تعریف زیر را داریم.

تعریف ۳۲. فرض کنید r عدد حقیقی دلخواه و $a > 0$ است در این صورت تعریف می‌کنیم

$$a^r = e^{r \ln a} \qquad (۴۴)$$

استفاده صریح از (۴۴) به ما مفهوم a^r برای r گنگ را نتیجه می‌دهد.

مثال ۵۲. الف) $5^\pi = e^{\pi \ln 5}$ ب) $10^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 10}$

در اینجا می‌توانیم مثال‌های جالبی را به دست آوریم، اما سؤالی که قبل از آن مطرح می‌شود این است که کمیت $10^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 10}$ چیست؟

قوانین نماها ۳۳. فرض کنید r و s اعداد حقیقی اند، برای $a > 0$

الف) $a^0 = 1$ ب) $a^1 = a$

ج) $a^r a^s = a^{r+s}$ د) $(ab)^r = a^r b^r$

ه) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ و) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

ز) $(a^r)^s = a^{rs}$ ح) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

اثبات. (ج) از (۶۶) داریم

$$a^r = e^{r\ln a} \qquad a^s = e^{s\ln a}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a^r a^s &= e^{r\ln a} e^{s\ln a} \\ &= e^{r\ln a + s\ln a} \\ &= e^{(r+s)\ln a} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

از تعریف (۳۲) می‌توانیم خاصیت (ج) از قوانین لگاریتم طبیعی را به حالتی که نما یک عدد گنگ است، تعمیم دهیم.

قضیه ۳۴. فرض کنید r عددی حقیقی است. برای $a>0$ داریم

$$\ln a^r = r\ln a$$

اثبات. چون $y=e^x$ معادل $\ln y = x$ است، دیده می‌شود که $a^r = e^{r\ln a}$ نتیجه می‌دهد $\ln a^r = r\ln a$.

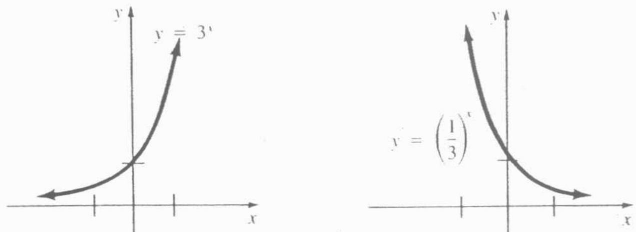
تابع نمائی با پایه a. ۳۵. قبلاً دیدیم که $y=e^x$ تابعی مشتق‌پذیر است که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی است. بطور مشابه از تعریف (۳۲) نتیجه می‌شود که

$$f(x) = a^x, \quad a>0 \tag{۶۷}$$

نیز یک تابع مشتق‌پذیر با همان دامنه تعریف است. گوئیم f یک تابع نمائی با پایه a است. علاوه بر آن چون $y=e^{kx}$ برای $k>0$ صعودی است، از (۶۶) نتیجه می‌شود که برای $a>1$ داریم $\ln a>0$ پس $f(x)=a^x$ تابعی صعودی روی $(-\infty,\infty)$ است.
برای $0<a<1$ داریم $\ln a<0$ پس $f(x)=a^x$ تابعی نزولی است. نمودارهای توابع

نمایی برای این دو حالت، شبیه به نمودارهای e^x و e^{-x} ، به ترتیب می‌باشند. نمودارهای

$y=3^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x=3^{-x}$ در شکل (۲۵) نمایش داده شده‌اند.



(الف) شکل ۲۵ (ب)

مشتق تابع نمایی ۳۶. مشتق a^x از مشتق e^u به دست می‌آید.

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{x\ln a}$$
$$=e^{x\ln a}\frac{d}{dx}x\ln a$$
$$=e^{x\ln a}\ln a \qquad (۶۸)$$

با استفاده از (۶۶) و (۶۸) داریم

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a \qquad (۶۹)$$

در (۶۹) می‌توان دید که عدد e مهم است. مشتق تابع نمایی با پایه‌ای غیر از e دارای عامل $\ln a$ است.

قانون زنجیره‌ای بیان می‌کند که اگر $u=g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}a^u=a^u\frac{du}{dx}\ln a \qquad (۷۰)$$

توجه کنید وقتی $a=e$ داریم $\ln e=1$ و (۶۹) و (۷۰) به فرمول‌های (۵۰) و (۵۱) از بخش (۳.۶) تبدیل می‌شوند.

