فصل ۷ تکنیک های انتگرال گیری

در فصل های قبل، فرمول هایی برای انتگرال گیری به دست آوردیم. در این فصل، روش هایی برای محاسبه انتگرال ها یا تبدیل آنها به فرمول های انتگرال گیری خاص مطرح می کنیم. در جدول خلاصه ای از فرمول های انتگرال گیری به دست آمده در فصل ۵ و ۶ آورده شده است.

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + C$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \cosh u\,du = \sinh u + C$$

$$\int \sinh u\,du = \cosh u + C$$

$$\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C, & |u| < a \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C, & |u| > a \end{cases}$$

۷.۱ جانشانی های جبری

در فصل های قبل، از جانشانی $u=g(x)$ برای محاسبه یک انتگرال استفاده کردیم. به عنوان مثال $\int e^{x^2} x\,dx$ را با $u=x^2$ به $(\frac{1}{2})\int e^u\,du$ تبدیل نمودیم. در اینجا، ایده جانشانی u را به انتگرال هایی که به فرم $\int f(g(x))g'(x)dx$ هستند، توسیع می دهیم.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

حل. اگر قرار دهیم $u=x+1$ آنگاه $x=u-1$ و $dx=du$. پس

$$x^2=(u-1)^2=u^2-2u+1$$

$$\sqrt{x+1}=u^{1/2}$$

بنابراین

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx=\int (u^2-2u+1)\,u^{1/2}\,du$$

$$=\int \left(u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2}\right)du$$

$$=\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$=\frac{2}{7}(x+1)^{7/2}-\frac{4}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

انتخاب یک جانشانی برای بدست آوردن انتگرال، همواره واضح نیست. در حالت کلی، اگر انتگرالده شامل توانی از یک تابع باشد، ایده خوب برای انتخاب u همان تابع یا توان تابع است. در مثال (۱)، جانشانی دیگر $u=\sqrt{x+1}$ یا $u^2=x+1$ است که منجر به انتگرال $2\int(1-u^2)^2u^2\,du$ خواهد شد. برای محاسبه این انتگرال، از بسط انتگرالده و انتگرال‌گیری جمله به جمله استفاده می‌کنیم.

مثال ۲. مطلوب است محاسبه $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

حل. فرض کنید $u=\sqrt{x}$ پس $x=u^2$ و $dx=2u\,du$. بنابراین

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=\int\frac{2u\,du}{u^2+u}$$

$$=\int\frac{2\,du}{u+1}$$

$$=2\ln|u+1|+C$$

$$=2\ln(\sqrt{x}+1)+C$$

انتگرال‌هایی شامل عبارات درجه دوم ۱. همان‌گونه که در فصل (۶) دیدیم، اگر یک انتگرالده شامل عبارت درجه دوم ax^2+bx+c باشد، کامل کردن مربعات منجر به رسیدن به یک انتگرال می‌شود که جواب آن به صورت یک تابع معکوس مثلثاتی یا یک تابع معکوس هذلولوی است. البته، انتگرال‌هایی پیچیده‌تر می‌توانند به دیگر توابع برسند.

مثال ۳. مطلوب است محاسبه $\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx$

حل. بعد از کامل کردن مربعات، انتگرال به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2+9}\,dx$$

حال، اگر $u=x+3$ آنگاه $x=u-3$ و $du=dx$. پس

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9}\,du \\ &= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + \int \frac{du}{u^2+9} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+9}\,du + \int \frac{du}{u^2+9} \\ &= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left[(x+3)^2+9\right] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C\end{aligned}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه $\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$

حل. اگر $u=3x+2$ آنگاه $x=\frac{1}{3}(u-2)$ و $dx=\frac{1}{3}du$.

$$6x+1 = 2(u-2)+1 = 2u-3$$

$$\sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}$$

وقتی $x=0$ است، $u=2$ می‌باشد و برای $x=2$ داریم $u=8$. بنابراین با انتگرال‌گیری روی متغیر u نتیجه می‌شود

$$\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx = \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}}\,\frac{1}{3}\,du$$

$$= \int_2^8 \left(\frac{2}{3}u^{2/3} - u^{-1/3}\right) du$$
$$= \left(\frac{2}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Big]_2^8$$
$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3}\right)$$
$$= \frac{34}{5} - \frac{2}{5}\left(2^{5/3}\right) + \frac{3}{2}\left(2^{2/3}\right) \simeq 7.9112$$

۲.۷ انتگرال گیری جزء بجزء

فرض کنید $u=f(x)$ و $v=g(x)$ توابع مشتق پذیرند، طبق قانون حاصل ضرب داریم

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad (۱)$$

با انتگرال گیری از (۱) نتیجه می شود

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

پس

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (۲)$$

و فرمولی مفید در انتگرال گیری از حاصل ضرب ها است. روش فوق را انتگرال گیری جزء بجزء نامیم. ایده اصلی در (۲) برای محاسبه انتگرال $\int f(x)g'(x)dx$، محاسبه انتگرال دیگر $\int g(x)f'(x)dx$ است که لزوماً باید ساده تر باشد.

فرمول (۲) معمولاً برحسب دیفرانسیل های $du=f'(x)dx$ و $dv=g'(x)dx$ به صورت

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (۳)$$

است. برای به کار بردن این نتیجه، با انتگرال گیری از یک دیفرانسیل شروع می کنیم

مرحله ۲
دیفرانسیل گیری

$$\int u\,\boxed{dv} = \boxed{u}\,\boxed{v} - \int v\,du$$

مرحله ۱
انتگرال گیری

و در مرحله آخر، $\int v\,du$ را بدست می آوریم.

