فصل ۹ دنباله‌ها و سری‌ها

1.9 دنباله‌ها

اگر دامنه تابع f مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه عناصر $f(n)$ در برد تابع را می‌توان برحسب افزایش n مرتب کرد

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

مثال ۱. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه چند جمله اول در برد $f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$ عبارتند از

$$f(1)=2,\quad f(2)=\frac{9}{4},\quad f(3)=\frac{64}{27},\ldots \qquad (۱)$$

توابعی که دامنه تعریف آنها مجموعه اعداد صحیح مثبت است را بنام خاصی می‌شناسیم.

تعریف ۱. یک دنباله تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد صحیح مثبت است.

توضیح ۲. در برخی از مراجع از عبارت دنباله نامتناهی استفاده می‌شود. وقتی دامنه یک تابع زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد صحیح مثبت است، آن را یک دنباله متناهی نامیم. تمام دنباله‌هایی که در این فصل در نظر می‌گیریم، نامتناهی هستند.

جملات ۳. در اینجا برای نمایش تابع $f(n)$ از نماد خاصی استفاده می‌کنیم. یک دنباله معمولاً با نماد $\{a_n\}$ نمایش داده می‌شود. جملات دنباله با فرض اینکه n مقادیر $1, 2, 3, \ldots$ را بگیرد تشکیل می‌شوند. a_n را جمله عمومی نامیم. بنابراین $\{a_n\}$ معادل است با

$$\begin{array}{cccccccl}
a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n, & \ldots & \leftarrow & \boxed{\text{جملات برد}} \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & \\
1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots & \leftarrow & \boxed{\text{جملات دامنه}}
\end{array}$$

مثال ۲. چهار جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

الف) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ (ب) $\{n^2+n\}$ (ج) $\{(-1)^n\}$

حل. با جایگزینی $n=1,2,3,4$ در جمله عمومی هر دنباله، داریم

الف) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \ldots$

ب) $2, 6, 12, 20, \ldots$

ج) $-1, 1, -1, 1, \ldots$

همگرایی دنباله ها ۴. برای دنباله (الف) در مثال (۲)، دیده می شود وقتی n به طور متوالی بزرگ می شود، مقادیر $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ بدون کران صعود نمی کنند. لزوماً وقتی $n\to\infty$ داریم $\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$. در این وضعیت گوییم جملات $\frac{1}{\sqrt{n}}$ به حد 0 میل می کنند و دنباله $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ همگرا به 0 است، جملات دنباله ها در (ب) و (ج) این مثال به حدی برای $n\to\infty$ میل نمی کنند.

تعریف ۵. همگرایی دنباله ها. دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به L نامیم هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبت N وجود داشته باشد به طوری که

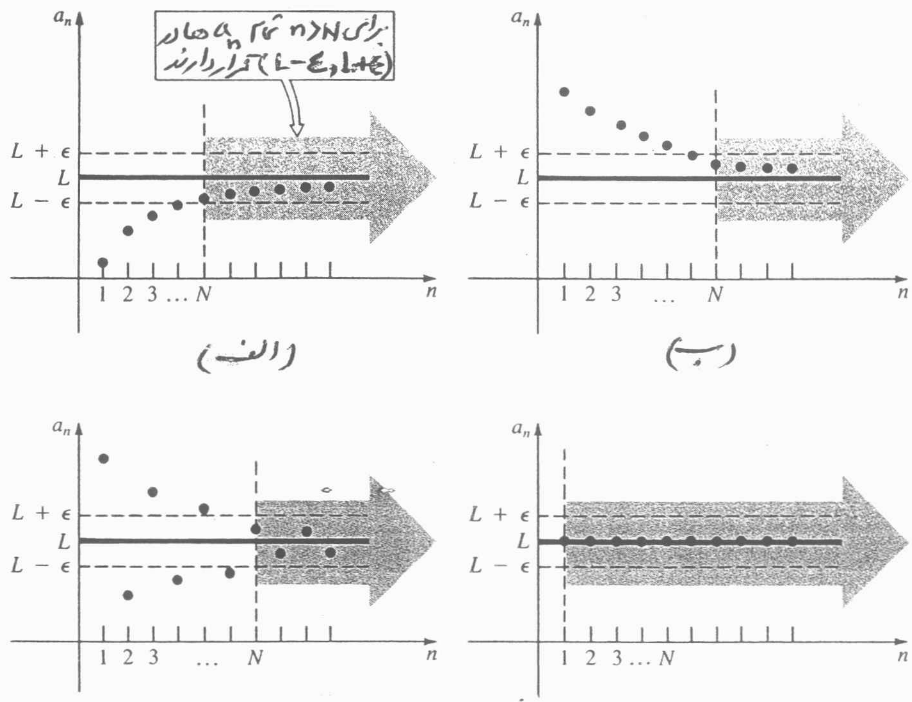
$$n>N, \quad |a_n-L|<\varepsilon \qquad (۲)$$

اگر $\{a_n\}$ یک دنباله همگرا باشد، (۲) به معنای آن است که جملات a_n را می توان به دلخواه به L برای n های به اندازه کافی بزرگ نزدیک کرد، وقتی دنباله $\{a_n\}$ همگرا به عدد L باشد می نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

وقتی $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود نباشد، گوییم دنباله واگرا است. شکل (۱) دنباله هایی را نشان می دهد که به عدد L همگرا هستند. همان گونه که مشخص است، در شکل

(۱- الف) ، اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد آن گاه تمام جملات بجز احتمالاً تعداد متناهی جمله a_n در فاصله $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ قرار دارند.



(ج) شکل ۱ (د)

مثال ۳. با استفاده از تعریف ثابت کنید $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ همگرا به ۰ است.

حل. فرض $\epsilon>0$ داده شده است، چون جملات دنباله مثبت اند نامساوی $|a_n-0|<\epsilon$ به صورت $\frac{1}{\sqrt{n}}<\epsilon$ است، و این معادل است با $\sqrt{n}>\frac{1}{\epsilon}$ یا $n>\frac{1}{\epsilon^2}$ ، بنابراین تنها نیاز داریم که N اولین عدد مثبت بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{\epsilon^2}$ باشد.

برای مثال، به ازای $\epsilon=0.01$ ، $|\frac{1}{\sqrt{n}}-0|=\frac{1}{\sqrt{n}}<0.01$ وقتی که $n>10000$ باشد یعنی با انتخاب $N=10000$ تعریف برقرار است.

برای تعیین اینکه یک دنباله $\{a_n\}$ همگرا است یا واگرا می باشد، مستقیماً با $\lim_{n\to\infty} a_n$ کار می‌کنیم و روش بررسی مشابه $\lim_{x\to\infty} f(x)$ است، اگر a_n ها صعودی یا نزولی بدون کران برای $n\to\infty$ باشند آن گاه $\{a_n\}$ لزوماً واگرا است و

می‌گوییم

(۴) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

مثال ۴. دنباله $\{n^2+n\}$ واگرا است زیرا $\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$.

گاهی واگرا بودن یک دنباله بغیر از حالاتی است که در (۳) بیان شده است.

مثال ۵. دنباله $\{(-1)^n\}$ واگرا است، زیرا $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ وجود ندارد. جمله عمومی $(-1)^n$ بین ۱ و ۱- به تناوب برای $n\to\infty$ تغییر می‌کند.

مثال ۶. تعیین کنید چه وقت دنباله $\left\{\frac{3n(-1)^n}{n+1}\right\}$ همگرا یا واگرا است.

حل.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n(-1)^n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$$
گرچه $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{n}}=3$ ولی حد وجود ندارد، زیرا از جمله $(-1)^n$ دیده می‌شود که برای $n\to\infty$

$$\lim a_n=\begin{cases}3 & n \text{ زوج}\\ -3 & n \text{ فرد}\end{cases}$$
پس دنباله واگرا است.

یک دنباله ثابت $c, c, c, \ldots$ را به صورت $\{c\}$ می‌نویسیم. این دنباله به c همگرا است. شکل (۱-c)

مثال ۷. دنباله $\{\pi\}$ همگرا به π است.

مثال ۸. نشان دهید دنباله $\{(n+1)^{1/n}\}$ به ۱ همگرا است.

حل. اگر قرار دهیم $y=(x+1)^{1/x}$ آنگاه حد به فرم مبهم ∞^0 برای $x\to\infty$

است. بنابراین از قاعده‌ی هوپیتال داریم

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n} = e^0 = 1$$

مثال ۹. تعیین کنید دنباله $\left\{\sqrt{\frac{n}{9n+1}}\right\}$ همگرا یا واگرا است.

حل. چون قاعده‌ی هوپیتال نشان می‌دهد که برای $n\to\infty$

$$\frac{n}{9n+1} \to \frac{1}{9}$$

می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{9n+1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

پس دنباله همگرا به $\frac{1}{3}$ است.

در قضیه زیر خواص دنباله‌ها شبیه به قضیه بیان شده در فصل سوم آورده شده است.

قضیه ۶. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا هستند. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ آن‌گاه

الف) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n = kL_1$ ، k ثابت

ب) $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L_1+L_2$

ج) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 L_2$

د) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$ ، $L_2 \neq 0$

مثال ۱۰. با توجه به مثال (۳) و قضیه (۶ ـ الف)، دیده می‌شود که دنباله $\left\{\frac{5}{\sqrt{n}}\right\}$ همگرا به $5\times 0 = 0$ است.

مثال ۱۱. با استفاده از قضیه (۶)، نشان دهید $\{\frac{1}{n}\}$ همگرا به ۰ است.

حل.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\times 0=0$$

دو قضیه بعد، بسیار پرکاربرد هستند.

قضیه ۷. الف) دنباله $\{r^n\}$ برای $|r|<1$ همگرا به ۰ است.

ب) دنباله $\{r^n\}$ واگرا است هرگاه $|r|>1$ باشد.

قضیه ۸. برای هر عدد گویای مثبت r، دنباله $\{\frac{1}{n^r}\}$ همگرا به صفر است.

مثال ۱۲. الف) دنباله $\{(\frac{3}{2})^n\}$ یا $\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{27}{8},\dots$ واگرا است، زیرا از قضیه ۷-ب) با $r=\frac{3}{2}>1$ دنباله واگرا است.

