# فصل ۸ صور مبهم و انتگرال های ناسره

## ۱.۸ قانون هوپیتال

### ۱.۱.۸ صور مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

در فصل سوم حدود خارج قسمتی مانند

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{3x^2+1} \qquad (1)$$

را در نظر گرفتیم، که در آنها حد صورت و حد مخرج در حد عبارت اول وقتی $x\to 1$ هر دو صفر اند و در حد دوم، حدود صورت و مخرج وقتی $x\to\infty$ هر دو $\infty$ است. در این بخش توجه خود را به این گونه حدود معطوف می داریم.

در حالت کلی، گوییم حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

دارای فرم مبهم $\frac{0}{0}$ در $x=a$ است هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=0\ ,\quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

و دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در $x=a$ است هرگاه

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty\ ,\quad \lim_{x\to a}|g(x)|=\infty$$

در حالت های بالا، حد می تواند دارای فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد هرگاه $x\to a^-$، $x\to a^+$، $x\to-\infty$ یا $x\to\infty$ است.

مثال ۱. الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ دارای فرم مبهم $\frac{0}{0}$ در $x=0$ است زیرا $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ و $\lim_{x\to 0} x=0$.

ب) $\lim_{x\to 3^+}\frac{1/(3-x)}{1/(3-x)^2}$ دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در $x=3$ است زیرا

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{3-x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(3-x)^2}=\infty$$

ج) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}$ دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است زیرا $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$ و $\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$.

نکته ۱. حدود به صورت $\frac{0}{k}$ ، $\frac{k}{0}$ ، $\frac{\infty}{k}$ و $\frac{k}{\infty}$ که در آن $k$ ثابت ناصفر است دارای فرم مبهم نیست. مقدار یک حد به صورت $\frac{0}{k}$ یا $\frac{k}{\infty}$ برابر صفر است در حالی که یک حد به صورت $\frac{k}{0}$ یا $\frac{\infty}{k}$ موجود نیست.

حال سؤال این است که حدود خارج قسمتی شبیه به حدود در (۱) چه وقت موجودند. می‌توان از عملیات جبری، فاکتورگیری، حذف و تقسیم استفاده کرد. به هر حال، قبلاً نشان دادیم که $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ و برای این منظور از استدلال هندسی استفاده کردیم. اما ابزار جبری و مفاهیم هندسی در ارتباط با مسئله‌ای از نوع

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{x}-e^{-x}}$$

دارای توافقی نیستند، همان‌گونه که دیده می‌شود این حد به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ است. قضیه بعد، قانونی را بیان می‌کند که در محاسبه بسیاری از حدود به فرم مبهم کمک کننده است.

قضیه ۲. قضیه مقدار میانگین گسترش یافته. فرض کنید $f$ و $g$ روی فاصله $[a,b]$ پیوسته‌اند و روی $(a,b)$ مشتق‌پذیر هستند. علاوه بر آن فرض کنید برای هر $x$ در $(a,b)$ داشته باشیم $g'(x)\neq 0$. در این صورت عدد $c$ در $(a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

قضیه فوق به قضیه مقدار میانگین کشی نیز معروف است. توجه کنید که برای $g(x)=x$ قضیه فوق همان قضیه مقدار میانگین لاگرانژ است.

اثبات. تمرین

قاعده زیر که به نام ریاضیدان فرانسوی جی. اف. ای. هوپیتال معروف است، برای رفع ابهام از صورت‌های مبهم به کمک قضیه مقدار میانگین کشی ثابت می‌شود. فرض داریم که توابع

$f$ و $g$ روی فاصله‌های باز $(r,a)$ و $(a,s)$ مشتق‌پذیرند و برای $x \neq a$ ، $g'(x) \neq 0$.

قانون هوپیتال ۳. فرض کنید $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ دارای یک فرم مبهم در $x=a$ است و $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ یا $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (۲)$$

اثبات. حالت $\frac{0}{0}$.

چون $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ می‌توان فرض کرد که $f(a)=0$ و $g(a)=0$. در نتیجه $f$ و $g$ در $a$ پیوسته‌اند. علاوه بر آن چون $f$ و $g$ مشتق‌پذیرند پس این توابع روی $(r,a)$ و $(a,s)$ پیوسته‌اند. بنابراین $f$ و $g$ روی فاصله $(r,s)$ پیوسته می‌باشند. حال برای هر $x \neq a$ در این فاصله، قضیه (۲) را برای $[x,a]$ یا $[a,x]$ به کار می‌بریم. در هر حالت، عدد $c$ بین $x$ و $a$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

حال با فرض $x \to a$ نتیجه می‌شود که $c \to a$ بنابراین

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

مثال ۲. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ را با توجه به قانون هوپیتال محاسبه کنید.