مثال ۵. مطلوب است $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

حل. انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int x(x+1)^{-1/2}dx$$

در این شکل نوشتن، چند انتخاب برای تابع dv داریم. مثلاً $dv=(x+1)^{-1/2}dx$ ، $dv=x\,dx$ یا به طور ساده $dv=dx$. انتخاب dv به انتگرال دوم در (۳) وابسته است، مخصوصاً اگر dv را به صورت زیر انتخاب کنیم

$dv=(x+1)^{-1/2}dx$	$u=x$
انتگرال می‌گیریم $\downarrow$	دیفرانسیل می‌گیریم $\downarrow$
$v=2(x+1)^{1/2}$	$du=dx$

با جایگزینی توابع در (۳) داریم

$$\int x(x+1)^{-1/2}dx = x\left[2(x+1)^{1/2}\right]-\int 2(x+1)^{1/2}dx$$
$$=2x(x+1)^{1/2}-2\left(\tfrac{2}{3}\right)(x+1)^{3/2}+C$$
$$=2x(x+1)^{1/2}-\tfrac{4}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

توجه کنید که نیازی به ذکر ثابت انتگرال گیری برای انتگرال گیری از dv نیست. ثابت در پایان مسئله آورده می‌شود. علاوه بر آن، انتخاب صحیح برای dv دارای اهمیت است. اگر انتخاب dv نادرست باشد، مسئله انتگرال گیری مشکل‌تر می‌شود، به عنوان مثال، اگر در مثال (۵) انتخاب به صورت زیر باشد

$$dv=x\,dx \qquad u=(x+1)^{-1/2}$$
$$v=\tfrac{1}{2}x^2 \qquad du=-\tfrac{1}{2}(x+1)^{-3/2}dx$$

و در نتیجه

$$\int x(x+1)^{-1/2}dx=\tfrac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2}+\tfrac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}dx$$

که $\int v\,du$ از انتگرال $\int u\,dv$ پیچیده‌تر می‌باشد. در ضمن انتخاب $dv=dx$ نیز مسئله

را تغییری نمی دهد، بلکه مشکل تر نیز می شود.

مثال ۶. مطلوب است محاسبه $\int x \tan^{-1}x\,dx$

حل. با انتخاب

$$dv = x\,dx \qquad u = \tan^{-1}x$$

$$v = \frac{x^2}{2} \qquad du = \frac{dx}{1+x^2}$$

از (۳) داریم

$$\int(\tan^{-1}x)(x\,dx) = (\tan^{-1}x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

برای محاسبه $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)}$، ابتدا در انتگرالده تقسیم را انجام می دهیم و سپس انتگرال گیری می کنیم. بنابراین

$$\int x \tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

مثال ۷. مطلوب است محاسبه $\int \sec^3x\,dx$

حل. در فرمول داده شده، انتخاب v واضح نیست. با نوشتن $\sec^3x = \sec x.\sec^2x$ داریم

$$dv = \sec^2x\,dx \qquad u = \sec x$$

$$v = \tan x \qquad du = \sec x \tan x\,dx$$

پس از فرمول (۳) داریم

$$\int \sec^3x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2x \sec x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int(\sec^2x - 1)\sec x\,dx$$
$$= \sec x \tan x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3x\,dx$$
$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3x\,dx$$

بنابراین

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

مثال ۸. مطلوب است $\int x^3 \ln x\,dx$

حل. فرض کنید

$$dv = x^3 dx \qquad u = \ln x$$

$$v = \frac{x^4}{4} \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

بنابراین

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

در برخی از مسائل، ممکن است نیاز به انجام چندین بار انتگرال گیری جزء به جزء باشد.

مثال ۹. مطلوب است $\int x^2 e^{-x} dx$

حل. فرض کنید

$$dv = e^{-x}dx \qquad u = x^2$$

$$v = -e^{-x} \qquad du = 2x\,dx$$

پس

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$$

در $\int x e^{-x} dx$، مجدداً از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم

$$dv = e^{-x}dx \qquad u = x$$

$$v = -e^{-x} \qquad du = dx$$

بنابراین

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx\right]$$
$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

به عنوان یک قانون، انتگرال های به نوع $\int x^k (\ln x)^n dx$ ، $\int x^n e^{kx} dx$ و $\int x^n \sin kx\, dx$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت و k ثابت است، نیاز به انجام روش جزء به جزء به تعداد n دفعه است.

مثال ۱۰. مطلوب است محاسبه $\int x \sin 3x\, dx$

حل. با انتخاب

$$u = x \qquad dv = \sin 3x\, dx$$
$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

داریم

$$\int x \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\, dx$$
$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$$

مثال ۱۱. مطلوب است محاسبه $\int e^{2x}\cos 3x\, dx$.

حل. فرض کنید

$$u = \cos 3x \qquad dv = e^{2x} dx$$
$$du = -3\sin 3x\, dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

بنابراین

$$\int e^{2x}\cos 3x\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\, dx \qquad (۴)$$

مجدداً برای $\int e^{2x}\sin 3x\, dx$ انتگرال گیری جزء به جزء را با انتخاب

$$dv = e^{2x}dx \qquad u = \sin 3x$$
$$v = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad du = 3\cos 3x\, dx$$

به کار می‌بریم. در نتیجه انتگرال در (۴) به صورت زیر است.