مثال ۵۳. مشتق $y=10^x$ را به دست آورید.

حل. $\frac{dy}{dx}=10^x\ln 10$

مثال ۵۴. مشتق $y = 3^{\cos 5x}$ را بدست آورید.

حل.
$$\frac{dy}{dx} = 3^{\cos 5x}\left(\frac{d}{dx}\cos 5x\right)\ln 3$$
$$= 3^{\cos 5x}(-5\sin 5x)\ln 3$$

مثال ۵۵. مشتق $y = 5^{x^3}e^{-x^2}$ را بدست آورید.

حل. از قاعده ضرب داریم
$$\frac{dy}{dx} = 5^{x^3}\frac{d}{dx}e^{-x^2} + e^{-x^2}\frac{d}{dx}5^{x^3}$$
$$= 5^{x^3}(-2xe^{-x^2}) + e^{-x^2}(5^{x^3}3x^2\ln 5)$$
$$= 5^{x^3}e^{-x^2}(-2x + 3x^2\ln 5)$$

با مشتق گیری می‌توان دید که

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (۷۱)$$
$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (۷۲)$$

مثال ۵۶. مطلوب است $\int 8^x dx$

حل. از (۷۱) داریم
$$\int 8^x dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C$$

مثال ۵۷. مطلوب است $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

حل. با $a=2$ ، $u = x^{1/2}$ ، $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$ ، از (۷۲) داریم
$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}dx\right)$$
$$= 2\int 2^u du$$
$$= 2\left(\frac{2^u}{\ln 2}\right) + C$$
$$= 2\left(2^{\sqrt{x}}\frac{1}{\ln 2}\right) + C$$
$$= \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2} + C$$

در قضیه بعد قانون توان برای مشتق از هر نمای حقیقی، گویا یا گنگ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳۷ . اگر r عددی حقیقی باشد آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}x^r = r x^{r-1} \qquad (۷۳)$$

اثبات. با توجه به تعریف (۳۲)،

$$x^r = e^{r\ln x}$$

پس

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^r &= e^{r\ln x}\frac{d}{dx}(r\ln x)\\ &= \frac{r}{x}e^{r\ln x}\\ &= \frac{r}{x}x^r\\ &= r x^{r-1}\end{aligned}$$

در ضمن (۷۳) را می‌توان با گرفتن لگاریتم از دو طرف $y=x^r$ به دست آورد.

مثال ۵۸ . مشتق بگیرید. (الف) $y=\sqrt{3}^{\,x}$ (ب) $y=x^{\sqrt{3}}$.

حل. الف)

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}^{\,x}\ln\sqrt{3}$$

ب)

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$$

با توجه به قانون زنجیره‌ای می‌توان (۷۳) را توسیع داد.

مثال ۵۹ . مشتق بگیرید. $y=(x^4+e^{-3x})^e$

حل.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e(x^4+e^{-3x})^{e-1}\frac{d}{dx}(x^4+e^{-3x})\\ &= e(x^4+e^{-3x})^{e-1}(4x^3-3e^{-3x})\end{aligned}$$

با توجه به (۷۳) و تعریف اساسی لگاریتم‌های طبیعی، می‌توان $\int x^r dx$ را برای هر نمای

حقیقی r را به دست آورد.

$$\int x^r dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1}+C & r\neq -1 \\ \ln|x|+C & r=-1 \end{cases} \qquad (74)$$

مثال ۶۰. مطلوب است $\int x^{\pi} dx$

حل. از (۷۴) داریم

$$\int x^{\pi} dx = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}+C$$

تابع لگاریتمی با پایه a. ۲۸. وقتی پایه a مثبت و $a\neq 1$ است، تابع نمائی $y=a^x$ یک به یک می‌باشد و بنابراین دارای یک تابع معکوس است که آن را با $y=\log_a x$ نمایش می‌دهیم. این تابع را تابع لگاریتم با پایه a نامیم. پس

$$y=\log_a x \iff x=a^y \qquad (75)$$

چون برد تابع نمائی برابر دامنه تابع معکوس آن است، پس دامنه تابع لگاریتمی مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. با توجه به توضیحات بیان شده در بخش‌های قبل برای تابع نمائی در پایه e و لگاریتم طبیعی داریم

$$\ln x = \log_e x$$

قوانین لگاریتم‌ها. ۳۹. قوانین لگاریتم‌ها بیان شده برای $\ln x$ برای $\log_a x$ نیز برقرار است. برای $b>0$، $a>0$ و $a\neq 1$ داریم

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

که در آن r هر عددی دلخواهی است.