حل. در مثال (۱) گفتیم که حد داده شده دارای فرم مبهم $\frac{0}{0}$ در $x=0$ است. بنابراین از (۲) داریم

مشتق

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

مشتق

مثال ۳. مطلوب است $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{x}-e^{-x}}$.

حل. چون حد مورد نظر در $x=0$ دارای فرم مبهم $\frac{0}{0}$ است، پس از (۲) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{x}-e^{-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\sin x}{\frac{d}{dx}(e^{x}-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

نکته ۴. نتیجه در (۲) وقتی بجای $x\to a$ از حدود یکطرفه یا $x\to\infty$، $x\to-\infty$ استفاده می‌کنیم نیز معتبر باقی می‌ماند. اثبات حالت $x\to\infty$ را می‌توان با جایگزینی $x=\frac{1}{t}$ در $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ و توجه به اینکه $x\to\infty$ معادل $t\to 0^{+}$ بدست آورد.

مثال ۴. مطلوب است $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x}}$.

حل. حد دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است، از قانون هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{x}}$$

حال، با توجه به اینکه $\lim_{x\to\infty}xe^{x}=\infty$ داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{x}}=0$$

نکته ۵. امکان دارد در مسئله‌ای نیاز به تکرار قانون هوپیتال در چند مرحله باشد.

مثال ۵. مطلوب است $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{2}+5x+7}{4x^{2}+2x}$

حل. حد دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. بنابراین از (۲) داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{2}+5x+7}{4x^{2}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x+5}{8x+2}$$

چون حد جدید نیز به فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. رابطه (۲) را مجدداً بکار می‌بریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x+5}{8x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{2}+5x+7}{4x^{2}+2x}=\frac{3}{2}$$

مثال ۶. مطلوب است $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

حل. حد داده شده و حد عبارت آمده بعد از انجام یک بار قاعدهٔ هوپیتال به فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2}$$

بعد از دو بار بکارگیری رابطه (۲)، با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to\infty} 9e^{3x}=\infty$ در حالی که مخرج عدد ثابت است نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \infty$$

به عبارت دیگر حد وجود ندارد.

مثال ۷. مطلوب است $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^{2x}}$

حل. با بکارگیری رابطه (۲) چهار مرتبه داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{2x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{2e^{2x}} && \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{12x^2}{4e^{2x}} && \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{24x}{8e^{2x}} && \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{24}{16e^{2x}} = 0
\end{aligned}$$

نکته ۶. در بکارگیری قاعدهٔ هوپیتال به طور متوالی، گاهی اوقات ممکن است حد از فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ یا برعکس تبدیل شود.

مثال ۸. مطلوب است $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\tan t}{\tan 3t}$

حل. مشاهده می‌شود که

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \tan t = -\infty, \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} \tan 3t = -\infty$$

بنابراین

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan t}{\tan 3t}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sec^2 t}{3\sec^2 3t}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos^2 3t}{3\cos^2 t}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2(\cos 3t)(-3\sin 3t)}{6(\cos t)(-\sin t)}$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{2\sin 3t\cos 3t}{2\sin t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin 6t}{\sin 2t}$$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{6\cos 6t}{2\cos 2t}=\frac{-6}{-2}=3$$

مثال ۹. مطلوب است $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$

حل. حد به فرم $\frac{0}{0}$ در $x=1$ است. بنابراین طبق قانون هوپیتال

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}}{x}=\frac{0}{1}=0$$

تبصره ۷. الف) در استفاده از قانون هوپیتال، برخی از اشخاص دچار اشتباه زیر می‌شوند.

بجای $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ از $\lim_{x\to a}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$

باید دقت کرد که قانون هوپیتال

خارج قسمت مشتقهاست نه مشتق خارج قسمت

ب) دقت به شرایط قضیه مهم است تا دچار اشتباه نشویم. به عنوان مثال، می‌دانیم

که $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{0}$ و در نتیجه موجود نیست، در حالی که استفاده اشتباه از

قانون هوپیتال منجر به

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$$

می‌شود که غلط است.