ب) دنباله $\{e^{-n}\}$ همگرا به صفر است زیرا با $r=\frac{1}{e}<1$ از قضیه ۷-الف دنباله همگرا به ۰ است.

مثال ۱۳. تعیین کنید دنباله $\{\frac{e^n}{n+4e^n}\}$ همگرا یا واگرا است.

حل. مشاهده می‌شود که $\lim_{n\to\infty}e^n=\infty$ و $\lim_{n\to\infty}n+4e^n=\infty$. پس اگر $f(x)=\frac{e^x}{x+4e^x}$ آن‌گاه $\lim_{x\to\infty}f(x)$ دارای فرم مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است. طبق قاعده هوپیتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x+4e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+4e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{4e^x}=\frac{1}{4}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n+e^n}=\frac{1}{4}$$

یعنی دنباله همگرا به $\frac{1}{4}$ است.

مثال ۱۴. تعیین کنید که دنباله $\{\frac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}}\}$ همگرا یا واگرا است.

حل. مشاهده می‌شود که $\lim_{n\to\infty} 2-3e^{-n}=2$ و $\lim_{n\to\infty} 6+4e^{-n}=6$. طبق قضیه (۲-۷) داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(2-3e^{-n})}{\lim_{n\to\infty}(6+4e^{-n})}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

پس دنباله همگرا است.

مثال ۱۵. از قضایای (۶) و (۸) دیده می‌شود که دنباله $\{10+\frac{4}{n^{3/2}}\}$ همگرا به عدد 10 است.

نماد $n!$، بخوانید "n فاکتوریل" به دفعات در این فصل بیان می‌شود. برای تعریف آن، اگر n یک صحیح مثبت باشد آنگاه $n!$ به معنای ضرب n عدد اول صحیح مثبت است.

$$n! = 1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n$$

برای مثال $5! = 1\times2\times3\times4\times5=120$. یک خاصیت مهم فاکتوریل به صورت

$$n! = (n-1)!\,n$$

است، و این معادل است با

$$(n+1)! = n!\,(n+1)$$

حال وقتی $n=1$ است داریم

$$0! = 1$$

۲.۹ دنباله‌های یکنوا

در بخش قبل نشان دادیم که یک دنباله $\{a_n\}$ همگرا است هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ را بتوان یافت. به هر حال، همیشه قادر به یافتن $\lim_{n\to\infty} a_n$ نیستیم. برای مثال، آیا دنباله

$$\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\}$$

همگرا است؟ این دنباله یک دنباله همگرا است. با توجه به نوع خاص دنباله می توان ثابت کرد دنباله همگرا است بدون اینکه حد آن را بیابیم. چگونه می توان چنین نتیجه ای گرفت؟ بحث را با یک تعریف شروع می کنیم.

تعریف ۹. دنباله $\{a_n\}$ را یکنوا گوییم هرگاه

الف) صعودی باشد: $a_1<a_2<\dots<a_n<\dots$ یا

ب) نزولی باشد: $a_1>a_2>\dots>a_n>\dots$ یا

ج) غیرنزولی باشد. $a_1\le a_2\le \dots \le a_n\le \dots$ یا

د) غیرصعودی باشد $a_1\geq a_2\geq \dots \geq a_n\geq \dots$.

مثال ۱۴. الف) دنباله های

$$4, 6, 8, 10, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \dots$$

یکنوا هستند. در واقع به ترتیب، صعودی، نزولی و غیرنزولی اند.

ب) دنباله $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ یکنوا نیست.

تعیین صعودی، نزولی یا یکنوایی یک دنباله همیشه امکان پذیر نیست. در جدول زیر سه روش برای یکنوایی دنباله ذکر شده است.

فرض	اگر	آنگاه
یک تابع $f(x)$ به طوری که $f(n)=a_n$	$\forall x,\ f'(x)>0$ $\forall x,\ f'(x)<0$	$\{a_n\}$ صعودی است. $\{a_n\}$ نزولی است
نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ که در آن برای همه n ، $a_n>0$ است	$\forall n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ $\forall n,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<1$	$\{a_n\}$ صعودی است $\{a_n\}$ نزولی است

آن‌گاه	اگر	فرم
$\{a_n\}$ صعودی است	$\forall n,\ a_{n+1}-a_n>0$	تفاضل $a_{n+1}-a_n$
$\{a_n\}$ نزولی است.	$\forall n,\ a_{n+1}-a_n<0$	

مثال ۱۷. نشان دهید دنباله $\{\frac{n}{e^n}\}$ نزولی است.

حل. اگر قرار دهیم $f(x)=\frac{x}{e^x}$ آن‌گاه $f(n)=a_n$، حال

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0 \qquad \forall x>1$$

نتیجه می‌دهد که f روی $[1,\infty)$ نزولی است. بنابراین دنباله داده شده، نزولی است.

روش دوم.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n}=\frac{n+1}{ne}=\frac{1}{e}+\frac{1}{ne}<1 \qquad \forall n\geq 1$$

پس برای $n\geq 1$ داریم $a_{n+1}<a_n$.

مثال ۱۸. نشان دهید می‌شود که دنباله $\{\frac{2n+1}{n+1}\}$ یا $\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\ldots$ صعودی است، زیرا

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2n+3}{n+2}-\frac{2n+1}{n+1}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0 \qquad \forall n$$

پس برای هر n داریم $a_{n+1}>a_n$.

تعریف ۱۵. دنباله کراندار. دنباله $\{a_n\}$ را کراندار گوییم هرگاه عدد مثبت B وجود داشته باشد به طوری که برای هر n، $|a_n|\leq B$.

مثال ۱۹. دنباله $\{\frac{2n+1}{n+1}\}$ از بالا به 2 کراندار است زیرا

$$\frac{2n+1}{n+1}\leq\frac{2n+2}{n+1}=\frac{2(n+1)}{n+1}=2$$

علاوه بر آن $\frac{2n+1}{n+1}\geq 0$ نشان می‌دهد که دنباله از پایین نیز به 0 کراندار است.

بنابراین

$$\forall n, \quad 0 \leq \frac{2n+1}{n+1} \leq 2$$

درنتیجه دنباله کراندار است. علاوه بر آن جملات دنباله از پایین به -2 نیز کراندارند پس می‌توان نوشت:

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} \right| \leq 2, \quad \forall n$$

قضیه زیر در ادامه بخش‌های دیگر این فصل مفید است.

قضیه ۱۱. یک دنباله یکنوای کراندار، همگرا است.

اثبات. قضیه را در حالتی که دنباله غیرنزولی است، ثابت می‌کنیم. طبق فرض $\{a_n\}$ کراندار است پس B وجود دارد به طوری که

$$\forall n, \quad |a_n| \leq B$$

بنابراین مجموعه نامتناهی $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ از بالا کراندار است، پس دارای کوچکترین کران بالایی مثلاً L است. حال نشان می‌دهیم دنباله به L همگرا است. برای $\varepsilon > 0$، می‌دانیم که $L - \varepsilon < L$ درنتیجه $L - \varepsilon$ یک کران بالای S نیست. بنابراین عدد مثبت N ای وجود دارد به طوری که $a_N > L - \varepsilon$. از طرفی چون $\{a_n\}$ غیرنزولی است پس

$$L - \varepsilon \leq a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \dots \leq L + \varepsilon$$

یعنی برای هر $n > N$ داریم

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$$

پس $|a_n - L| < \varepsilon$. بنابراین $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ و دنباله همگرا است.

مثال ۲۰. دنباله $\left\{ \frac{2n+1}{n+1} \right\}$ در مثال (۱۸) یکنوا است و در مثال (۱۹) دیدیم که کراندار است، پس طبق قضیه (۱۱) همگرا می‌باشد.

مثال ۲۱. نشان دهید دنباله $\left\{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right\}$ همگرا است.

حل. نخست، نشان دهید

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)(2n+2)}\times\frac{2\times4\times\cdots\times(2n)}{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}$$

$$=\frac{2n+1}{2n+2}<1$$

نشان می دهد که برای هر n، $a_{n+1}<a_n$. دنباله نکنوا است. زیرا نزولی می باشد. از طرفی

$$0<\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}<1$$

پس دنباله کراندار است. بنابراین از قضیه (۱۱) نتیجه می گیریم که دنباله داده شده همگرا است.

∘ ∘

قضیه ۱۲. هر دنباله همگرای $\{a_n\}$ لزوماً کراندار است، اما هر دنباله کرانداری لزوماً همگرا نیست. می توان گفت که اگر دنباله $\{a_n\}$ بی کران باشد آن گاه واگرا است.

۳.۹ سریهای نامتناهی

مفهوم یک سری ارتباط بسیار نزدیکی با مفهوم یک دنباله دارد. اگر $\{a_n\}$ دنباله ای به صورت $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ باشد آن گاه مجموع

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (۴)$$

را یک سری نامتناهی یا به طور ساده تر یک سری نامیم. a_k ها برای $k=1,2,3,\ldots$ را جملات سری نامیده و a_n را جمله عمومی سری گوییم. مجموع در (۴) را به صورت فشرده تر $\sum a_k$ یا $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ نمایش می دهیم.

مثال ۲۲. نمایش دهدهی عدد گویای $\frac{1}{3}$، سری نامتناهی به شکل زیر است

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

سوالی که در این بخش و بخش های بعد مطرح می شود این است که:

چه وقت یک سری ناتناهی به جمع عددی می رسد؟

در مثال (۲۲)، دیدیم که عدد $\frac{1}{3}$ مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$ است. اما سری ناتناهی

$$100+1000+10000+\cdots$$

که جملاتش بزرگ و بزرگتر می شود دارای هیچ جمعی نیست. به عبارت دیگر انتظار نداریم که سری فوق به جمعی برسد یا اصطلاحاً به عددی همگرا باشد. مفهوم همگرایی یک سری ناتناهی برحسب همگرایی نوعی خاص از دنباله ها مطرح می شود.