مشتق $\log_a x$. ۴۰. برای یافتن مشتق تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ از طرفین $x=a^y$ لگاریتم طبیعی می‌گیریم، داریم

$$\ln x = y\ln a$$

و با مشتق گیری ضمنی داریم

$$\frac{1}{x} = \frac{dy}{dx} \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \qquad (۷۵)$$

و با توجه به قانون زنجیره‌ای، اگر $u = g(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، آن گاه

$$\frac{d}{dx} \log_a |u| = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} \qquad (۷۶)$$

وقتی در (۷٤)، $a = 10$ است، لگاریتم $\log_{10} x$ لگاریتم مشترک عدد x است.

مثال ۶۱. شیب خط مماس به نمودار $y = \log_{10} x$ در $x = \frac{1}{2}$ را بدست آورید.

حل. از (۷۵) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$$

پس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{2}{\ln 10} \simeq 0.8686$$

مثال ۶۲. از $y = \log_5 |x^3 - x|$ مشتق بگیرید.

حل. از (۷۶) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^3 - x) \ln 5} \cdot \frac{d}{dx}(x^3 - x)$$

$$= \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x) \ln 5}$$

مثال ۶۳. مشتق $y = \log_2 [x^4 (x^2+1)^\pi]$ را بدست آورید.

حل. از قانون لگاریتم‌ها داریم $y = 4 \log_2 |x| + \pi \log_2 (x^2+1)$ چون $x^4 = |x|^4$ و $(x^2+1) > 0$

پس از (۷۶) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x \ln 2} + \frac{2\pi x}{(x^2+1) \ln 2}$$

۶.۹ مشتق‌گیری لگاریتمی

از خاصیت مقدماتی لگاریتم طبیعی می‌دانیم که اگر $b>0$ و $a>0$ و $a=b$ آن‌گاه $\ln a=\ln b$. این مطلب در یافتن مشتقات عبارات پیچیده‌تر بسیار مفید است.

مثال ۴۴. مشتق تابع زیر را به دست آورید.

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^4+6x^2}\,(8x+3)^5}{(2x^2+7)^{2/3}}$$

حل. می‌توانیم با به کارگیری مشتق خارج قسمت، حاصل‌ضرب و توان مشتق عبارت بالا را به دست آوریم. در اینجا از قدر مطلق طرفین لگاریتم می‌گیریم، آن را ساده کرده و سپس به طور ضمنی مشتق می‌گیریم.

$$\ln|y|=\ln\sqrt[3]{x^4+6x^2}+\ln|8x+3|^5-\ln(2x^2+7)^{2/3}$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x^4+6x^2)+5\ln|8x+3|-\frac{2}{3}\ln(2x^2+7)$$

با مشتق‌گیری ضمنی داریم

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4+6x^2}\cdot(4x^3+12x)+5\cdot\frac{1}{8x+3}\cdot 8$$
$$-\frac{2}{3}\,\frac{1}{2x^2+7}\cdot 4x$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{4x^3+12x}{3(x^4+6x^2)}+\frac{40}{8x+3}-\frac{8x}{3(2x^2+7)}\right]$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^4+6x^2}\,(8x+3)^5}{(2x^2+7)^{2/3}}\left[\frac{4x^3+12x}{3(x^4+6x^2)}+\frac{40}{8x+3}-\frac{8x}{3(2x^2+7)}\right]$$

روش به کار برده شده در مثال قبل را مشتق‌گیری لگاریتمی نامیم. در بخش (۵.۹) یادآور شدیم که اگر f تابعی به فرم

$$y=(\text{متغیر})^{\text{ثابت}}$$

باشد که در آن ثابت هر عدد حقیقی است، می‌توان از قانون توان مشتق عبارت را به دست آورد. مشتق لگاریتمی برای یافتن مشتق عبارتی به صورت

$$y = (\text{متغیر})^{\text{متغیر}}$$

به کار می‌رود.