ج) قانون هوپیتال لزوماً برای هر فرم مبهمی پاسخگو نیست. برای مثال $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}}$ به وضوح به فرم $\frac{\infty}{\infty}$ است اما

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2xe^{x^2}}$$

که کمک کننده نیست. یا قانون هوپیتال برای حدی به صورت $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ ساده کننده مسئله نمی‌باشد.

۲.۱.۸ صور مبهم $\infty-\infty$، $0\times\infty$، $0^0$، $\infty^0$ و $1^\infty$.

پنج فرم مبهم دیگر به صورت

$$\infty-\infty,\ 0\times\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

نیز وجود دارد. با عملیاتی جبری و کمی حوصله، اغلب می‌توان این فرم‌های مبهم را به صور مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرد.

فرم مبهم $\infty-\infty$. ۸. در مثال زیر حدی آورده شده است که دارای فرم مبهم $\infty-\infty$ است. در این مثال دیده می‌شود که عبارتی به صورت $\infty-\infty=0$ نادرست است.

مثال ۱۵. مطلوب است $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1+3x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]$

حل. چون

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+3x}{\sin x}=\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

پس حد به صورت $\infty-\infty$ می‌باشد. بعد از نوشتن تفاضل به صورت یک تابع تنها، به فرم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1+3x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{6x+1-\cos x}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{6+\sin x}{-x\sin x+2\cos x}$$

$$=\frac{6+0}{0+2}=3$$

فرم مبهم $0\times\infty$ . ۹. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\infty$ آنگاه $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$ به فرم مبهم $\infty\times 0$ است، حد را به طریقی تغییر می‌دهیم که به فرم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شود.

اگر قرار دهیم

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{یا} \quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

آنگاه حد به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ خواهد شد.

مثال ۱۱. مطلوب است $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

حل. چون $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$ پس حد بالا به فرم مبهم $\infty\times 0$ است. قرار می‌دهیم

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x^{-2})\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

۱۰. فرمهای مبهم $0^0$، $\infty^0$، $1^\infty$. فرض کنید $y=f(x)^{g(x)}$ وقتی $x\to a$ به $0^0$، $\infty^0$ یا $1^\infty$ میل کند، از $y$ لگاریتم طبیعی می‌گیریم

$$\ln y=\ln f(x)^{g(x)}$$

$$=g(x)\ln f(x)$$

پس

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$$

به فرم $\infty\times 0$ است. حال از پیوسته بودن تابع لگاریتم طبیعی، نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln\left(\lim_{x\to a} y\right)$$

اگر فرض کنیم

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln\left(\lim_{x\to a} y\right)=L$$

آنگاه

$$\lim_{x\to a} y=e^L$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{L}$$

روش بیان شده برای حدود شامل $x\to a^-$ ، $x\to a^+$ ، $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$
نیز برقرار است .

مثال ۱۲ . مطلوب است $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

حل . حد به فرم مبهم $0^0$ است ، اگر قرار دهیم $y=x^{1/\ln x}$ آن گاه

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln x = 1$$

در این حالت نیاز به قانون هوپیتال نیست زیرا

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = 1 \quad \text{یا} \quad \ln(\lim_{x\to 0^+} y) = 1$$

پس

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^1$$

یا $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e$ .

در مثال بعد ، یک حد مبهم را در نظر می گیریم .

مثال ۱۳ . مطلوب است $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

حل . این حد به فرم مبهم $1^\infty$ است . قرار می دهیم $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ در نتیجه

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

حال $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ به فرم مبهم $\frac{0}{0}$ است . طبق رابطه (۲)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

بنابراین $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

مثال ۱۴ . مطلوب است $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$ .

حل. با توجه به مثال (۱۳)، حد به فرم مبهم $1^{\infty}$ است. قرار می‌دهیم

$$y=\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$$

در نتیجه

$$\ln y = 2x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

مشاهده می‌شود که $\lim\limits_{x\to\infty} 2x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$ به فرم مبهم $0\times\infty$ است. آن را به صورت $\lim\limits_{x\to\infty} 2\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)/\left(\frac{1}{x}\right)$ در نظر می‌گیریم که حد در این حالت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. با توجه به رابطه (۲)

$$\lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} 2\,\frac{\frac{3/x^2}{(1-3/x)}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{\left(1-\frac{3}{x}\right)}=-6$$

پس

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=e^{-6}$$

## ۲.۸ انتگرال‌های ناسره

تاکنون در مطالعه انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ فرضیات زیر را داشتیم

الف) حدود انتگرال‌گیری اعداد متناهی بودند و

ب) تابع $f$ روی $[a,b]$ یا پیوسته بود یا در صورت ناپیوستگی، روی فاصله کراندار بود.