دنباله جمع های جزئی ۱۳. متناظر به هر سری ناتناهی $\sum a_k$، یک دنباله به نام دنباله جمع های جزئی $\{S_n\}$ وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$S_1=a_1$$

$$S_2=a_1+a_2$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$\vdots$$

جمله عمومی $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ در این دنباله را nامین جمع جزئی نامیده می شود.

مثال ۲۳. دنباله جمع های جزئی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$ عبارت است از

$$S_1=\frac{3}{10}$$

$$S_2=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}$$

$$S_3=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}$$

$$\vdots$$

$$S_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}$$

$$\vdots$$

در مثال (۲۳)، وقتی n بزرگ می شود، S_n به تقریب خوبی برای $\frac{1}{3}$ می رسد
بنابراین

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$$

این مطلب منجر به تعریف زیر می شود.

تعریف ۱۴. همگرایی سری ها. سری نامتناهی $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را همگرا گوییم هرگاه دنباله جمع های جزئی یعنی دنباله $\{S_n\}$ همگرا باشد. در این حالت

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

عدد S را جمع سری نامیم. اگر $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجود نباشد، سری را واگرا گوییم.

مثال ۲۴. نشان دهید سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+4)(k+5)}$ همگرا است.

حل. با تجزیه به کسرهای جزئی جملات سری به صورت زیر نوشته می شوند

$$a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}$$

بنابراین n امین جمع جزئی سری برابر است با

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right) \\ &= \frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\cdots-\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5} \\ &= \frac{1}{5}-\frac{1}{n+5} \end{aligned}$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+5}=0$ پس $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5}$، بنابراین سری همگرا است و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{1}{5}$$

سری تلسکوپی ۱۵. در مثال (۲۴) جمله عمومی دنباله جمع های جزئی وابسته به دو جمله است، سری فوق را سری تلسکوپی نامیم. یعنی سری به صورت زیر را یک سری تلسکوپی گوییم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(f(n)-f(n+1)\right)$$

سری هندسی ۱۶. سری به صورت

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1} \qquad (5)$$

را یک سری هندسی نامیم.

قضیه ۱۷. سری هندسی $\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ ، $a\neq 0$ همگرا به $\frac{a}{1-r}$ است هرگاه $|r|<1$ و واگرا است هرگاه $|r|\geq 1$ باشد.

اثبات، جمله عمومی دنباله جمع های جزئی سری (5) را در نظر بگیرید:

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \qquad (6)$$

طرفین عبارت در (6) را در r ضرب می کنیم، داریم

$$rS_n=ra+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n \qquad (7)$$

با کم کردن (7) از (6) و حل برای S_n داریم

$$S_n-rS_n=a-ar^n$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad r\neq 1 \qquad (8)$$

حال از قضیه (7) می دانیم که

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}0 & |r|<1\\ \text{موجود نیست} & |r|\geq 1\end{cases}$$

پس برای $|r|<1$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

واگر $|r|>1$ آن گاه $\lim_{n\to\infty} r^n$ وجود ندارد. اثبات واگرائی سری هندسی برای $r=\pm 1$ به عنوان تمرین واگذار می شود.

مثال ۲۵. در سری هندسی

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$$

داریم $a = 1$ و $r = -\frac{1}{3}$. چون $|(-\frac{1}{3})| < 1$ پس سری همگرا است و

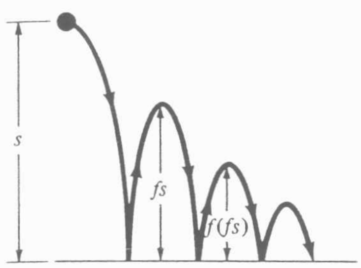
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$$

مثال ۲۶. سری هندسی

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 5+\frac{15}{2}+\frac{45}{4}+\cdots$$

واگرا است، زیرا $|r| = \frac{3}{2} > 1$.

مثال ۲۷. یک توپ از ارتفاع s متر به طرف زمین سقوط می‌کند. برای رسیدن به زمین زمان $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ طول می‌کشد. فرض کنید هر بار که توپ به زمین برخورد می‌کند تا ارتفاع f ($0<f<1$) به طرف بالا حرکت کند. فرمولی برای زمان T که توپ بایستد را به دست آورید. (شکل (۲) را ببینید)



شکل ۲

حل. زمان سقوط از ارتفاع s تا سطح زمین = $\sqrt{\frac{2s}{g}}$

زمان رسیدن به ارتفاع fs و در نتیجه سقوط از fs متر تا سطح زمین = $2\sqrt{\frac{2fs}{g}}$

زمان رسیدن به اوج $f(fs)$ و سپس سقوط از $f(f(s))$ متر به سطح زمین = $2\sqrt{\frac{2f^2s}{g}}$

به همین ترتیب، بنابراین زمان کل T توسط یک سری نامتناهی داده می‌شود.

$$T=\sqrt{\frac{2s}{g}}+2\sqrt{\frac{2fs}{s}}+2\sqrt{2\frac{f^2s}{g}}+\cdots+2\sqrt{\frac{f^ns}{g}}+\cdots$$
$$=\sqrt{\frac{2s}{g}}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{f})^k\right.$$

چون $0<f<1$، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{f})^n$ یک سری هندسی همگرا با $a=\sqrt{f}$ و $r=\sqrt{f}$ است، پس

$$T=\sqrt{\frac{2s}{g}}\left[1+2\frac{\sqrt{f}}{1-\sqrt{f}}\right] \quad \text{یا} \quad T=\sqrt{\frac{2s}{g}}\left[\frac{1+\sqrt{f}}{1-\sqrt{f}}\right]$$

سری همساز (هارمونیک) ۱۸.۱ مثال دیگری از یک سری واگرا، سری زیر است که آن را سری همساز (هارمونیک) نامیم.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \qquad (9)$$

جمله عمومی دنباله جمع های جزئی سری (۸) توسط

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

داده می شود. بنابراین

$$\begin{aligned}
S_{2n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\\
&=S_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\\
&\geqslant S_n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\\
&=S_n+n\left(\frac{1}{2n}\right)\\
&=S_n+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

براساس $S_{2n}\geqslant S_n+\frac{1}{2}$ نتیجه می دهد که دنباله جمع های جزئی بی کران است، زیرا

$$\begin{aligned}
S_2&\geqslant S_1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\
S_4&\geqslant S_2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\\
S_8&\geqslant S_4+\frac{1}{2}\geqslant 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\\
S_{16}&\geqslant S_8+\frac{1}{2}\geqslant\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3
\end{aligned}$$

به همین ترتیب، بنابراین دنباله جمع جزئی و در نتیجه سری هارمونیک واگرا است.

اگر a_n و S_n به ترتیب جمله عمومی سری و جمله عمومی دنباله جمع های جزئی متناظر به آن سری باشند آنگاه $a_n=S_n-S_{n-1}$. حال اگر سری همگرا به S باشد داریم $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ و $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S$ پس

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$$

پس قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۹. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

آزمون برای واگرایی یک سری ۲۰. قضیه (۱۹) به طور ساده بیان می‌کند که اگر یک سری نامتناهی همگرا باشد آن‌گاه جمله n ام یا جمله عمومی سری به صفر میل می‌کند، یا به طور معادل

اگر جمله n ام یک سری نامتناهی وقتی $n\to\infty$ به صفر میل نکند آن‌گاه سری همگرا نیست. این نتیجه را به عنوان یک آزمون برای واگرایی به صورت زیر بیان کرده‌ام.

قضیه ۲۱. آزمون جمله n ام برای واگرایی. اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آن‌گاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است.

مثال ۲۸. سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-1}{5k+3}$ را در نظر بگیرید. چون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{5n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-1/n}{5+3/n} = \frac{4}{5} \neq 0$$

از قضیه (۲۱) نتیجه می‌شود که سری واگرا است.

قضیه ۲۲. اگر c عدد ثابتی باشد، آن‌گاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ یا هر دو همگرااند یا هر دو واگرا هستند.

قضیه ۲۳. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا به S_1 و S_2 باشند آن‌گاه $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ همگرا به S_1+S_2 است.

قضیه ۲۴. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا و سری $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا باشد آن‌گاه سری $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ واگرا است.

مثال ۲۹. از قضیه (۱۷) دیده می‌شود که سری‌های هندسی $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ به ترتیب به 2 و $\frac{3}{2}$ همگرا هستند. بنابراین از قضیه (۲۳) نتیجه می‌شود که سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right]$$

به $2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ همگرا است.

مثال ۳۰. از مثال (۲۴) دیدیم که $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+4)(k+5)}$ همگرا است. چون $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ سری هارمونیک و واگرا است پس از قضیه (۲۴) نتیجه می‌شود که سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+4)(k+5)}+\frac{1}{k}\right]$$

واگرا است.

تبصره ۲۵. الف) وقتی که نماد مجموع را برحسب جمله‌ها می‌نویسیم، یک سری هندسی را می‌توان فوراً تشخیص داد یا اگر چنین شود، مقادیر a و r نمی‌توانند واضح باشند. برای مثال، برای دیدن اینکه $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ یک سری هندسی است، بهتر است دو یا سه جمله آن را بنویسیم

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}^{a}+\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}^{ar}+\overbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}^{ar^2}+\cdots$$

از طرف راست، می‌توانیم قرار دهیم $a=4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$ و $r=\frac{1}{2}<1$ پس سری همگرا به $\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ است. گرچه می‌توان سری $\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ را به فرم $\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$ با فرض $k=n-2$ نمایش داد. در نتیجه

$$\sum_{n=3}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=\sum_{k=1}^{\infty}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k+4}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{4\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}_{a}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{r^{k-1}}$$

ب) هر عدد گویا یا دارای بسط اعشاری متناهی است یا دارای بسط اعشاری تکراری است. هر عدد با بسط اعشاری تکراری یک سری هندسی است، بنابراین $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}$ همگرا است

زیرا $r=\frac{1}{10}<1$ و با $a=\frac{3}{10}$ داریم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{10^k}=\frac{3/10}{1-1/10}=\frac{3/10}{9/10}=\frac{1}{3}$$

ج) به بیان قضایای (۱۹) و (۲۰) باید دقت کرد. قضیه (۱۹) بیان نمی‌کند که اگر $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ آن‌گاه $\sum a_k$ همگرا است. در واقع اگر $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ آن‌گاه سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. برای مثال در سری هارمونیک $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ با $a_n=\frac{1}{n}$ داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ اما سری واگرا است.