مثال ۴۵. مشتق تابع $y = x^{\sqrt{x}}$ برای $x > 0$ را به دست آورید.

حل. از طرفین عبارت لگاریتم می‌گیریم، داریم

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

حال با مشتق‌گیری ضمنی داریم

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$= x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\ln x\right]$$

امکان دارد که نیاز به لگاریتم‌گیری بیشتر از یک دفعه برای یافتن مشتق داشته باشیم.

مثال ۴۶. مشتق $y = (x^2+1)^{(x+1)^x}$ برای $x > -1$ را به دست آورید.

حل. چون معادله $\ln y = (x+1)^x \ln(x^2+1)$ مجدداً شامل یک متغیر در پایه و متغیر در توان است، مجدداً لگاریتم می‌گیریم

$$\ln(\ln y) = \ln\left((x+1)^x \ln(x^2+1)\right)$$

$$= x\ln(x+1) + \ln(\ln(x^2+1))$$

پس

$$\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x+1} + \ln(x+1) + \frac{1}{\ln(x^2+1)}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\ln y\left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) + \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\right]$$

$$= (x^2+1)^{(x+1)^x}(x+1)^x\ln(x^2+1)\left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1) + \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\right]$$

۷.۶ توابع هذلولوی (هایپربولیک)

تعریف ۴۱. برای هر عدد حقیقی x ، سینوس هذلولوی x یا سینوس هایپربولیک x توسط

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

و کسینوس هذلولوی x یا کسینوس هایپربولیک x توسط

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

تعریف می‌شوند.

شبیه به دیگر توابع مثلثاتی که برحسب $\sin x$ و $\cos x$ تعریف می‌شوند، می‌توانیم چهار تابع هذلولوی دیگر را برحسب $\sinh x$ و $\cosh x$ تعریف کنیم.

تعریف ۴۲. برای هر عدد حقیقی x ،

الف) تانژانت هذلولوی (تانژانت هایپربولیک) x عبارت است از:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

ب) کتانژانت هذلولوی (کتانژانت هایپربولیک) x عبارت است از:

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

ج) سکانت هذلولوی (سکانت هایپربولیک) x عبارت است از:

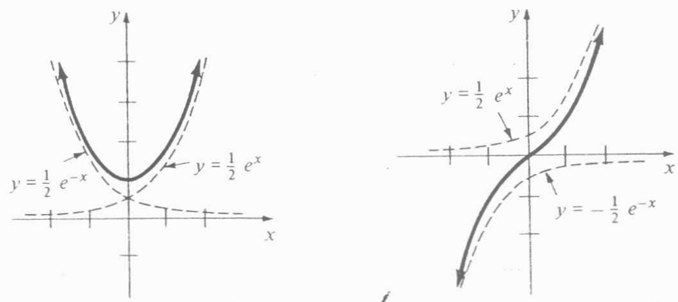
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

د) کسکانت هذلولوی (کسکانت هایپربولیک) x عبارت است از:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}} \qquad x \neq 0$$

نمودارها ۴۳. نمودارهای سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی را می‌توان با جمع عرض‌های توابع e^{x} و e^{-x} به دست آورد. در شکل (۲۶-الف) نمودار $y = \cosh x$ را با رسم

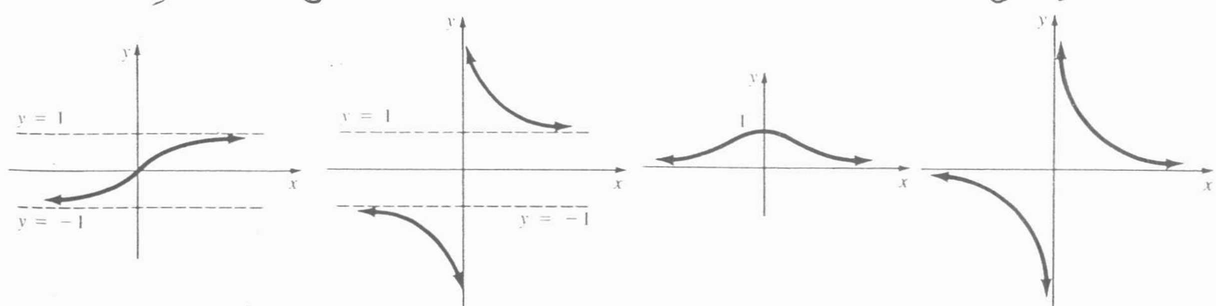
نمودارهای $\frac{1}{2}e^{x}$ و $\frac{1}{2}e^{-x}$ و سپس جمع مختصات y در هر نقطه نمایش داده شده است. به طور مشابه، نمودار $y=\sinh x$ در شکل (۲۶-ب) با جمع مختصات y نقاط روی نمودارهای $\frac{1}{2}e^{x}$ و $-\frac{1}{2}e^{-x}$ به دست آمده است.