اگر یکی از دو شرط بالا برقرار نباشد، انتگرال حاصل را یک انتگرال ناسره نامیم. در این بخش، نخست انتگرال‌های توابع تعریف شده روی فاصله‌های بی‌کران را در نظر می‌گیریم و سپس انتگرال‌هایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که برای آنها فاصله‌ها کراندارند ولی تابع بی‌کران است. در حالت حالت دوم مورد مطالعه، انتگرالده $f$ دارای یک ناپیوستگی نامتناهی در نقطه‌ای از فاصله انتگرال‌گیری است.

## ۸.۲.۱ حدود انتگرال‌گیری نامتناهی

انتگرال ناسره نوع اول. ۱۱. اگر تابع $f$ روی یک فاصله بی‌کران تعریف شده باشد، آن‌گاه سه نوع انتگرال ناسره با حدود نامتناهی برای انتگرال‌گیری وجود دارد. تعریف‌های آنها در زیر خلاصه شده‌اند.

الف) اگر $f$ روی $[a,\infty)$ پیوسته باشد آن‌گاه

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (۳)$$

ب) اگر $f$ روی $(-\infty,a]$ پیوسته باشد آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{s\to-\infty}\int_s^a f(x)dx \qquad (۴)$$

ج) اگر $f$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و $a$ عدد حقیقی دلخواهی باشد، آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^\infty f(x)dx \qquad (۵)$$

وقتی حدود در (۳) و (۴) موجود باشد گوییم انتگرال‌ها همگرا‌اند. اگر حد وجود نداشته باشد گوییم انتگرال واگرا است. در (۵)، انتگرال $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ همگرا است اگر و تنها اگر هر دو $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ و $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا باشند. به عبارت دیگر اگر به عنوان مثال $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ واگرا باشد آن‌گاه $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ واگرا خواهد بود حتی اگر انتگرال دیگر یعنی $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا باشد.

مثال ۱۵. درصورت وجود، مطلوب است $\int_1^\infty x^2dx$.

حل. طبق (۳)

$$\int_1^\infty x^2dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^2dx=\lim_{t\to\infty}\frac{x^3}{3}\Big|_1^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

چون $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}\right)=\infty$ پس انتگرال واگرا است.

مثال ۱۶. درصورت وجود، مطلوب است $\int_{-\infty}^\infty x^2dx$.

حل. چون $a$ به دلخواه انتخاب می‌شود، قرار می‌دهیم $a=1$ و می‌نویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx = \int_{-\infty}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{\infty} x^2 dx$$

اما در مثال (۱۵) دیدیم که $\int_{1}^{\infty} x^2 dx$ واگرا است. پس $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$ نیز واگرا است.

مثال ۱۷. در صورت وجود، مطلوب است $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.

حل. طبق (۲) داریم

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} x^{-3} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{2}^{t} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2t^2}\right]$$

چون

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2t^2}\right] = \frac{1}{8}$$

پس انتگرال همگرا است و

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}$$

مثال ۱۸. در صورت وجود، مطلوب است $\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx$. نتیجه را به طور هندسی تعبیر کنید.

حل. طبق (۲)

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{t} e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} (-e^{-x})\Big|_{-1}^{t} = \lim_{t\to\infty} [e - e^{-t}]$$