د) وقتی همگرایی یک سری را تعیین می‌کنیم، امکان دارد (بعضی اوقات مناسب است) که تعدادی متناهی جمله از سری حذف شوند. به عبارت دیگر سری‌های متناهی $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ و $\sum_{k=N}^{\infty}a_k$، $N>1$ دارای اختلافی در یک تعداد متناهی جمله هستند و هر دو یا باهم همگرا اند یا باهم واگرا هستند. البته حذف $N-1$ جمله از یک سری همگرا معمولاً روی جمع سری اثر می‌گذارد.

۴.۹ سری‌هایی با جملات مثبت

اثبات همگرایی یا واگرایی یک سری از دنباله جمع‌های جزئی معمولاً مشکل است. اگر سری‌های تلسکوپی و سری‌های هندسی که حل عمومی جمع جزئی آن را می‌توان بدست آورد. اما معمولاً امکان تعیین همگرایی یا واگرایی یک سری را با استفاده از آزمون‌هایی که تنها برحسب جملات سری می‌باشند وجود دارد. در این بخش پنج آزمون برای سری‌های با جملات مثبت را بکار می‌بریم.

۱.۴.۹ آزمون‌های انتگرال و مقایسه‌ای

آزمون انتگرال ۲۶. اولین آزمونی که در رابطه با مفاهیم همگرایی و واگرایی یک

سری با جملات مثبت در نظر می‌گیریم با انتگرال نامسره یک تابع ساخته شده توسط جملات سری است.

قضیه ۲۷. آزمون انتگرال. فرض کنید f تابعی پیوسته است که نامنفی و نزولی برای $x \geq 1$ می‌باشد و برای $k \geq 1$ ، $f(k)=a_k$.

الف) اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{k=1}^\infty a_k$ همگرا است.

ب) اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{k=1}^\infty a_k$ واگرا است.

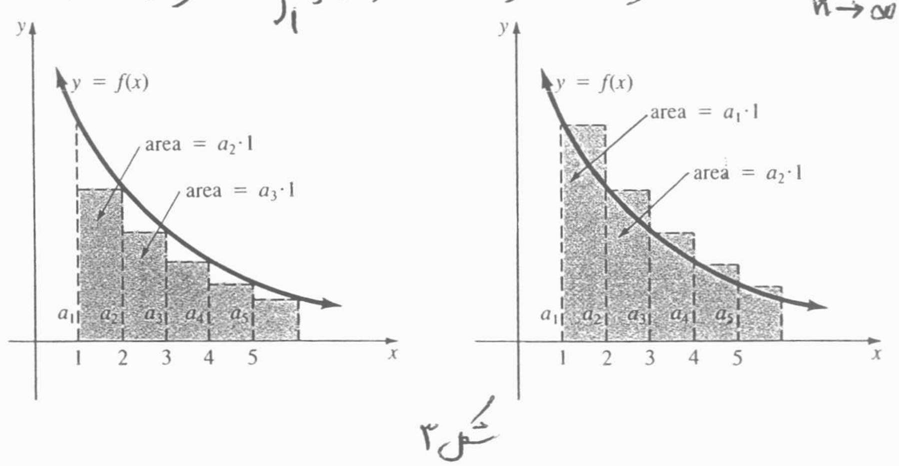
اثبات. اگر نمودار f در شکل (۳) داده شده باشد آنگاه با در نظر گرفتن سطح مستطیل های نشان داده شده در شکل، دیده می‌شود که

$$0 \le a_2+a_3+\dots+a_n \le \int_1^n f(x)\,dx \le a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$$

یا

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx \le S_{n-1}$$

از نامساوی $S_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,dx$ مشاهده می‌شود که $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجود است هرگاه $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ وجود داشته باشد. از طرف دیگر از $S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\,dx$ نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} S_{n-1}$ موجود نیست هرگاه $\int_1^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد.



شکل ۳

نکته ۲۸. در آزمون انتگرال، اگر سری با جملات مثبت به صورت $\sum_{k=N}^\infty a_k$ باشد آنگاه از $\int_N^\infty f(x)\,dx$ استفاده می‌کنیم که در آن $f(k)=a_k$.

مثال ۳۱. همگرایی $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ را آزمون کنید.

حل. تابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ پیوسته، نامنفی و نزولی روی $[3,\infty)$ است و

$f(k)=a_k=\frac{\ln k}{k}$. حال

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^{t}\frac{\ln x}{x}dx$$
$$=\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 \Big|_3^t$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left[(\ln t)^2-(\ln 3)^2\right]=\infty$$

پس سری واگرا است.

p-سری ۲۹. آزمون انتگرال برای هر p-سری به فرم

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \qquad (10)$$

قابل استفاده است. سری هارمونیک $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ یک p-سری با $p=1$ است.

قضیه ۳۰. p-سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ برای $p>1$ همگرا و برای $p\le 1$ واگرا است.

اثبات. تمرین

مثال ۳۲. الف) سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/2}}$ واگرا است زیرا $p=\frac{1}{2}<1$.

ب) سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ همگرا است زیرا $p=2>1$.

آزمون مقایسه‌ای ۳۱. اغلب برای تعیین همگرایی یا واگرایی سری $\sum a_k$ آن را با یک سری مانند $\sum b_k$ که همگرایی یا واگرایی آن را می‌دانیم مقایسه می‌کنیم.

قضیه ۳۲. آزمون مقایسه‌ای. فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ سری‌هایی با جملات

مثبت اند.

الف) اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا بوده و برای هر عدد صحیح مثبت k، $a_k \le b_k$

آن گاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است.

ب) اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا بوده و برای هر عدد صحیح مثبت k، $a_k \geq b_k$

آن گاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است.

اثبات. فرض کنید $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ و $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ جملات عمومی دنباله های مجموع های جزئی سری های $\sum a_k$ و $\sum b_k$ باشند.

الف) اگر $\sum b_k$ همگرا بوده و $a_k \le b_k$ آن گاه $S_k \le T_k$. چون $\lim_{n\to\infty} T_n$ وجود دارد پس $\{S_n\}$ یک دنباله کراندار است و بنابراین طبق قضیه (۱۱) همگرا است. پس $\sum a_k$ همگرا است.

ب) اگر $\sum b_k$ واگرا بوده و $a_k \geq b_k$ آن گاه $S_n \geq T_n$. چون T_n صعودی بدون کران است پس S_n نیز صعودی بدون کران است. بنابراین $\sum a_k$ واگرا است.

در حالت کلی، اگر $\sum c_k$ و $\sum d_k$ دو سری باشند و برای هر k، $c_k \le d_k$ گوییم سری $\sum c_k$ توسط سری $\sum d_k$ قطع شده (مغلوب) است. بنابراین برای سری های با جملات مثبت، قضیه (۳۲ - الف) نتیجه می دهد که $\sum a_k$ همگرا است هرگاه بوسیله یک سری همگرا قطع شده باشد. در قضیه (۳۲ - ب) دیده می شود که سری $\sum a_k$ واگرا است هرگاه یک سری واگرا را قطع کند.

مثال ۳۳. در همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+4}$ بحث کنید.

حل. مشاهده می شود که

$$\frac{k}{k^3+4} \le \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$$

چون سری توسط یک سری همگرا یعنی p-سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ قطع شده است پس همگرا است.

مثال ۳۴. در همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+2)}{k}$ بحث کنید.

حل، چون برای $1 \le k$

$$\ln(k+2) > 1$$

پس

$$\frac{\ln(k+2)}{k} > \frac{1}{k}$$

در این حالت سری داده شده یک سری واگرا یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ را قطع کرده است پس خود سری داده شده واگرا است.

نوع دیگری از آزمون مقایسه ای که برحسب حد یک نسبت از جمله عمومی یک سری به جمله عمومی سری دیگری که وضعیت همگرایی یا واگرایی آن معلوم است، را در اینجا بیان می کنیم.

قضیه ۳۳. آزمون مقایسه ای حدی. فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ سری هایی با جملات مثبت اند و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

الف) اگر L یک ثابت مثبت باشد آن گاه دو سری یا باهم همگرا اند یا باهم واگرا هستند.

ب) اگر $L=0$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا باشد آن گاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است.

ج) اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا باشد آن گاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است.

اثبات. الف) چون $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$، n را چنان بزرگ انتخاب می کنیم که به ازای عدد صحیح مثبتی مانند N که $n \ge N$

$$\frac{1}{2}L \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2}L$$

این نامساوی نتیجه می دهد که برای $n \ge N$، $a_n \le \frac{3}{2} b_n$. اگر $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همگرا باشد از

آزمون مقایسه‌ای با $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ نتیجه می‌شود که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است. علاوه بر آن چون برای $n \geq N$ ، $\frac{1}{2} L b_n \leq a_n$ دیده می‌شود که اگر $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واگرا باشد آنگاه $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ واگرا است.

آزمون مقایسه‌ای اغلب برای سری‌هایی که آزمون مقایسه‌ای مناسب نیست قابل استفاده است.

مثال ۲۵. استفاده از آزمون مقایسه‌ای برای سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3-5k^2+1}$ مشکل است. به هر حال می‌دانیم که $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ یک p-سری با $p=3>1$ همگرا است. بنابراین با

$$a_n = \frac{1}{n^3-5n^2+1}, \quad b_n = \frac{1}{n^3}$$

داریم

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^3}{n^3-5n^2+1} = 1$$

از قسمت (الف) قضیه (۳۳) نتیجه می‌شود که سری داده شده همگرا است.

اگر جمله عمومی a_n از سری $\sum a_k$ به صورت خارج قسمت توان‌های گویای n یا ریشه‌های چندجمله‌ای بر حسب n باشد، به طور کلی می‌توان جمله عمومی b_n برای آزمون سری $\sum b_k$ را هم درجه با a_n برای مقادیر بزرگ n گرفت. به عبارت دیگر برای انتخاب b_n مناسب تنها نیاز به آزمون خارج قسمت بالاترین توان‌های n در صورت و مخرج a_n داریم.