الف) $y = \cosh x$ ب) $y = \sinh x$

شکل ۲۶

نمودارهای $\tanh x$، $\coth x$، $\operatorname{sech} x$ و $\operatorname{csch} x$ در شکل (۲۷) نمایش داده شده‌اند.



الف) $y = \tanh x$ ب) $y = \coth x$ ج) $y = \operatorname{sech} x$ د) $y = \operatorname{csch} x$

شکل ۲۷

اتحادها و روابط ۴۴. بسیاری از اتحادهای مربوط به توابع هذلولوی مشابه با توابع مثلثاتی است. با توجه به نمودارها در شکل (۲۶-الف) و (۲۶-ب)، این توابع به ترتیب نسبت به محور yها و مبداء متقارن هستند. به عبارت دیگر $y=\cosh x$ یک تابع زوج و $y=\sinh x$ یک تابع فرد است.

$$\cosh(-x)=\cosh x \qquad (۷۷)$$

$$\sinh(-x)=-\sinh x \qquad (۷۸)$$

اتحاد اساسی در مثلثات $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ است. برای توابع هذلولوی اتحاد مشابهی به صورت زیر برقرار است

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \qquad (۷۹)$$

برای اثبات این اتحاد، از تعریف $\cosh x$ و $\sinh x$ استفاده می‌کنیم:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{4}{4} = 1$$

اثبات‌های (۷۷) و (۷۸) و اتحادهای زیر به عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

$$1-\tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \qquad (۸۰)$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \qquad (۸۱)$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \qquad (۸۲)$$

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \qquad (۸۳)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \qquad (۸۴)$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \qquad (۸۵)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \qquad (۸۶)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \qquad (۸۷)$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x) \qquad (۸۸)$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(-1+\cosh 2x) \qquad (۸۹)$$

مشتق توابع هذلولوی ۴۵. مشتق‌های توابع هذلولوی از مشتق تابع نمائی و قوانین مشتق‌گیری به دست می‌آید. به عنوان مثال

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right]$$
$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$= \cosh x$$

به طور مشابه با توجه به تعریف کسینوس هذلولوی داریم

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

برای مشتق گیری از تابع‌های هذلولوی، از قانون خارج قسمت و اتحاد (۷۹) استفاده می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$= \frac{\cosh x \frac{d}{dx}\sinh x - \sinh x \frac{d}{dx}\cosh x}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$= \operatorname{sech}^2 x$$

مشتقات شش تابع هذلولوی با توجه به قانون زنجیره‌ای در حالت کلی به دست می‌آید. فرض کنید $u = g(x)$ تابعی مشتق پذیر است

الف) $\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$

ب) $\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$

ج) $\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$

د) $\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$

هـ) $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$

و) $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

مثال ۴۷. مشتق $y = \sinh\sqrt{2x+1}$ را به دست آورید.

حل. $\frac{dy}{dx} = \cosh\sqrt{2x+1}\left(\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} \times 2\right) = \frac{\cosh\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

مثال ۴۸. مشتق $y = \coth x^3$ را به دست آورید.

حل. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x^3 \times (3x^2)$

مثال ۶۹. مشتق $y=\dfrac{3x}{4+\cosh 2x}$ را در $x=0$ به دست آورید.

حل. از قانون خارج قسمت داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(4+\cosh 2x)(3)-3x(\sinh 2x)(2)}{(4+\cosh 2x)^2}$$

برای $x=0$ داریم

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

زیرا $\sinh 0=0$ و $\cosh 0=1$.