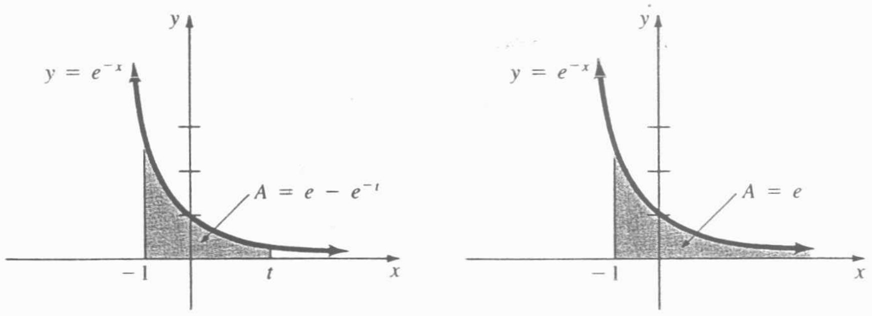
چون

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$$

پس $\lim_{t\to\infty} [e - e^{-t}] = e$ و بنابراین انتگرال همگرا است. در شکل (۱-الف) دیده می‌شود که مساحت محصور به نمودار تابع نامنفی $f(x) = e^{-x}$ روی $[-1, t]$ برابر $e - e^{-t}$ است. با فرض $t \to \infty$ داریم $e^{-t} \to 0$ و بنابراین همان گونه که در شکل (۱-ب) دیده می‌شود، می‌توانیم

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx = e$$

را به عنوان اندازه مساحت محصور به نمودار $f$ روی $[-1, \infty)$ تعبیر کنیم.




(الف) شکل ۱ (ب)

مثال ۱۹. درصورت وجود، مطلوب است $\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx$.

حل. طبق (۴) داریم

$$\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx=\lim_{s\to-\infty}\int_{s}^{0}\cos x\,dx=\lim_{s\to-\infty}\sin x\Big|_{s}^{0}=\lim_{s\to-\infty}(-\sin s)$$

چون $\sin s$ بین ۱- و ۱ نوسان می‌کند، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{s\to-\infty}(-\sin s)$ موجود نیست. بنابراین $\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx$ واگرا است.

مثال ۲۰. درصورت وجود، $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ را بدست آورید.

حل. با انتخاب $a=0$ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$
$$=I_1+I_2$$

ابتدا $I_1$ را بررسی می‌کنیم.

$$I_1=\lim_{s\to-\infty}\int_{s}^{0}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\lim_{s\to-\infty}\ln(e^x+1)\Big|_{s}^{0}$$
$$=\lim_{s\to-\infty}\left[\ln 2-\ln(e^s+1)\right]$$

چون $\lim_{s\to-\infty}e^s+1=1$ پس $\lim_{s\to-\infty}\ln(e^s+1)=0$. بنابراین $I_1=\ln 2$.

حال $I_2$ را بررسی می‌کنیم.

$$I_2=\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\lim_{t\to\infty}\ln(e^x+1)\Big|_{0}^{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln(e^t+1)-\ln 2\right]$$

چون $\lim\limits_{t\to\infty} e^t+1=\infty$ و $\ln$ تابعی پیوسته است پس $\lim\limits_{t\to\infty}\ln(e^t+1)=\infty$، بنابراین $I_2$ واگرا است. در نتیجه $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^x+1}$ واگرا است.

مثال ۲۱. به عنوان تمرین نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ همگرا است و

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$

تبصره ۱۲. الف) به وضوح $\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\,dx+\int_{0}^{\infty}x\,dx$ واگرا است، زیرا هر دو انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{0}x\,dx$ و $\int_{0}^{\infty}x\,dx$ واگرا هستند. اما یک اشتباه مشترک که معمولاً رخ می‌دهد، کار کردن با انتگرال هایی است که هر دو حدود آن نامتناهی است اما به صورت یک حد نوشته شده اند. یعنی، مثلاً اشتباهی که معمولاً رخ می‌دهد به صورت زیر است

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}x\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-t}^{t}=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right]=0$$

که پاسخ نادرست است.

انتگرال هایی به شکل $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ حتماً نیاز به محاسبه دو حد مستقل دارد.

ب) در قسمتهای قبل، اغلب از عبارت

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx \qquad (6)$$

استفاده می‌کردیم. برای انتگرال های ناسره با دقت بیشتری باید عمل کرد. برای مثال، انتگرال $\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]dx$ همگرا است (تمرین) اما

$$\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]dx\neq\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}-\int_1^{\infty}\frac{dx}{x+1}$$

خاصیت (6) برای انتگرال های ناسره، وقتی که انتگرال ها در طرف راست همگرا باشند.