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

بنابراین

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x$$

یعنی

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + C$$

نکته ۲. در مثال (۱۱)، می‌توانید به دو صورت زیر کار کنید. در هر مورد انتگرال‌گیری را انجام دهید.

۱) در انتگرال اصلی $dv = \cos 3x\,dx$

در انتگرال دوم $dv = \sin 3x\,dx$

۲) در انتگرال اصلی $dv = e^{2x}dx$

در انتگرال دوم $dv = \sin 3x\,dx$

انتگرال معین ۳. یک انتگرال معین را می‌توان با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

مثال ۱۲. مساحت محصور به نمودار $y=\ln x$ روی فاصله $[1,e]$ را به دست آورید.

حل. از شکل (۱) دیده می‌شود که مساحت A توسط

$$A = \int_1^e \ln x\,dx$$

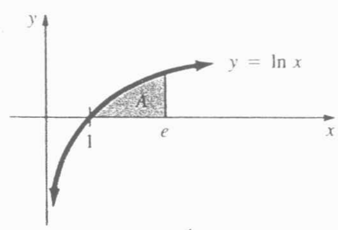
به دست می آید. برای محاسبه $\int_1^e \ln x\,dx$ از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم.

$$dv = dx \qquad u = \ln x$$
$$v = x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

پس

$$\begin{aligned}
A &= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx \\
&= x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e \\
&= e\ln e - \ln 1 - e + 1 = 1
\end{aligned}$$

زیرا $\ln e = 1$ و $\ln 1 = 0$.



شکل ۱

۳.۷ انتگرال گیری از توانهای توابع مثلثاتی

انتگرال هایی به فرم $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

با توجه به اتحادهای مثلثاتی می توانیم انتگرال هایی به صورت

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx \qquad (۵)$$

را محاسبه کنیم، دو حالت داریم.

حالت ۱. m یا n اعداد صحیح مثبت فرد باشد. مثلا فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت فرد است، قرار می دهیم

$$\sin^m x = \sin^{m-1} x \sin x$$

که در آن $m-1$ زوج است. از $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ در انتگرالده فرمول (۵) استفاده

کرده و حاصل جمعی از توان‌های $\cos x$ است که در $\sin x$ ضرب شده‌اند. این انتگرال داده شده به صورت یک مجموع از انتگرال‌ها است که هرکدام عاملی به صورت زیر است

$$\int \cos^k x \sin x \, dx = -\int \cos^k x (-\sin x) dx$$
$$= -\int u^k du$$

توجه کنید که لزوماً k یک عدد صحیح نیست

مثال ۱۳. مطلوب است محاسبه $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

حل.

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^4 x \sin x \, dx$$
$$= \int \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x \, dx$$
$$= \int \cos^2 x (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$
$$= \int \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$$
$$= -\int \cos^2 x (-\sin x) dx + 2\int \cos^4 x (-\sin x) dx$$
$$-\int \cos^6 x (-\sin x) dx$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

مثال ۱۴. مطلوب است $\int \sin^3 x \, dx$.

حل.

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$$
$$= \int \sin x \, dx + \int \cos^2 x (-\sin x) dx$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

اگر n عدد صحیح فرد باشد، روش محاسبه انتگرال به همان صورت است، با این تفاوت

که انتگرالده به صورت مجموعی از توان‌های $\sin x$ ضربدر $\cos x$ است.

مثال ۱۵. مطلوب است محاسبه $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$

حل.
$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\, dx$$
$$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x) \cos x\, dx$$
$$= \int \sin^4 x (\cos x)\, dx - \int \sin^6 x \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

حالت ۲) . m و n هر دو اعداد صحیح نامنفی زوج باشند.

وقتی m و n هر دو اعداد صحیح نامنفی زوج باشند، محاسبه انتگرال در (۵) با توجه به اتحادهای

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

انجام می‌پذیرد. در این وضعیت ممکن است چندین دفعه به انتگرال‌های خاص

$$\int \sin^2 x\, dx, \quad \int \cos^2 x\, dx$$

برخورد کنیم.

مثال ۱۶. مطلوب است محاسبه $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

حل.
$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) + C$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

روش دیگر:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

مثال ۱۷. مطلوب است $\int \cos^4 x\, dx$

حل.

$$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx$$
$$= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

روش بیان شده را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$			
	حالت	روش	اتحادهای مورد استفاده
I	m فرد	$u = \cos x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
	n فرد	$u = \sin x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
II	m و n زوج	توان‌های $\sin x$ و $\cos x$ را با استفاده از اتحادهای داده شده، کم می‌کنیم	$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

انتگرال هایی به صورت $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

برای محاسبه یک انتگرال به نوع

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx \qquad (6)$$

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت 1). m یک عدد صحیح مثبت فرد است. در این حالت $m-1$ زوج است.