مثال ۲۶. در همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{8k^5+7}}$ بحث کنید.

حل. برای مقادیر بزرگ n ، $a_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}}$ مشابه با مضرب ثابت

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{n}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^{2/3}}$$

رفتار می‌کند، پس با p-سری واگرای

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}} \qquad (p=\frac{2}{3}<1)$$

کار می‌کنیم،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n/\sqrt[3]{8n^5+7}}{1/n^{2/3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5}{8n^5+7}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}$$

از قسمت (الف) قضیه (۴۳) نتیجه می‌شود سری داده شده واگرا است.

تبصره ۴۴ . الف) وقتی با آزمون انتگرال کار می‌کنیم، باید توجه داشت که مقدار همگرای انتگرال ناسره $\int_1^\infty f(x)dx$ لزوماً مساوی با جمع سری نیست.

ب) نتایج آزمون انتگرال برای $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ برقرار است حتی اگر تابع پیوسته نامنفی f به ازای $n \leq N \leq x$ شروع به نزول کند. برای سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ تابع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ روی فاصله $[3,\infty)$ نزولی است، با آن که در آزمون انتگرال از $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$ استفاده می‌کنیم.

ج) فرضیات آزمون مقایسه‌ای را می‌توان برای k های به اندازه کافی بزرگ و برای هر عدد صحیح مثبت در نظر گرفت، تنها نیاز است که $a_k \leq b_k$ یا $a_k \geq b_k$.

د) در بکارگیری آزمون مقایسه‌ای، اغلب ساده‌تر این است که سری توسط یک سری واگرا قطع شود. برای مثال $\frac{1}{5^k+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ به وضوح برقرار است و $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ واگرا است، ولی چیزی در مورد سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k+\sqrt{k}}$ را به دست نمی‌دهد. سری فوق همگرا است، به طوری که به هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت هرگاه سری یک سری همگرا را قطع کند.

در جدول زیر آزمون مقایسه‌ای خلاصه شده است. فرض کنید $\sum a_k$ یک سری

با جملات مثبت است.

تعالیه جملات	سری آزمون $\sum b_k$	نتیجه‌گیری در مورد $\sum a_k$
$a_k \le b_k$	همگرا	همگرا
$a_k \le b_k$	واگرا	بدون اطلاع هستیم
$a_k \geq b_k$	واگرا	واگرا
$a_k \geq b_k$	همگرا	بدون اطلاع هستیم

۲.٤.۹ آزمون‌های نسبت و ریشه

آزمون نسبت ۳۵. آزمون نسبت، آزمونی است که حد نسبت جمله $(n+1)$ام به جمله nام سری را مورد بررسی قرار می‌دهد. این آزمون مخصوصاً زمانی مفید است که a_k شامل فاکتوریل، توان‌های k یک ثابت، و بعضی اوقات توان kام k باشد.

قضیه ۳۶. آزمون نسبت. فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک سری با جملات مثبت است به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

الف) اگر $L<1$ باشد، سری همگرا است.

ب) اگر $L>1$ باشد، یا اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$ آن‌گاه سری واگرا است.

ج) اگر $L=1$ باشد، آزمون جوابی نمی‌دهد.

اثبات. (الف) فرض کنید r عددی مثبت است به طوری که $0 \le L \le r < 1$. برای n به اندازه کافی بزرگ، مثلاً $n \geq N$ به ازای عدد صحیحی مانند N، $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ یعنی

$$a_{n+1} < r a_n \qquad n \geq N$$

درنتیجه

$$a_{N+1} < r a_N$$

$$a_{N+2} < r a_{N+1} < a_N r^2$$

$$a_{N+3} < r a_{N+2} < a_N r^3$$

و به همین ترتیب، بنابراین سری $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ با توجه به آزمون مقایسه‌ای با مقایسه سری هندسی همگرای $\sum_{k=1}^{\infty} a_N r^k$، همگرا است، چون با سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ تنها در حداکثر تعدادی متناهی تا تفاوت دارند پس سری مورد نظر نیز همگرا است.

ب) فرض کنید r عددی متناهی است به طوری که $1 < r < L$، در این صورت برای n به اندازه کافی بزرگ، مثلاً $n \geq N$ که در آن N عددی صحیح و مثبت است، داریم

$a_{n+1} > r a_n$ یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$، برای $r > 1$ این نامساوی نتیجه می‌دهد که

$$a_{n+1} > a_n$$

پس $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$، درنتیجه سری واگرا است.

درحالت $L = 1$، باید آزمون دیگری برای تعیین همگرایی یا واگرایی به کار ببریم.

مثال ۳۷. درهمگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ بحث کنید.

حل.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} 5 \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{5}{n+1} = 0$$

چون $L = 0 < 1$ پس سری همگرا است.

مثال ۳۸. درهمگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ بحث کنید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

چون $L=2>1$ پس سری واگرا است،

آزمون ریشه ۳۷. اگر جملات سری $\sum a_k$ شامل تنها توان‌های kام باشد آنگاه آزمون زیر که برحسب ریشه nام بیان شده است، به راحتی می‌توان به کار برد.

قضیه ۳۸. آزمون ریشه. فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ یک سری با جملات مثبت باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

الف) اگر $L<1$ باشد آنگاه سری همگرا است.

ب) اگر $L>1$ باشد یا $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$ آنگاه سری واگرا است،

ج) اگر $L=1$ باشد، آزمون جوابی نمی‌دهد.

اثبات آزمون ریشه بسیار شبیه آزمون نسبت است.

مثال ۳۹. در همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{k}\right)^k$ بحث کنید.

حل. طبق آزمون ریشه داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{5}{n}\right)^n\right]^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$$

چون $L=0<1$ پس سری همگرا است،

تبصره ۴۹. الف) آزمون نسبت را که شرح داده شد برای یک p-سری به کار برید و ببینید به نتیجه ای خواهید رسید. سعی کنید آزمون نسبت را برای $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ به کار برید.

ب) آزمون هایی که در این بخش مورد بررسی قرار گرفتند تنها تعیین می کنند که سری دارای یک جمع است یا خیر، اما مقدار جمع را به دست نمی دهند. اگر بدانیم یک سری دارای مقدار جمعی است، با جمع تعدادی شمارش جمله سری به تقریبی برای مقدار سری می رسیم.

۵.۹ سری های تناوبی و همگرایی مطلق.

سری های به فرم

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

یا

$$-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^{n}a_n+\cdots=\sum(-1)^{k}a_k$$

که در آن برای $k=1,2,3,\ldots$

$$a_k>0$$

را یک سری تناوبی نامیم. چون $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k$ تنها مضربی از $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ است، پس تنها یک نوع از این سری ها را در نظر می گیریم.

مثال ۶۰. سری های

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

و

$$\frac{\ln 2}{4}-\frac{\ln 3}{8}+\frac{\ln 4}{16}-\frac{\ln 5}{32}+\cdots=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\ln k}{2^k}$$

مثال هایی از سری های تناوبی اند.

آزمون سری‌های تناوبی ۴۰. سری نخست در مثال (۴۰) یعنی سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

را سری هارمونیک تناوبی نامیم. قبلاً دیدیم که سری هارمونیک $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ واگرا است، اما تولید جملات مثبت و منفی در دنباله جمع‌های جزئی سری هارمونیک تناوبی برای رسیدن به یک سری همگرا کفایت می‌کند. ثابت می‌کنیم $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ همگرا است، برای این منظور از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۴۱. آزمون سری‌های تناوبی. اگر $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ و برای هر عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $0<a_{k+1}\le a_k$ آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ همگرا است.

اثبات. مجموع‌های جزئی شامل $2n$ جمله را در نظر می‌گیریم

$$S_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}$$

$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}) \qquad (11)$$

چون برای هر $k=1,2,3,\cdots$

$$a_k-a_{k+1}\geqslant 0$$

پس

$$S_2\le S_4\le S_6\le\cdots\le S_{2n}\le\cdots$$

در نتیجه دنباله $\{S_{2n}\}$ با جمله عمومی S_{2n} شامل تعداد زوجی از جملات سری، یک دنباله یکنوا است. با بازنویسی مجدد (۱۱) به صورت زیر

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-\cdots-a_{2n}$$

نتیجه می‌شود که برای هر عدد صحیح مثبت n، $S_{2n}<a_1$. بنابراین $\{S_{2n}\}$ کراندار است. از قضیه (۱۱) نتیجه می‌شود که $\{S_{2n}\}$ همگرا به حد S است. حال

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$$

نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$
$$= S + 0 = S$$

پس دنباله جمع‌های جزئی $\{S_{2n+1}\}$ که جمله عمومی آن S_{2n+1} است نیز همگرا است و شامل جملات با شماره فرد می‌باشد. چون $\{S_{2n}\}$ و $\{S_{2n+1}\}$ هر دو همگرا به S اند پس $\{S_n\}$ همگرا به S است.

مثال ۴۱. نشان دهید سری هارمونیک تناوبی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ همگرا است.

حل. با فرض $a_n=\frac{1}{n}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \;,\quad a_{k+1}\le a_k$$

زیرا برای $k\geq 1$ ، $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{k}$. پس از قضیه (۴۱) نتیجه می‌شود سری همگرا است.

مثال ۴۲. سری تناوبی $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{3k-1}$ واگرا است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$$

گرچه نشان دادن $a_{k+1}\le a_k$ سرراست به نظر می‌رسد، اما گاهی اوقات چنین نیست.

مثال ۴۳. همگرایی سری $\sum(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k}}{k+1}$ را آزمون کنید.

حل. برای نشان دادن اینکه جملات سری در شرط $a_{k+1}\le a_k$ صدق می‌کنند، تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ را که $f(k)=a_k$ در نظر می‌گیریم.