## ۲.۲.۸ انتگرال هایی با انتگرالده ای که به نهایت میل می کند.

یادآوری می کنیم که، اگر $f$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ وجود دارد. علاوه بر آن، اگر $F'(x)=f(x)$ آن گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \qquad (۷)$$

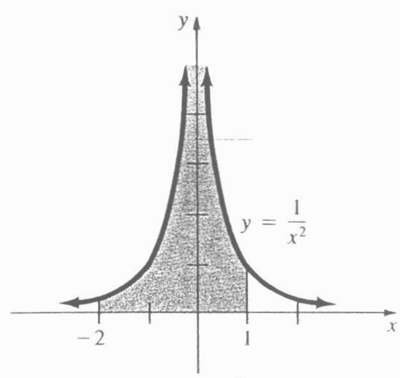
به هر حال نمی توانیم انتگرالی به صورت

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad (۸)$$

را محاسبه کنیم زیرا $f(x)=\frac{1}{x^2}$ در $[-2,1]$ دارای یک ناپیوستگی نامتناهی است. شکل (۲) را ببینید. به عبارت دیگر برای انتگرال در (۸)، اگر بنویسیم

$$-x^{-1}\Big|_{-2}^{1} = (-1)-\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

که بی معنی است، زیرا تابع نامنفی است و انتگرال باید مساحت را نتیجه دهد. پس نوعی دیگر از انتگرال ها را داریم که باید مورد بررسی دقیقتری قرار گیرند.




شکل ۲

انتگرال ناسره نوع دوم ۱۳. اگر $f$ در عددی از فاصله انتگرال گیری دارای یک ناپیوستگی نامتناهی باشد، انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ را انتگرال ناسره می نامیم. سه حالت رخ می دهد.

الف) اگر $f$ روی $[a,b)$ پیوسته بوده و $\lim_{x\to b^-}|f(x)|=\infty$ آن گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx \qquad (۹)$$

ب) اگر $f$ روی $(a, b]$ پیوسته بوده و $\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\infty$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{s\to a^+}\int_s^b f(x)dx \qquad (10)$$

ج) اگر $\lim_{x\to c}|f(x)|=\infty$ به ازای $c$ ای در $(a,b)$ و $f$ در بقیه نقاط از $[a,b]$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (11)$$

مطابق قسمت قبل، گوئیم یک انتگرال ناسره همگرا یا واگرا است وابسته به اینکه حد موجود باشد یا وجود نداشته باشد. در (11) انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همگرا است اگر و تنها اگر $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ همگرا باشند.

مثال ۲۲. در صورت وجود، $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را بیابید.

حل. واضح است که $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\infty$، بنابراین طبق (10) داریم

$$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{s\to 0^+}\int_s^4 x^{-1/2}dx=\lim_{s\to 0^+}2x^{1/2}\Big|_s^4=\lim_{s\to 0^+}[4-2s^{1/2}]$$

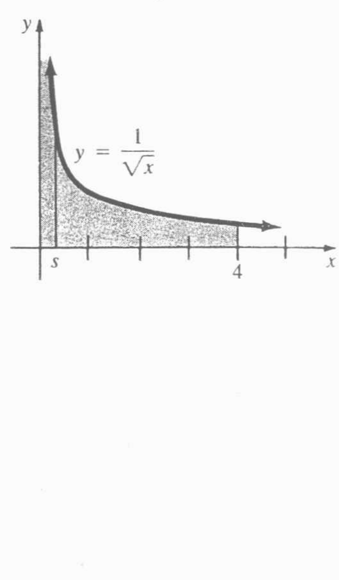
چون

$$\lim_{s\to 0^+}[4-2s^{1/2}]=4$$

پس انتگرال همگرا است و

$$\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}}=4$$

همانگونه که در شکل (۳) دیده می‌شود، عدد 4 را می‌توان به عنوان اندازه مساحت محصور به نمودار $f$ روی $[0,4]$ در نظر گرفت.




شکل ۳

مثال ۲۳. درصورت وجود، $\int_0^e \ln x\,dx$ را بیابید.

حل. در این حالت می‌دانیم که $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$، با استفاده از (۱۰) و انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\int_0^e \ln x\,dx = \lim_{s\to 0^+}\int_s^e \ln x\,dx$$
$$= \lim_{s\to 0^+} (x\ln x - x)\Big|_s^e$$
$$= \lim_{s\to 0^+} s(1-\ln s)$$

رفع حد را به صورت $\lim_{s\to 0^+}\frac{1-\ln s}{\frac{1}{s}}$ می‌نویسیم، حد دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است، در نتیجه از قاعده هوپیتال داریم

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1-\ln s}{\frac{1}{s}} = \lim_{s\to 0^+}\frac{-\frac{1}{s}}{-\frac{1}{s^2}} = \lim_{s\to 0^+} s = 0$$

پس انتگرال همگرا است و

$$\int_0^e \ln x\,dx = 0$$

مثال ۲۴. درصورت وجود، $\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$ را بیابید.