با توجه به

$$\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \ \sec x \tan x$$

و $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$، انتگرال داده شده را می‌توان به صورت مجموع انتگرال‌هایی به صورت زیر نوشت

$$\int \underbrace{\sec^k x}_{u^k} \ \underbrace{\sec x \tan x \, dx}_{du} = \int u^k du$$

مثال ۱۸. مطلوب است محاسبه $\int \tan^3 x \sec^7 x \, dx$

حل.
$$\int \tan^3 x \sec^7 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^6 x \sec x \tan x \, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^6 x \sec x \tan x \, dx$$
$$= \int \underbrace{\sec^8 x}_{u^8} \underbrace{(\sec x \tan x) dx}_{du} - \int \underbrace{\sec^6 x}_{u^6} \underbrace{(\sec x \tan x) dx}_{du}$$
$$= \int u^8 du - \int u^6 du$$
$$= \frac{1}{9} u^9 - \frac{1}{7} u^7 + C$$
$$= \frac{1}{9} \sec^9 x - \frac{1}{7} \sec^7 x + C$$

حالت 2). n یک عدد صحیح مثبت زوج است. در این حالت روش محاسبه مشابه روش I برای انتگرال‌هایی از نوع داده شده در (5) است. از

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \ \sec^2 x$$

و اتحاد $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ استفاده می‌کنیم. می‌توان انتگرال را به صورت مجموع انتگرال‌هایی به صورت $\int \underbrace{\tan^k x}_{u^k} \ \underbrace{\sec^2 x dx}_{du} = \int u^k du$ نوشت.

مثال ۱۹. مطلوب است محاسبه $\int\sqrt{\tan x}\,\sec^4 x\,dx$.

حل.
$$\int\sqrt{\tan x}\,\sec^4 x\,dx=\int(\tan x)^{1/2}\sec^2 x\,\sec^2 x\,dx$$
$$=\int(\tan x)^{1/2}(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$
$$=\int(\tan x)^{1/2}\sec^2 x\,dx+\int(\tan x)^{5/2}\sec^2 x\,dx$$
$$=\int u^{1/2}du+\int u^{5/2}dv$$
$$=\frac{2}{3}u^{3/2}+\frac{2}{7}u^{7/2}+C$$
$$=\frac{2}{3}(\tan x)^{3/2}+\frac{2}{7}(\tan x)^{7/2}+C$$

حالت 3) . m زوج و n فرد باشد . نهایتاً ، اگر m یک عدد صحیح مثبت زوج و n یک عدد صحیح مثبت فرد باشد ، انتگرالده را برحسب $\sec x$ نوشته و از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم .

مثال ۲۰ . مطلوب است محاسبه $\int\tan^2 x\,\sec x\,dx$

حل . می‌نویسیم
$$\int\tan^2 x\,\sec x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\sec x\,dx$$
$$=\int\sec^3 x\,dx-\int\sec x\,dx$$

از طرفی می‌دانیم
$$\int\sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C_1 \qquad (۷)$$

و
$$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C_2 \qquad (۸)$$

با کم کردن نتایج در (۷) و (۸) به جواب زیر می‌رسیم
$$\int\tan^2 x\,\sec x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x\,dx-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$$

مثال ۲۱. مطلوب است محاسبه $\int \tan^4 x\,dx$

حل:

$$\int \tan^4 x\,dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\,dx$$
$$= \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx$$
$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int (\tan x)^2 \sec^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx + \int dx$$
$$= \frac{1}{3}(\tan x)^3 - \tan x + x + C.$$

سه حالت بیان شده برای محاسبه انتگرال $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

محاسبه $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$		
حالت	روش	اتحادهای مورد استفاده
۱. m فرد	$u = \sec x$	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
۲. n زوج	$u = \tan x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
۳. m فرد و n زوج	انتگرال را برحسب توان‌های $\sec x$ تنها تغییر می‌دهیم. از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

۴.۷ جانشانی‌های مثلثاتی

وقتی که انتگرالده شامل توان‌های صحیح x و توان‌های صحیح عباراتی به صورت

$$\sqrt{a^2-x^2},\quad \sqrt{a^2+x^2},\quad \sqrt{x^2-a^2},\qquad a>0$$

است، برای محاسبه انتگرال از یک جانشانی مثلثاتی استفاده می‌کنیم. سه حالت با توجه

به اتحادهای زیر در نظر می گیریم.

$$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$$

حالت ۱). انتگرال هایی شامل $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $a>0$:

اگر قرار دهیم

$$x=a\sin\theta,\qquad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

آنگاه

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

اگر عبارت $\sqrt{a^2-x^2}$ در مخرج قرار داشته باشد، شرط به $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ محدود می شود.

مثال ۲۲. مطلوب است محاسبه $\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

حل. با در نظر گرفتن $a=3$ از جایگذاری

$$x=3\sin\theta,\quad dx=3\cos\theta\, d\theta$$

استفاده می کنیم که در آن $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ است. انتگرال به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int\frac{9\sin^2\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}(3\cos\theta\, d\theta)=\int 9\sin^2\theta\, d\theta$$

حال برای محاسبه انتگرال آخر، از اتحاد $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ استفاده می کنیم. پس

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{9}{2}\int(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\theta-\frac{9}{4}\sin 2\theta+C$$

حال برای برگرداندن جواب به دست آمده برحسب متغیر x ، توجه می کنیم که $\sin\theta=\frac{x}{3}$ ،

$\theta=\sin^{-1}(\frac{x}{3})$ و $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$. چون $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

پس

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+C$$

مثال ۲۳. مطلوب است محاسبه $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$

حل. فرض کنید

$$x=\sin\theta,\qquad dx=\cos\theta\, d\theta$$

در نتیجه

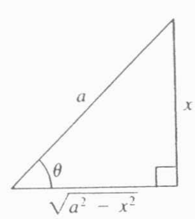
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\,(\cos\theta\, d\theta)\\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta\\ &= \int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta\\ &= \int (\csc\theta-\sin\theta)\,d\theta\\ &= \ln|\csc\theta-\cot\theta|+\cos\theta+C \qquad (۹)\end{aligned}$$