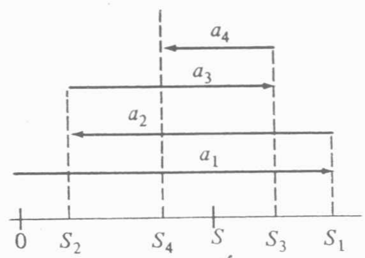
$$f'(x) = -\frac{x-1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} < 0 \qquad x>1$$

پس تابع برای $x>1$ نزولی است، بنابراین $a_{k+1}\le a_k$ ، $\forall k\geq 1$. از قاعده هوپیتال دیده می‌شود که $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ پس $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. درنتیجه طبق قضیه (۴۱) سری همگرا است.

۴۲. خطا در تقریب مجموع یک سری متناوب. فرض کنید سری متناوب $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ همگرا به عدد S است. مجموع جزئی های

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 - a_2$$
$$S_3 = a_1 - a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$
$$\vdots$$

را می‌توان روی یک خط عددی، شکل (۴)، نمایش داد.



شکل ۴

دنباله $\{S_n\}$ در الگوی شرح داده شده در شکل (۱-ج) همگرا است، یعنی جملات S_n به S وقتی $n \to \infty$ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند گرچه در دو طرف S نوسان می‌کنند. همان گونه که در شکل (۳) دیده می‌شود، جمع های جزئی با اندیس زوج کمتر از S اند و جمع های جزئی با اندیس فرد بزرگتر از S هستند. به عبارت دیگر جمع های جزئی با شماره زوج به عدد S صعود می‌کنند و جمع های جزئی با شماره فرد به S نزول می‌کنند. به این دلیل، جمع S سری باید بین جمع های جزئی S_n و S_{n+1} قرار داشته باشد.

$$S_n \le S \le S_{n+1} \qquad \text{اگر } n \text{ زوج} \qquad (۱۲)$$

$$S_{n+1} \le S \le S_n \qquad \text{اگر } n \text{ فرد} \qquad (۱۳)$$

از (۱۲) برای n زوج داریم

$$0 \le S - S_n \le S_{n+1} - S_n$$

و از (۱۳) برای n فرد داریم

$$0 \le S_n - S \le S_n - S_{n+1}$$

بنابراین در هر دو حالت داریم

$$|S_n - S| \le |S_{n+1} - S_n|$$

اما $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ برای n زوج و $S_{n+1} - S_n = -a_{n+1}$ برای n زوج، پس

$$|S_n - S| \le a_{n+1} \qquad \forall n$$

به این ترتیب قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۴۳. فرض کنید سری شاونی $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ با $a_k > 0$ به عدد S همگرا است. اگر S_n جمع جزئی nام سری بوده و برای هر k، $a_{k+1} \le a_k$ آنگاه برای هر n

$$|S_n - S| \le a_{n+1}$$

قضیه (۴۳) در تقریب مجموع یک سری شاونی همگرا بسیار مفید است، اگر خطای تقریب یعنی $|S_n - S|$ بین nامین جمع جزئی و جمع سری کمتر از قدر مطلق $(n+1)$امین جمله سری باشد.

مثال ۴۴. جمع سری شاونی همگرای $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$ را با چهار رقم اعشار دقت تقریب بزنید.

حل. از قضیه (۴۳) داریم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} < 0.00005$$

$$n=1, \quad a_2 = \frac{1}{4!} \simeq 0.041667$$

$$n=2, \quad a_3 = \frac{1}{6!} \simeq 0.001389$$

$$n=3, \quad a_4 = \frac{1}{8!} \simeq 0.000025 < 0.00005$$

پس $S_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} \simeq 0.4597$ تقریب مطلوب است.

تعریف ۴۴. همگرایی مطلق. سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را همگرای مطلق نامیم هرگاه $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ همگرا باشد.

مثال ۴۵. سری تناوبی $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ همگرای مطلق است زیرا سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

یک p-سری همگرا است.

تعریف ۴۵. همگرایی مشروط. سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را همگرای مشروط گوییم هرگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ واگرا و سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا باشد.

مثال ۴۶. دیدیم که سری هارمونیک تناوبی $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ همگرا است. اما سری $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ سری هارمونیک واگرا است. پس سری هارمونیک تناوبی همگرای مشروط است.

نتیجه بعد نشان می دهد که هر سری همگرای مطلق، همگرا است.

قضیه ۴۶. اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا است.

اثبات. اگر $c_k = a_k + |a_k|$ آنگاه $c_k \le 2|a_k|$. چون $\sum |a_k|$ همگرا است از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می شود که $\sum c_k$ همگرا است، علاوه بر آن

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - |a_k|)$$

همگرا است زیرا هر دو $\sum c_k$ و $\sum |a_k|$ همگرا اند، اما

$$\sum a_k = \sum (c_k - |a_k|)$$

پس $\sum a_k$ همگرا است.

توضیح ۴۷. توجه کنید، چون $\sum |a_k|$ یک سری با جملات مثبت است، آزمون‌های بخش قبل را می‌توان برای همگرایی مطلق یک سری بکار برد.

مثال ۴۶. همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2}$ را آزمون کنید.

حل. از آزمون انتگرال نتیجه می‌شود که سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ همگرا است. پس سری مورد نظر همگرای مطلق است. در نتیجه سری متناوبی داده شده همگرا است.

با این وصف آزمون‌های نسبت و ریشه را می‌توان مستقیماً برای سری‌های متناوبی به کار برد.

قضیه ۴۸. آزمون نسبت. فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک سری با جملات ناصفر است به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

الف) اگر $L < 1$ باشد آنگاه سری همگرای مطلق است.

ب) اگر $L > 1$ یا اگر $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ آنگاه سری واگرا است.

ج) اگر $L = 1$ باشد، آنگاه آزمون جوابی نمی‌دهد.

مثال ۴۷. همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{k 3^k}$ را آزمون کنید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} 2^{2n+1}}{(n+1) 3^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n}{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{3(n+1)} = \frac{4}{3}$$

چون $L = \frac{4}{3} > 1$ پس از قضیه (۴۸-ب) سری متناوبی واگرا است.

قضیه ۴۹. آزمون ریشه. فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یک سری نامتناهی است به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

الف) اگر $L<1$ باشد آنگاه سری همگرای مطلق است.

ب) اگر $L>1$ یا اگر $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$ باشد آنگاه سری واگرا است.

ج) اگر $L=1$ باشد آنگاه آزمون جواب نمی دهد.

تبصره ۵۰. الف) نتیجه گیری در قضیه (۴۱) معتبر باقی خواهد ماند، هرگاه فرض $a_{k+1}\le a_k$ برای هر k صحیح مثبت به عبارت $a_{k+1}\le a_k$ برای k به اندازه کافی بزرگ تغییر کند. برای سری تناوبی $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\ln k)/k^{1/3}$ می توان نشان داد که

$$a_{k+1}\le a_k \qquad k\geq 21$$

علاوه بر آن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. بنابراین طبق آزمون سری های تناوبی، سری فوق همگرا است.

ب) اگر سری $\sum |a_k|$ واگرا باشد، نمی توان نتیجه برای همگرایی یا واگرایی $\sum a_k$ گرفت.

ج) اگر $\sum a_k$ همگرای مطلق باشد آنگاه جملات سری را می توان مجدداً مرتب کرد یا گروه بندی نمود و سری حاصل همگرا به همان مقدار سری اصلی است، اما اگر جملات یک سری همگرای مشروط را به طریق دیگری جمع کنیم (تجدید آرایش) سری جدید ممکن است واگرا باشد یا همگرا به عددی متفاوت با جمع سری اصلی شود. به عنوان تمرین، نشان دهید اگر

$$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

جمع جزئی nام سری هارمونیک تناوبی همگرا باشد آنگاه سری مجدداً مرتب شده

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

همگرا به $\frac{3}{2}S$ است.

۶.۹ سری‌های توانی

یک سری شامل توان‌های صحیح نامنفی از متغیر x به صورت

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \qquad (۱۴)$$

که در آن c_kها ثابت‌های وابسته به k هستند را یک سری توانی برحسب x نامیم. سری در (۱۴) حالت خاصی از سری در فرم کلی‌تر

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k \qquad (۱۵)$$

است که آن را سری توانی برحسب $(x-a)$ یا سری توانی برحسب x حول a نامیم.
مسئله اصلی که در این بخش به آن خواهیم پرداخت، جواب به سؤال زیر است.

برای چه مقادیری از x سری توانی همگرا است.

مشاهده می‌شود که (۱۴) و (۱۵) به ترتیب در $x=0$ و $x=a$ به c_0 همگرایند.

مثال ۴۸. سری توانی

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

را می‌توان به عنوان یک سری هندسی با $r=x$ در نظر گرفت. بنابراین سری برای مقادیری از x که در شرط $|x|<1$ یا $-1<x<1$ صدق می‌کنند همگرا است.

فاصله همگرایی ۱۵. مجموعه تمام اعداد حقیقی x که به ازای آن‌ها سری توانی همگرا است را فاصله همگرایی نامیم.

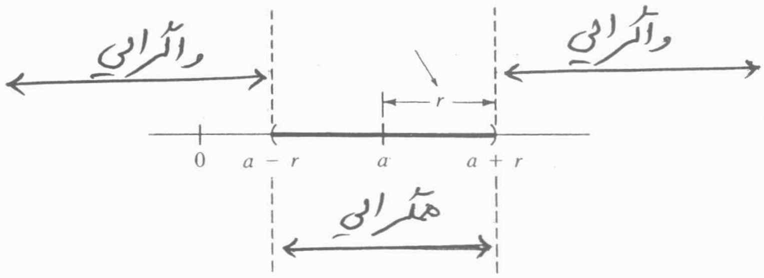
در حالت کلی، یک سری توانی برحسب $x-a$ می‌تواند همگرا

الف) روی یک فاصله متناهی به مرکز a به صورت $(a-r,a+r)$ یا $[a-r,a+r)$ یا $(a-r,a+r]$ یا $[a-r,a+r]$ باشد. یا

ب) روی فاصله نامتناهی $(-\infty,\infty)$ باشد. یا

ج) در نقطه تنهای $x=a$ باشد.

در حالت های بالا، به ترتیب گوییم شعاع همگرایی r، ∞ یا 0 است. در شکل (۵) حالت $(a-r, a+r)$ شرح داده شده است.