انتگرال های توابع هذلولوی ۴۶. فرمول های انتگرال با توجه به فرمول های مشتق گیری به صورت زیر خلاصه شده اند.

الف) $\int \cosh u\,du=\sinh u+C$

ب) $\int \sinh u\,du=\cosh u+C$

ج) $\int \operatorname{sech}^2 u\,du=\tanh u+C$

د) $\int \operatorname{csch}^2 u\,du=-\coth u+C$

هـ) $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du=-\operatorname{sech} u+C$

و) $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du=-\operatorname{csch} u+C$

مثال ۷۰. مطلوب است $\int \cosh 5x\,dx$

حل. اگر $u=5x$ آنگاه $du=5dx$ و از (الف) داریم

$$\int \cosh 5x\,dx=\frac{1}{5}\int \cosh 5x\,(5dx)$$
$$=\frac{1}{5}\int \cosh u\,du$$
$$=\frac{1}{5}\sinh u+C=\frac{1}{5}\sinh 5x+C$$

مثال ۷۱. مطلوب است $\int x\operatorname{csch} x^2\coth x^2\,dx$.

حل. اگر $u=x^2$ آنگاه $du=2x\,dx$. از (۲) داریم

$$\int x\,\mathrm{csch}\,x^2\,\mathrm{cth}\,x^2\,dx=\frac{1}{2}\int \mathrm{csch}\,x^2\,\mathrm{cth}\,x^2\,(2x\,dx)$$
$$=\frac{1}{2}\int \mathrm{csch}\,u\,\mathrm{cth}\,u\,du$$
$$=-\frac{1}{2}\,\mathrm{csch}\,x^2+C$$

مثال ۷۴. مطلوب است $\int \tanh x\,dx$.

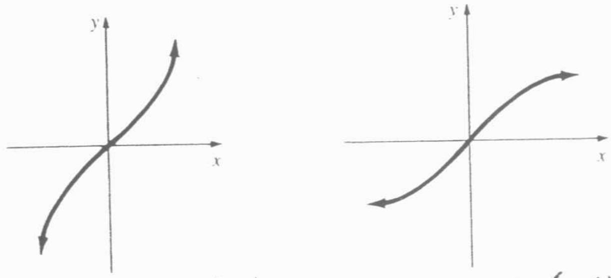
حل. با فرض $u=\cosh x$ داریم $du=\sinh x\,dx$. پس

$$\int \tanh x\,dx=\int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx$$
$$=\int \frac{du}{u}$$
$$=\ln|u|+C$$
$$=\ln(\cosh x)+C$$

زیرا برای هر x حقیقی، $\cosh x>0$ است.

۸.۶ توابع معکوس هذلولوی

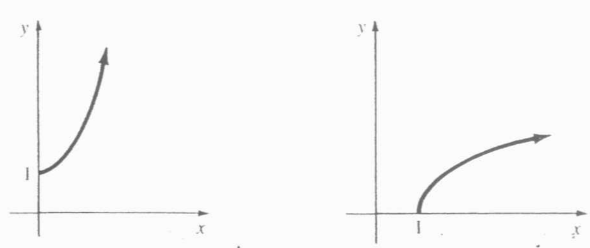
برای هر عدد حقیقی y در برد تابع سینوس هذلولوی، یک و فقط یک عدد حقیقی x در دامنه آن وجود دارد که سینوس هذلولوی آن برابر y است. به عبارت دیگر $y=\sinh x$ تابعی یک به یک و بنابراین معکوس‌پذیر است. تابع معکوس آن را به صورت $y=\sinh^{-1}x$ می‌نویسیم، به عبارت دیگر $y=\sinh^{-1}x$ معادل با $x=\sinh y$ است. نمودارهای $y=\sinh x$ و $y=\sinh^{-1}x$ در شکل (۲۸) نشان داده می‌شوند.



$y = \sinh x$ (الف) $y = \sinh^{-1} x$ (ب)

شکل ۲۸

اما کسینوس هذلولوی تابعی یک به یک نیست و بنابراین دارای یک تابع معکوس نمی‌باشد، مگر اینکه دامنه آن را محدود کنیم. در شکل (۲۹) تابع $y=\cosh x$ با دامنه تحدید شده به $x\geq 0$ ($y\geq 1$) نمایش داده شده است، در این حالت تابع معکوس آن یعنی $y=\cosh^{-1}x$ برای $x\geq 1$ ($y\geq 0$) تعریف می‌شود.