چون $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$ ، $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{x}$ و $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

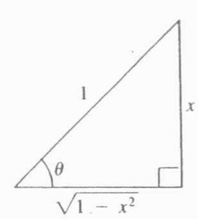
پس (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C$$

توضیح . در مثال‌های (۲۲) و (۲۳) برای برگشت به متغیر x می‌توانیم به طریق زیر نیز عمل کنیم. اگر یک مثلث قائم الزاویه، همان گونه در شکل (۲) دیده می‌شود، را در نظر بگیریم به طوری که $\sin\theta=\frac{x}{a}$ آن‌گاه دیگر توابع مثلثاتی را می‌توان برحسب x شرح داد. برای مثال، در مثال (۲۳)، داریم $\sin\theta=\frac{x}{1}$ و بنابراین از شکل (۳) داریم $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$ و $\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ،



شکل ۲



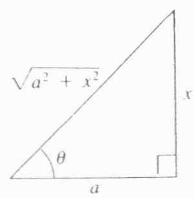
شکل ۳

حالت 2). انتگرال‌های شامل $\sqrt{a^2+x^2}$، $a>0$

در این حالت، فرض کنید $x=a\tan\theta$ که در آن $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. در این صورت

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\sec^2\theta}\\ &= a\sec\theta\end{aligned}$$

همانند قبل، یک انتگرال شامل جمله جبری $\sqrt{a^2+x^2}$ به یک انتگرال مثلثاتی تبدیل می‌شود. بعد از انتگرال‌گیری می‌توانیم متغیر θ را با توجه به مثلث قائم‌الزاویه در شکل (۴) که در آن $\tan\theta=\frac{x}{a}$ برحسب x تبدیل کرد.



شکل ۴

مثال ۲۴. مطلوب است محاسبه $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$

حل. مشاهده می‌شود که انتگرالده شامل توانی از $\sqrt{4+x^2}$ است، زیرا

$$(4+x^2)^{3/2}=\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3$$

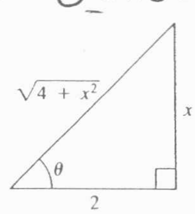
حال قرار می‌دهیم $x=2\tan\theta$، $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$، $\sqrt{4+x^2}=2\sec\theta$ و

$$(4+x^2)^{3/2}=8\sec^3\theta$$

پس

$$\int\frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}=\int\frac{2\sec^2\theta}{8\sec^3\theta}\,d\theta=\frac{1}{4}\int\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\sin\theta+C$$

حال با توجه به شکل (۵) داریم $\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ پس $\int\frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C$



شکل ۵

حالت 3) انتگرال هایی شامل $\sqrt{x^2-a^2}$ ، $a>0$.

در این حالت، اگر از جانشانی $x=a\sec\theta$ برای $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ یا $\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ استفاده کنیم، آن گاه

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}$$
$$=\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}$$
$$=\sqrt{a^2\tan^2\theta}$$
$$=a\tan\theta$$

مثال ۲۵. مطلوب است محاسبه $\int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx$

حل. قرار می دهیم

$$x=4\sec\theta,\quad dx=4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

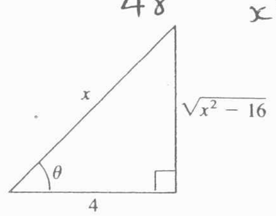
پس

$$\int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx=\int\frac{\sqrt{16\sec^2\theta-16}}{256\sec^4\theta}(4\sec\theta\tan\theta\,d\theta)$$
$$=\int\frac{1}{16}\frac{\tan^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{16}\int\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^3\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{16}\int\sin^2\theta(\cos\theta\,d\theta)$$
$$=\frac{1}{48}\sin^3\theta+C$$

با توجه به شکل (۹)، دیده می شود که اگر $\sec\theta=\frac{x}{4}$ آن گاه $\cos\theta=\frac{4}{x}$ و $\sin\theta=\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

پس

$$\int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx=\frac{1}{48}\frac{(x^2-16)^{3/2}}{x^3}+C$$



شکل ۹

مثال ۲۶. طول قوس نمودار $y=\frac{1}{2}x^2+3$ روی فاصله $[0,1]$ را بدست آورید.

حل. می دانیم که فرمول طول قوس $s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ است. چون

$\frac{dy}{dx}=x$ پس

$$s=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$$

حال با جانشانی $x=\tan\theta$ و $dx=\sec^2\theta\,d\theta$، حدود انتگرال برابرات با

$\theta=\tan^{-1}0=0$ و $\theta=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$. بنابراین

$$s=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2\theta}\;\sec^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\left|\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\simeq 1.1478$$

انتگرال هائی شامل یک عبارت درجه دوم.