حل. در فاصله $[1,5]$، تابع انتگرالده در $2$ دارای یک ناپیوستگی نامتناهی است.
پس از (۱۱) می‌نویسیم

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \int_1^2 (x-2)^{-1/3}dx + \int_2^5 (x-2)^{-1/3}dx$$
$$= I_1 + I_2$$

حال $I_1$ و $I_2$ را بررسی می‌کنیم.

$$I_1 = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t (x-2)^{-1/3}dx$$
$$= \lim_{t\to 2^-}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big|_1^t$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 2^-}\left[(t-2)^{2/3} - 1\right] = -\frac{3}{2}$$

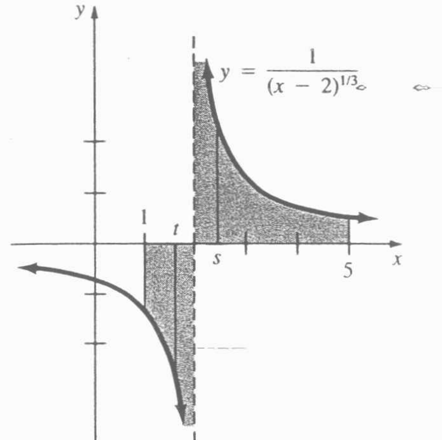
و

$$I_2=\lim_{s\to 2^+}\int_s^5 (x-2)^{-1/3}\,dx$$
$$=\lim_{s\to 2^+}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big|_s^5$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{s\to 2^+}\left[3^{2/3}-(s-2)^{2/3}\right]=\frac{3^{5/3}}{2}$$

چون $I_1$ و $I_2$ همگرااند پس انتگرال داده شده همگرا است و

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}=-\frac{3}{2}+\frac{3^{5/3}}{2}\simeq 1.62$$

باید توجه کرد که طبق شکل (۴)، عدد به دست آمده مساحت نمی‌باشد.




شکل ۴

مثال ۲۵. درصورت وجود، $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2}$ را بیابید.

حل. این انتگرال در (۸) شرح داده شده. چون در فاصله $[-2,1]$، انتگرالده دارای یک ناپیوستگی نامتناهی در ۰ است، می‌نویسیم

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=I_1+I_2$$

اما

$$I_1=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim_{t\to 0^-}\int_{-2}^{t}x^{-2}\,dx=\lim_{t\to 0^-}-x^{-1}\Big|_{-2}^{t}=\lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right]=\infty$$

مشخصاً مقداری برای $I_2=\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ وجود ندارد و انتگرال $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2}$ واگرا است.

تبصره ۱۴. الف) امکان دارد که در یک انتگرال هم حدود انتگرال‌گیری نامتناهی

باشد و انتگرالده نیز دارای ناپیوستگی نامتناهی نیز باشد. برای تعیین اینکه آیا انتگرال در این وضعیت، مثلاً انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

همگرا است یا خیر، انتگرال را روی نقطهٔ پیوستگی تابع، مثلاً $x=2$ می‌شکنیم

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= I_1 + I_2$$

$I_1$ و $I_2$ هر دو انتگرال‌های نامسره هستند. $I_1$ از نوع داده شده در (۱۵) است و $I_2$ از نوع داده شده در (۳) می‌باشد. اگر هر دوی $I_1$ و $I_2$ همگرا باشند آنگاه انتگرال اولیهٔ داده شده، همگرا است.

ب) انتگرالده در $\int_a^b f(x)dx$ می‌تواند هم در $x=a$ و هم در $x=b$ دارای ناپیوستگی نامتناهی باشد. در این حالت، انتگرال نامسره تعریف شده توسط (۱۱) است. علاوه بر آن اگر انتگرالده $f$ دارای ناپیوستگی نامتناهی در چند عدد از فاصلهٔ $(a,b)$ باشد، آنگاه انتگرال نامسره به صورت یک توسیع طبیعی از (۱۱) تعریف می‌شود.