$y = \cosh x,\ x \geq 0$ (الف) $y = \cosh^{-1} x,\ x \geq 1$ (ب)

شکل ۲۹

تعاریف شش تابع معکوس هذلولوی با تحدیدهای مناسب روی متغیر x در زیر آمده است.

تعریف ۴۷. توابع معکوس هذلولوی

الف) $y=\sinh^{-1}x$ اگر و تنها اگر $x=\sinh y$

ب) $y=\cosh^{-1}x$ اگر و تنها اگر $x=\cosh y$ ، $x\geqslant 1$

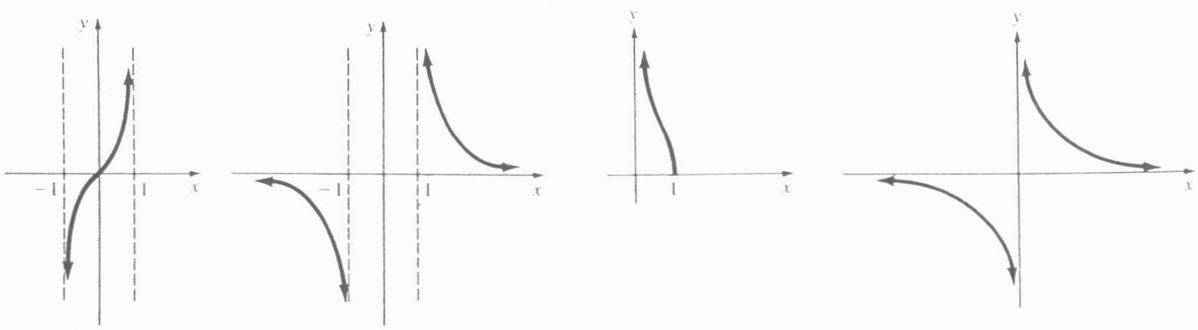
ج) $y=\tanh^{-1}x$ اگر و تنها اگر $x=\tanh y$ ، $|x|<1$

د) $y=\coth^{-1}x$ اگر و تنها اگر $x=\coth y$ ، $|x|>1$

ه) $y=\operatorname{sech}^{-1}x$ اگر و تنها اگر $x=\operatorname{sech} y$ ، $0<x\leq 1$

و) $y=\operatorname{csch}^{-1}x$ اگر و تنها اگر $x=\operatorname{csch} y$ ، $x\neq 0$

نمودارهای چهار تابع آخر از تعریف (۴۷) در شکل (۳۰) نمایش داده شده‌اند.



$y=\tanh^{-1}x,\ |x|<1$ $\quad$ $y=\coth^{-1}x,\ |x|>1$ $\quad$ $y=\operatorname{sech}^{-1}x,\ 0<x\leq 1$ $\quad$ $y=\operatorname{csch}^{-1}x,\ x\neq 0$

شکل ۳۰

توابع معکوس هذلولوی به عنوان لگاریتم‌ها ۴۸. چون تمام توابع هذلولوی برحسب ترکیبات e^x تعریف شده‌اند، نباید دور از انتظار باشد که توابع معکوس هذلولوی را بتوان برحسب لگاریتم طبیعی شرح داد. برای مثال $y=\sinh^{-1}x$ معادل است با

$$x=\sinh y$$

$$x=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

$$2x=\frac{e^{2y}-1}{e^{y}}$$

یا $e^{2y}-2xe^{y}-1=0$ ، به عنوان یک تابع درجه دوم برحسب e^{y} داریم

$$e^{y}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}$$

$$=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

چون $e^y>0$ و $x-\sqrt{x^2-1}<0$ پس جواب بدست آمده شامل علامت منفی حذف می‌شود. یعنی

$$e^y = x+\sqrt{x^2+1}$$

یا

$$y=\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

به طور مشابه برای $y=\tanh^{-1}x,\ |x|<1$ داریم

$$x=\tanh y=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$$

پس

$$e^y(1-x)=(1+x)e^{-y}$$

$$e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$2y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

یا

$$y=\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

در اینجا دو نتیجه در قضیه زیر را ثابت کردیم. اثبات بقیه حالات به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیه ۴۹.