مثال ۲۷. مطلوب است محاسبه $\int\frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}}$

حل. چون

$$\int\frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}}=\int\frac{dx}{[9+(x+4)^2]^{3/2}}$$

از a^2+u^2 با $a=3$ و $u=x+4$ داریم

$$x+4=3\tan\theta,\quad dx=3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}}=\int\frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{[9+9\tan^2\theta]^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{9}\int\sec^2\theta\,(\sec^3\theta)^{-1}\,d\theta$$

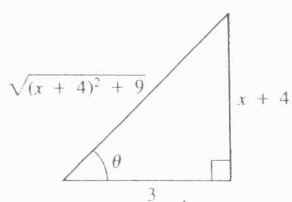
$$=\frac{1}{9}\int\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{9}\sin\theta+C$$

حال از مثلث نمایش داده شده در شکل (۷)، $\sin\theta$ بر حسب x به دست می‌آید پس

$$\int \frac{dx}{(x^2+8x+25)^{3/2}} = \frac{1}{9}\,\frac{x+4}{\sqrt{(x+4)^2+9}}+C$$

$$= \frac{x+4}{9\sqrt{x^2+8x+25}}+C$$



شکل ۷

تبصره. در سه حالت شرح داده شده، جانشانی‌های دیگری نیز امکان‌پذیر است که در اینجا شرح داده نشده است، به عنوان مثال، $x=a\cos\theta$ برای $0\le\theta\le\pi$ را می‌توان برای حذف $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $a>0$ به کار برد.

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$= \sqrt{a^2\sin^2\theta}$$
$$= a\sin\theta$$

همچنین می‌توان از جانشانی هذلولوی $x=a\sinh t$ برای $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $a>0$ استفاده کرد.

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\sinh^2 t)}$$
$$= \sqrt{a^2\cosh^2 t}$$
$$= a\cosh t$$

۵.۷ کسرهای جزئی

۱.۵.۷ مخرج کسر شامل عامل های خطی

وقتی جملات در مجموع

$$\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x+1} \qquad (10)$$

با در نظر گرفتن مخرج مشترک با هم جمع می شوند به یک عبارت گویا به صورت

$$\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)} \qquad (11)$$

می رسیم. حال فرض کنید که در ابتدا به مسئله یافتن انتگرال $\int \frac{(3x+7)dx}{(x+5)(x+1)}$ برخورد کرده بودیم. به وضوح برای محاسبه این انتگرال از تساوی عبارات (۱۰) و (۱۱) داریم

$$\int \frac{(3x+7)dx}{(x+5)(x+1)}=\int \left[\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x+1}\right]dx$$
$$=2\ln|x+5|+\ln|x+1|+C$$

مثال بالا، روشی برای انتگرال گیری از توابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را شرح می دهد که درجه $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر است. این روش را به عنوان روش تجزیه به کسرهای جزئی می شناسیم و شامل تجزیه تابع گویا به کسرهای ساده تر و سپس محاسبه انتگرال جمله به جمله است. در این بخش، چهار حالت برای تجزیه به کسرهای جزئی را مطرح می کنیم.

حالت ۱). عامل های خطی غیر تکراری

اگر داشته باشیم

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)}$$

که در آن تمام عامل های a_ix+b_i برای $i=1,2,\dots,n$ متمایزند و درجه $P(x)$ کمتر از n است آن گاه ضرایب حقیقی منحصر بفرد $c_1, c_2, \dots, c_n$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{c_1}{a_1x+b_1}+\frac{c_2}{a_2x+b_2}+\dots+\frac{c_n}{a_nx+b_n}$$

و در نتیجه

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{c_1}{a_1x+b_1}dx+\dots+\int\frac{c_n}{a_nx+b_n}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\frac{c_k}{a_k x+b_k}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{a_k}\ln|a_k x+b_k|+C$$

مثال ۲۸. مطلوب است محاسبه $\int\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx$

حل. فرض کنید انتگرالده را بتوان به صورت

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

نوشت. با جمع دو کسر جزئی در طرف راست داریم

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

چون مخرج‌ها یکسان هستند پس صورت‌ها باید باهم یکی باشند یعنی

$$2x+1=A(x+3)+B(x-1)$$

$$=(A+B)x+(3A-B) \qquad (۱۲)$$

پس ضرایب توانهای یکسان x در دو طرف باید باهم برابر باشند

$$2=A+B$$

$$1=3A-B$$

از حل همزمان این معادلات برای A و B داریم $A=\frac{3}{4}$ و $B=\frac{5}{4}$. بنابراین

$$\int\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}dx=\int\left[\frac{3/4}{x-1}+\frac{5/4}{x+3}\right]dx$$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{5}{4}\ln|x+3|+C$$

توضیح. در مثال قبل، اعداد A و B را می‌توان به طریق دیگری نیز به دست آورد چون رابطه (۱۲) یک اتحاد است، یعنی کسب برای هر مقدار x درست است پس برای $x=1$ و $x=-3$ (صفرهای مخرج) نیز درست است. با قرار دادن $x=1$ در (۱۲) داریم $4A=3$ و بنابراین $A=\frac{3}{4}$ و با قرار دادن $x=-3$ در (۱۲) داریم $-5=-4B$ یا $B=\frac{5}{4}$.

مثال ۲۹. مطلوب است محاسبه $\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$.

حل. مشاهده می‌شود که درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج است. بنابراین، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و داریم

$$\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx = \int \left[x-3+\frac{5x+6}{x^2+3x+2}\right]dx$$

چون $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ پس

$$\frac{5x+6}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

بنابراین

$$5x+6 = A(x+2)+B(x+1) \qquad (۱۳)$$

اگر قرار دهیم $x=-1$ و $x=-2$ در (۱۳) داریم $B=4$ و $A=1$. پس

$$\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx = \int \left[x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right]dx$$
$$= \frac{x^2}{2}-3x+\ln|x+1|+4\ln|x+2|+C$$

مثال ۳۰. مساحت A محصور زیر نمودار $y=\frac{1}{x(x+1)}$ روی فاصله $[\frac{1}{2},2]$ را به دست آورید.