شکل ۵

آزمون نسبت بیان شده در قضیه (۴۸) برای یافتن فاصله همگرایی یک سری توانی می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

مثال ۴۹. فاصله همگرایی سری $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k (k+1)^2}$ را به دست آورید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}\cdot\frac{2^n(n+1)^2}{x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\frac{|x|}{2}=\frac{|x|}{2}$$

حال از قسمت (الف) قضیه (۴۸) نتیجه می شود که وقتی مقدار حد کمتر از 1 است همگرایی مطلق داریم. بنابراین سری برای تعدادی از x به طوری که $\frac{|x|}{2}<1$ یا $|x|<2$ است همگرای مطلق است. یعنی سری برای هر x در فاصله $(-2,2)$ همگرای مطلق است. به هر حال اگر $\frac{|x|}{2}=1$ باشد یا وقتی $x=2$ و $x=-2$ است آزمون نسبت اطلاعاتی به دست نمی دهد. در این دو حالت باید همگرایی سری را در نقاط انتهایی بررسی کنیم. برای x در سری قرار می دهیم $x=2$ داریم $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$ که از آزمون مقایسه ای با p-سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ نتیجه می شود که همگرا است. به طور مشابه با جانشینی $x=-2$ به سری متناوب $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ می رسیم که همگرا

است و پس فاصله همگرایی سری فاصله بسته $[-2,2]$ است، آزمون نسبت نتیجه می‌دهد که سری برای $|x|>2$ واگرا است. شعاع همگرایی سری برابر 2 می‌باشد.

مثال ۵۰. فاصله همگرایی سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ را بدست آورید.

حل. طبق قضیه (۴۸)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\,|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

چون $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$ برای هر انتخاب x، پس سری برای هر عدد حقیقی همگرای مطلق است، در نتیجه فاصله همگرایی سری $(-\infty,\infty)$ و شعاع همگرایی ∞ است.

مثال ۵۱. فاصله همگرایی سری توانی $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-5)^k}{k\,3^k}$ را بدست آورید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}\cdot\frac{n\,3^n}{(x-5)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-5|}{3} = \frac{|x-5|}{3}$$

پس سری برای $\frac{|x-5|}{3}<1$ یا $|x-5|<3$ همگرای مطلق است، یعنی فاصله همگرایی مطلق $(2,8)$ است. در $x=2$ و $x=8$ به ترتیب داریم $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ که سری اولی همان سری هارمونیک تناوبی همگرا و سری دوم سری هارمونیک واگرا است پس فاصله همگرایی سری داده شده به صورت $[2,8)$ است. شعاع همگرایی سری برابر 3 است. سری برای $x<2$ یا $x\geqslant 8$ واگرا است.

مثال ۵۲. فاصله همگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}k!\,(x+10)^k$ را بدست آورید.

حل.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x+10)^{n+1}}{n!\,(x+10)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\,|x+10|$$

$$=\begin{cases}\infty, & x\neq -10\\ 0, & x=-10\end{cases}$$

بنابراین سری برای هر عدد حقیقی بجز $x=-10$ واگرا است. در $x=-10$ سری همگرایی حاصل می‌شود که تمام جملاتش صفر است. شعاع همگرایی سری ۰ است.

۷.۹ مشتق و انتگرال سری‌های توانی

برای هر x در فاصله همگرایی، سری توانی $\sum c_k x^k$ همگرا به یک عدد است. بنابراین سری توانی تعریف کننده یا نمایش دهنده تابع f است که دامنه تعریف آن فاصله همگرایی سری است. برای هر x در فاصله همگرایی، مقدار تابعی $f(x)$ را توسط جمع سری نمایش می‌دهیم

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \qquad (۱۶)$$

سه قضیه بعد پاسخ به سؤالات اساسی در مورد تابع نمایش داده شده توسط یک سری توانی است.

قضیه ۵۲. اگر $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ روی فاصله $(-r,r)$ همگرا باشد که در آن شعاع همگرایی مثبت یا ∞ است آنگاه f در x از $(-r,r)$ پیوسته است.

قضیه ۵۳. اگر $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ روی فاصله $(-r,r)$ همگرا باشد که در آن شعاع همگرایی مثبت یا ∞ است، آنگاه f در هر x از $(-r,r)$ مشتق پذیر است و

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad (17)$$

نتیجه در (۱۷) به سادگی بیان می‌کند که از یک سری توانی می‌توان جمله به جمله مشتق گیری کرد، دقیقاً مشابه یک چند جمله‌ای، یعنی

$$f'(x)=\frac{d}{dx}c_0+\frac{d}{dx}c_1x+\frac{d}{dx}c_2x^2+\cdots+\frac{d}{dx}c_nx^n+\cdots$$
$$=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}$$

شعاع همگرایی سری در (۱۷) همان شعاع همگرایی $\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ است. بنابراین با استفاده از قضیه (۵۴) برای f' تعریف شده توسط (۱۷) می‌توان گفت که f' در هر x از $(-r,r)$ مشتق پذیر است. یعنی

$$f''(x)=2c_2+3\times2c_3x+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}$$

با ادامه این روند، نتیجه می‌شود که

تابع f نمایش داده شده توسط یک سری توانی روی $(-r,r)$ برای $r>0$، دارای مشتق از هر مرتبه‌ای روی فاصله فوق است.

همانند (۱۷)، فرآیند انتگرال گیری از یک سری توانی را می‌توان جمله به جمله در نظر گرفت

$$\int f(x)dx=\int c_0dx+\int c_1xdx+\int c_2x^2dx+\cdots+\int c_nx^ndx+\cdots$$
$$=\left(c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots\right)+C$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1}+C$$

این مطلب در قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه ۵۴. اگر $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ روی فاصله $(-r,r)$ همگرا باشد که در آن شعاع همگرایی یا مثبت یا ∞ است آنگاه

$$\int f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1}+C \qquad (18)$$

شعاع همگرایی سری (۱۸) مجدداً همان شعاع همگرایی $\sum c_k x^k$ است.

برای انتگرال های معین، (۱۸) نتیجه می دهد که برای هر عدد a و b در $(-r,r)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\int_a^b x^k\,dx\right) = \sum c_k \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

مثال ۵۳. سری توانی نمایش دهنده تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ را بدست آورید.

حل. یادآوری می کنیم که یک سری هندسی همگرا به $\frac{a}{1-r}$ است هرگاه $|r|<1$.

پس با فرض $a=1$ و $r=-x$ برای هر x در $(-1,1)$ داریم

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \qquad (19)$$

مثال ۵۴. با مشتق گیری جمله به جمله از (۱۹) سری نمایش دهنده $\frac{1}{(1+x)^2}$ روی $(-1,1)$ به صورت زیر است

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots$$

یا

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1}$$

مثال ۵۵. یک سری توانی برای نمایش $\ln(1+x)$ روی $(-1,1)$ را بیابید.

حل. با جایگزینی $x=t$ در (۱۹) داریم

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$$

بنابراین برای هر x در $(-1,1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \cdots$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

اما $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x)$ پس

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad (۲۰)$$

مثال ۵۶. $\ln(1.2)$ را با چهار رقم اعشار تقریب بزنید.

حل. با جایگزینی $x = 0.2$ در (۲۰) داریم

$$\ln(1.2) = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.20)^3}{3} - \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{5} - \frac{(0.2)^6}{6} + \cdots \qquad (۲۱)$$
$$= 0.2 - 0.02 + 0.00267 - 0.0004 + 0.000064 - 0.00001067 + \cdots$$
$$\simeq 0.1823 \qquad (۲۲)$$

اگر جمع سری در (۲۱) را با S نمایش دهیم، آنگاه از قضیه (۴۳) داریم

$$|S_n - S| \le a_{n+1}$$

عدد داده شده در (۲۲) تا چهار رقم اعشار دقت دارد، زیرا برای جمع جزئی پنجم

$$|S_5 - S| \le 0.00001067 < 0.0000$$

تبصره ۵۵. باید توجه کرد که اگر فاصله همگرایی یک سری توانی نمایش دهنده تابع f فاصله باز $(-r, r)$ باشد، آنگاه سری توانی نمایش دهنده $\int_0^x f(t)\,dt$ می‌تواند در یکی یا هر دو نقطه انتهایی فاصله نیز همگرا باشد. به سادگی می‌توان دید که سری در (۲۰) برای $x=-1$ واگرا و در $x = 1$ همگرا است. می‌توان دید که مجموع سری هارمونیک متناوب توسط

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

داده می‌شود.

۹.۸ سری تیلور و مکلورن

برای یک سری توانی نمایش دهنده تابع f روی فاصله $(a-r, a+r)$ با $r>0$ به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \qquad (۲۳)$$

رابطه ای بین ضرایب c_k و مشتقات f وجود دارد، از قضیه (۵۳) داریم

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \qquad (۲۴)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3.2c_3(x-a) + \cdots \qquad (۲۵)$$

$$f'''(x) = 3.2.1\, c_3 + \cdots \qquad (۲۶)$$

و به همین ترتیب. با محاسبه (۲۳)، (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) در $x=a$ نتیجه می شود که

$$f(a) = c_0 ,\quad f'(a) = 1!\, c_1 ,\quad f''(a) = 2!\, c_2 ,\quad f'''(a) = 3!\, c_3$$

در حالت کلی $f^{(n)}(a) = n!\, c_n$ یا

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad n \geq 0 \qquad (۲۷)$$

وقتی $n=0$، مشتق مرتبه صفرام تابع در a را $f(a)$ می گیریم و $0!=1$. با جایگزینی (۲۷) در (۲۳) نتیجه می شود

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (۲۸)$$

و این سری برای هر x در $(a-r, a+r)$ برای $r>0$ معتبر است. این سری را سری تیلور f در a نامیم.

حالت خاص از سری تیلور وقتی است که $a=0$ باشد. در این صورت

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (۲۹)$$

سری در (۲۹) را سری مکلورن f نامیم.