الف) $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ب) $\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ ، $x\geq 1$

ج) $\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ، $|x|<1$

د) $\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ، $|x|>1$

ه) $\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ ، $0<x\leq 1$

و) $\operatorname{csch}^{-1}x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$ ، $x\neq 0$

مشتق‌ها ۵. برای یافتن مشتق یک تابع معکوس هذلولوی، به دو طریق می‌توان عمل کرد. برای مثال، اگر

$$y=\sinh^{-1}x$$

آن گاه طبق تعریف

$$x=\sinh y$$

با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\sinh y)$$

$$1=\cosh y\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh y}=\frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. بنابراین از مشتق لگاریتم، نتیجه می‌شود

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

در اینجا یک حالت خاص از نتایج زیر را ثابت کردیم. اثبات بقیه قسمت‌ها به عنوان تمرین واگذار می‌شود. تابع $u=g(x)$ مشتق‌پذیر است، داریم

الف) $\dfrac{d}{dx}\sinh^{-1}u=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

ب) $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}u=\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx},\quad u>1$

ج) $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1}u=\dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx},\quad |u|<1$

د) $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1}u=\dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx},\quad |u|>1$

هـ) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}u=\dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx},\quad 0<u<1$

و) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}u=\dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx},\quad u\neq 0$

مثال ۷۳. مشتق $y=\cosh^{-1}(x^2+5)$ را بدست آورید.

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+5)^2-1}}(2x)$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^4+10x^2+24}}$$

مثال ۷۴. مشتق $y=\tanh^{-1}4x$ را بدست آورید.

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-(4x)^2}(4)=\frac{4}{1-16x^2}$$

مثال ۷۵. مشتق $y=e^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x$ را بدست آورید.

حل.

$$\frac{dy}{dx}=e^{x^2}\left(\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}\right)+2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x$$

$$=-\frac{e^{x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}+2xe^{x^2}\operatorname{sech}^{-1}x$$

انتگرال‌ها ۵۱. با توجه به فرمول‌های مشتق‌گیری توابع معکوس هذلولوی، فرمول‌های زیر برای انتگرال‌گیری به دست می‌آیند.

الف) $$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\sinh^{-1}\frac{u}{a}+C$$

ب) $$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{u}{a}+C \quad ,\quad u>a>0$$

ج) $$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\begin{cases}\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}+C & |u|<a\\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a}+C & |u|>a\end{cases}$$

مثال ۷۶. مطلوب است $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

حل. با فرض $a=1$ ، $u=\sqrt{3}\,x$ و $du=\sqrt{3}\,dx$ داریم

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh^{-1}u+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh^{-1}\sqrt{3}\,x+C$$

مثال ۷۷. مطلوب است $\int \frac{dx}{9-x^2}$

حل. با $u=x$ و $a=3$ داریم

$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{3}\tanh^{-1}\frac{x}{3} + C & |x|<3 \\ \frac{1}{3}\coth^{-1}\frac{x}{3} + C & |x|>3 \end{cases}$$

گاهی اوقات فرمول‌های انتگرال‌گیری در (الف) - (ج) را برحسب فرم لگاریتم توابع معکوس هذلولوی می‌نویسیم. وقتی a ثابت مثبت است، داریم

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + C \qquad (۹۰)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right) + C \qquad u>a>0 \qquad (۹۱)$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C & |u|<a \\ \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right) + C & |u|>a \end{cases} \qquad (۹۲)$$

توجه کنید که انتگرال آخر (۹۲) را می‌توانیم به فرم فشرده زیر بنویسیم

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C, \quad |u| \neq a \qquad (۹۳)$$

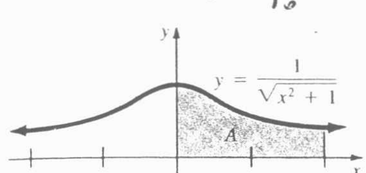
مثال . انتگرال مثال ( ) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int \frac{du}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$$

مثال. مساحت A محصور به نمودار $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ روی فاصله $[0,2]$ را بدست آورید.

حل. نمودار در شکل (۳۱) نشان داده شده است. چون تابع نامنفی است، پس

$$A = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^2 = \ln(2+\sqrt{5}) \simeq 1.4436$$



شکل ۳۱