حل. مساحت مورد نظر در شکل (۹) نشان داده شده است. داریم

$$A=\int_{1/2}^{2}\frac{dx}{x(x+1)}$$

با استفاده از تجزیه کسرهای جزئی داریم

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$
$$= \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

پس

$$1 = A(x+1)+Bx$$
$$=(A+B)x+A$$

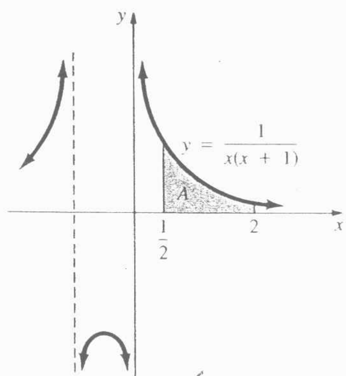
در نتیجه $A=1$ و $B=-1$. بنابراین

$$A=\int_{1/2}^{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]dx$$

$$=(\ln|x|-\ln|x+1|)\Big|_{1/2}^{2}$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big]_{1/2}^{2}$$

$$=\ln 2 \simeq 0.6931$$



شکل ۹

حالت 2) عامل‌های خطی تکراری

اگر

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax+b)^n}.$$

که در آن $n>1$ و درجه $P(x)$ کوچکتر از n است، آنگاه ثابت‌های حقیقی منحصر بفرد $C_1, C_2, \ldots, C_n$ وجود دارند به طوری که

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n}=\frac{C_1}{ax+b}+\frac{C_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{C_n}{(ax+b)^n}$$

مثال ۳۱. مطلوب است محاسبه $\int\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}dx$

حل. انتگرالده را بصورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

با متحد قرار دادن صورت‌ها داریم

$$x^2+2x+4=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

$$=Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)$$

در نتیجه دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود

$$1 = A$$

$$2 = 2A + B$$

$$4 = A + B + C$$

از حل این دستگاه داریم $A=1$ ، $B=0$ و $C=3$. بنابراین

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3}\,dx = \int \left[\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3}\right]dx$$
$$= \int \left[\frac{1}{x+1} + 3(x+1)^{-3}\right]dx$$
$$= \ln|x+1| - \frac{3}{2}(x+1)^{-2} + D$$

ترکیب حالت‌ها . وقتی مخرج یعنی $Q(x)$ شامل عامل‌های خطی متمایز و عامل‌های خطی تکراری است ، دو حالت را با هم ترکیب می‌کنیم .

مثال ۳۲ . مطلوب است محاسبه $\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}\,dx$

حل . قرار می‌دهیم

$$\frac{6x-1}{x^3(2x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x-1}$$

در نتیجه

$$6x-1 = Ax^2(2x-1) + Bx(2x-1) + C(2x-1) + Dx^3 \qquad (۱۴)$$

$$= (2A+D)x^3 + (-A+2B)x^2 + (-B+2C)x - C \qquad (۱۵)$$

اگر قرار دهیم $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ ، از (۱۴) داریم $C=1$ و $D=16$. حال با مساوی هم قرار دادن ضرایب x^3 و x^2 در (۱۵) داریم

$$0 = 2A + D$$

$$0 = -A + 2B$$

چون مقدار D را می‌دانیم ، از معادله اول $A = -\frac{D}{2} = -8$ و از معادله دوم $B = \frac{A}{2} = -4$. بنابراین

$$\int \frac{6x-1}{x^3(2x-1)}\,dx = \int\left[-\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{16}{2x-1}\right]dx$$
$$= -8\ln|x| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + 8\ln|2x-1| + E$$
$$= 8\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + E$$

۲.۵.۷ مخرج عبارت گویا شامل عامل‌های درجه دوم غیرتحویل‌پذیر

حالت 3) . عامل‌های درجه دوم غیرتکراری

فرض کنید مخرج تابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌های درجه دوم غیرتحویل‌پذیر متمایز $a_ix^2+b_ix+c_i$ برای $i=1,2,\dots,n$ نوشت. اگر درجه $P(x)$ کمتر از $2n$ باشد، می‌توانیم ثابت‌های حقیقی منحصربه‌فرد $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، $B_1, B_2, \dots, B_n$ را چنان یافت به طوری که

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$
$$= \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

مثال ۳۳. مطلوب است محاسبه $\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx$

حل. می‌نویسیم

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

پس

$$4x = (Ax+B)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x^2+1)$$
$$= (A+C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (3A+2B+C)x + (3B+D)$$

چون مخرج اشتراک داده دارای هیچ ریشه حقیقی نیست، پس ضرایب توان‌های x را با هم معادله می‌کنیم

$$0=A+C,\quad 0=2A+B+D,\quad 4=3A+2B+C,\quad 0=3B+D$$

از حل این دستگاه معادلات داریم $A=1$ ، $B=1$ ، $C=-1$ ، و $D=-3$. بنابراین

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx = \int \left[\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{x^2+2x+3} \right] dx$$

برای به دست آوردن انتگرال در سمت راست، هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \qquad (۱۶)$$

بعد از مربع کامل کردن انتگرال دوم طرف راست داریم

$$\frac{x+3}{x^2+2x+3} = \frac{x+1+2}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2} + \frac{2}{(x+1)^2+2} \qquad (۱۷)$$

در طرف راست (۱۶) و (۱۷) انتگرال‌های اول و دوم به ترتیب به صورت $\int \frac{du}{u}$ و $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ است. نهایتاً

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2} - \frac{2}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln\left[(x+1)^2+2\right] - \sqrt{2}\,\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + E$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}\right) + \tan^{-1}x - \sqrt{2}\,\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + E$$

حالت ۴). عامل‌های درجه دوم تکراری

حالتی را در نظر بگیرید که انتگرالده به صورت $\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$ است که در آن ax^2+bx+c تحویل‌ناپذیر است و $n>1$. اگر درجه $P(x)$ کمتر از $2n$ باشد، ثابت‌های حقیقی $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ منحصر به فرد می‌توان یافت به طوری که

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

مثال ۳۴. مطلوب است محاسبه $\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx$

حل. تجزیه به کسرهای جزئی برای تابع انتگرالده به صورت

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

است. پس

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (4A+C)x + (4B+D)$$

در نتیجه

$$0 = A$$

$$1 = B$$

$$0 = 4A + C$$

$$0 = 4B + D$$

بنابراین $A=0$ ، $B=1$ ، $C=0$ و $D=-4$. در نتیجه

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}\right] dx$$

انتگرال اول درست است تانژانت معکوس است. برای محاسبه انتگرال جمله دوم، از جانشانی مثلثاتی $x = 2\tan\theta$ استفاده می‌کنیم. پس

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^2}$$

$$= \int \frac{1}{8}\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\theta + \sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \times \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2+4}\right]$$

بنابراین انتگرال مورد نظر عبارت است از

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - 4\left[\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4}\right] + E$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{x}{2(x^2+4)} + E$$

در مثال بعد، هر چهار حالت رخ می‌دهد.

مثال ۳۵. انتگرالده در انتگرال زیر را به کسرهای جزیی تجزیه کنید.

$$\int \frac{dx}{(3x+5)(x-2)^2(x^2+6)(x^2+x+1)^2}$$

حل: $3x+5$ و $x-2$ عامل‌های خطی و x^2+6 و x^2+x+1 عامل‌های درجه دوم تحویل‌ناپذیرند. پس

$$\frac{1}{(3x+5)(x-2)^2(x^2+6)(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{A}{3x+5}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+6}+\frac{Fx+G}{x^2+x+1}+\frac{Hx+K}{(x^2+x+1)^2}$$

یافتن ضرایب A, B, C, D, E, F, G, H و K در حل انتگرال به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال ۳۶. مطلوب است محاسبه $\int \frac{x+3}{x^4+9x^2}\,dx$.

حل: از $x^4+9x^2=x^2(x^2+9)$ داریم

$$\frac{x+3}{x^2(x^2+9)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+9}$$

پس

$$x+3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+9Ax+9B$$

و

$$0=A+C,\quad 0=B+D,\quad 1=9A,\quad 3=9B$$

در نتیجه $A=\frac{1}{9}$، $B=\frac{1}{3}$، $C=-\frac{1}{9}$، $D=-\frac{1}{3}$. پس

$$\int\frac{x+3}{x^2(x^2+9)}dx=\int\left[\frac{1/9}{x}+\frac{1/3}{x^2}-\frac{x/9+1/3}{x^2+9}\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{1/9}{x}+\frac{1/3}{x^2}-\frac{1}{18}\frac{2x}{x^2+9}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+9}\right]dx$$
$$=\frac{1}{9}\ln|x|-\frac{1}{3}x^{-1}-\frac{1}{18}\ln(x^2+9)-\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3}+E$$
$$=\frac{1}{18}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+9}\right)-\frac{1}{3}x^{-1}-\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3}+E$$

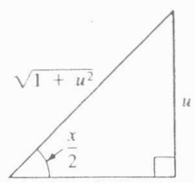
۶.۷ انتگرال های توابع گویا از سینوس و کسینوس

انتگرال های عبارت های گویا شامل $\sin x$ و $\cos x$ را می توان به انتگرال های خارج قسمت های چندجمله ای با جانشانی

$$u=\tan\frac{x}{2} \qquad -\pi<x<\pi \qquad (۱۸)$$

تبدیل کرد. چون $\tan^{-1}u=\frac{x}{2}$، از شکل (۱۰) دیده می شود که

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$



شکل ۱۰

از اتحادهای مثلثاتی برای زاویه های دوبرابر به صورت زیر داریم

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

علاوه بر آن از $x=2\tan^{-1}u$ نتیجه می شود که

$$dx=\frac{2}{1+u^2}\,du$$

به طور کلی جانشانی $u=\tan\frac{x}{2}$ منجر به

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos u=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}\,du \qquad (۱۹)$$

می شود.

مثال ۳۷. مطلوب است محاسبه

$$\int\frac{dx}{2+2\sin x+\cos x}$$

حل. با استفاده از روابط در (۱۹) داریم

$$\int \frac{du}{2+2\sin x+\cos x}=\int \frac{2du}{u^2+4u+3}$$

چون

$$u^2+4u+3=(u+1)(u+3)$$

پس از تجزیه به کسرها داریم

$$\frac{2}{u^2+4u+3}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{u+3}$$
$$=\frac{A(u+3)+B(u+1)}{(u+1)(u+3)}$$

یعنی

$$2=(A+B)u+3A+B$$

پس $A=1$ ، $B=-1$ و در نتیجه

$$\int \frac{dx}{2+2\sin x+\cos x}=\int \left[\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+3}\right]du$$
$$=\ln|u+1|-\ln|u+3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{u+1}{u+3}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{3+\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$