از طرف دیگر، اگر تابع مشتق پذیر f موجود باشد، طبیعی است که سؤال شود

آیا می‌توان f را به سری تیلور (۲۸) بسط داد؟

رسماً پاسخ مثبت است. با محاسبهٔ سادهٔ ضرایب مشخص شده در (۲۷) می‌توان بسط به سری تیلور f را داشت؟

مثال ۵۷. سری تیلور $f(x)=\ln x$ در $a=1$ را به دست آورید.

حل. داریم

$$f(x)=\ln x, \qquad f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad f'(1)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{1\times 2}{x^3} \qquad f'''(1)=2!$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \qquad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

بنابراین (۲۷) و (۲۸) نتیجه می‌دهد

$$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \qquad (۳۰)$$

با توجه به آزمون نسبت، دیده می‌شود که برای هر مقدار x در فاصله $(0,2]$ سری همگرا است.

قضیه ۵۶. قضیهٔ تیلور. فرض کنید f تابعی است که $f^{(n+1)}(x)$ برای هر x در فاصله $(a-r,a+r)$ موجود است، آنگاه برای هر x در این فاصله

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

که در آن

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (۳۱)$$

چندجمله‌ای تیلور f در a از درجه n نامیده می‌شود و

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (۳۲)$$

فرم لاگرانژ باقیمانده نامیده می‌شود، عدد c بین a و x است.

اهمیت قضیه (۵۶) در این است که $P_n(x)$ جمع‌های جزئی سری تیلور است و

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

بنابراین از

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

دیده می‌شود که اگر $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ آن گاه دنباله جمع‌های جزئی همگرا به $f(x)$ است. این نتیجه را به صورت زیر خلاصه کرده‌ایم.

قضیه ۵۷. اگر f دارای مشتقات از همه مرتبه‌ای در هر x از فاصله $(a-r, a+r)$ بوده و اگر برای هر x در این فاصله $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ آن گاه

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

اثبات اینکه باقیمانده یعنی R_n به صفر میل می‌کند (وقتی $n\to\infty$) اغلب وابسته به این واقعیت است که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \qquad (۳۳)$$

مثال ۵۸. $f(x) = \cos x$ را توسط سری مکلورن نمایش دهید.

حل. داریم

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$$

و به همین ترتیب، از (۲۹) داریم

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (۳۴)$$

آزمون نسبت نشان می‌دهد که رابطهٔ (۳۴) برای هر مقدار حقیقی x همگرای مطلق است. برای اثبات اینکه $\cos x$ لزوماً توسط سری (۳۴) نمایش داده می‌شود، باید نشان دهیم

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

برای این منظور، توجه داریم که مشتقات f در شرط

$$|f^{(n+1)}(x)|=\begin{cases}|\sin x| & n \text{ زوج}\\ |\cos x| & n \text{ فرد}\end{cases}$$

صدق می‌کنند.

در هر صورت برای هر عدد c، $|f^{(n+1)}(c)|\le 1$ و بنابراین

$$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

برای هر x انتخاب شده دلخواه و ثابت، طبق (۳۳) داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

اما $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

بنابراین

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

نمایش معتبری برای تابع $\cos x$ به ازای هر x حقیقی است.

مثال ۵۹. $f(x)=\sin x$ را به صورت یک سری تیلور در $a=\frac{\pi}{3}$ بسط دهید.

حل. داریم

$$f(x)=\sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt3}{2}$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt3}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

و به همین ترتیب، بنابراین سری تیلور در $\frac{\pi}{3}$ متناظر به $\sin x$ عبارت است از

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\times 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\times 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots \qquad (۳۵)$$

از آزمون نسبت نتیجه می‌شود که (۳۵) برای هر مقدار حقیقی x همگرای مطلق است.

برای نشان دادن اینکه به ازای هر x حقیقی

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\times 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\times 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\times 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

توجه داریم که

$$|f^{(n+1)}(c)| \le 1$$

در نتیجه $|R_n(x)| \le \left|x-\frac{\pi}{3}\right|^{n+1} / (n+1)!$ و

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

مثال ۴۰. ثابت کنید سری در (۳۰) نمایش $f(x) = \ln x$ روی فاصله $(0, 2]$ است.

حل. برای $f(x) = \ln x$، nامین مشتق توسط

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

به دست می‌آید. بنابراین

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$$

و

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{c}\right|^{n+1}$$

که در آن c عددی در فاصله $(0, 2]$ بین 1 و x است.

اگر $2 \ge x \ge 1$ آنگاه $1 \ge x-1 \ge 0$، چون $x > c > 1$ باید داشته باشیم

$1 < c$، $1 \ge x-1 > 0$ و در نتیجه $1 > \frac{x-1}{c}$، بنابراین

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

در حالتی که $1 > x > 0$، می‌توان نشان داد که $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$، بنابراین

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots$$

که برای هر مقدار x در فاصله $[0,2)$ برقرار است.

در زیر برخی از سری های مکلورن مهم را بطور خلاصه آورده ایم

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad -\infty<x<\infty \quad (۳۶)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad -\infty<x<\infty \quad (۳۷)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad -\infty<x<\infty \quad (۳۸)$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad -\infty<x<\infty \quad (۳۹)$$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad -\infty<x<\infty \quad (۴۰)$$

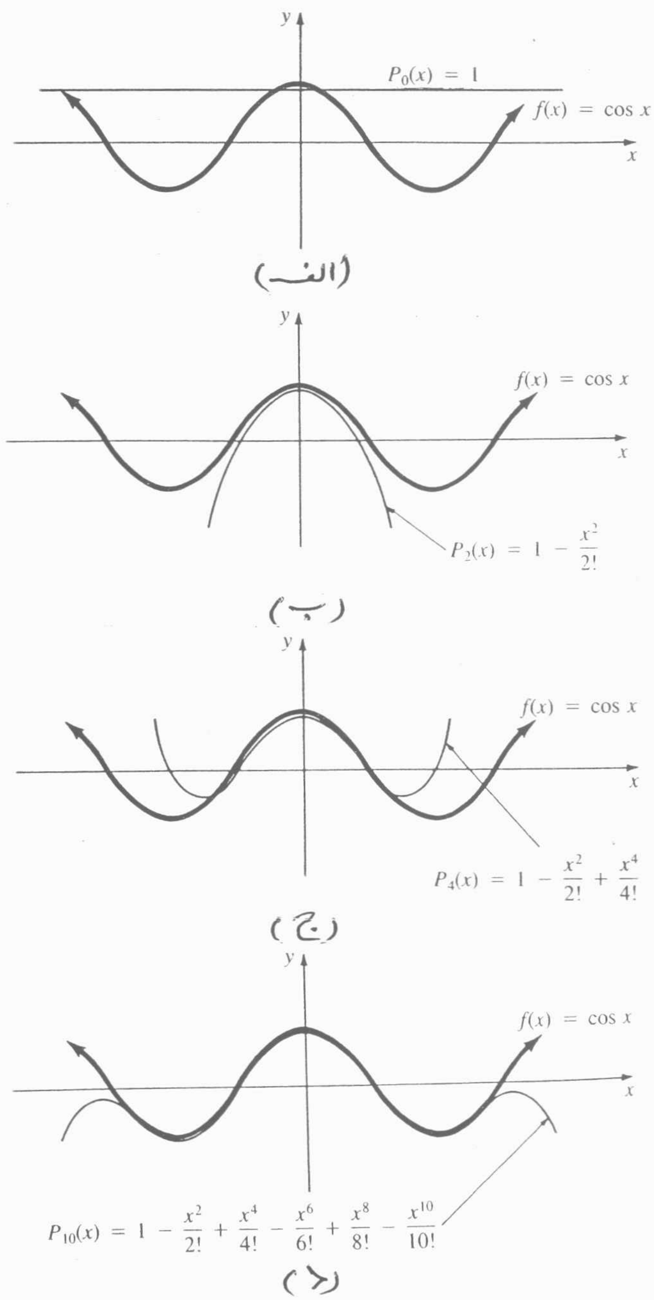
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)}x^{k+1} \qquad -1<x\leq 1 \quad (۴۱)$$

برخی از نمودار های چند جمله ای های تیلور ۵۸. در مثال (۵۸) دیدیم که سری تیلور تابع $f(x)=\cos x$ در $a=0$ نشان دهندهٔ تابع برای هر $x\in\mathbb{R}$ است، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

بررسی نموداری رفتار سری تیلور و جمع های جزئی آن، همواره برای ما جالب است و می خواهیم تکرایی سری تیلور را به تابع داده شده ببینیم. در شکل (۹) نمودار های چند جمله ای های تیلور $P_0(x)$، $P_2(x)$، $P_4(x)$ و $P_{10}(x)$ در $a=0$ با نمودار $f(x)=\cos x$ مقایسه شده اند. یک مقایسه عددی در جدول زیر آورده شده است.

x	$P_2(x)$	$P_4(x)$	$P_{10}(x)$	$\cos x$
$\pi/6$	0.86292	0.86605	0.86603	0.86603
$\pi/4$	0.69157	0.70743	0.70711	0.70711
$\pi/3$	0.45169	0.50180	0.50000	0.5
$\pi/2$	−0.23370	0.01997	0.00000	0



شکل ۶

تقریب‌هایی با چندجمله‌ای‌های تیلور ۵۹. وقتی مقدار x به عدد a نزدیک می‌شود $(x \simeq a)$، چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$ برای تابع f در a را می‌توان برای تقریب مقدار تابع $f(x)$ به کار برد. خطای این تقریب توسط

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)|$$

به دست می‌آید.

مثال ۴۱. مقدار $e^{-0.2}$ را توسط $P_3(x)$ تقریب بزنید. دقت این تقریب را به دست آورید.

حل. چون مقدار $x=-0.2$ نزدیک صفر است، از چندجمله‌ای تیلور $P_3(x)$ برای تابع $f(x)=e^x$ در $a=0$ استفاده می‌کنیم. از $f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=e^x$ و (۳۱) داریم

$$P_3(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$
$$= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

و

$$P_3(-0.2) = 1+(-0.2)+\frac{1}{2}(-0.2)^2+\frac{1}{6}(-0.2)^3 \simeq 0.81867$$

بنابراین

$$e^{-0.2} \simeq 0.81 \qquad (۴۲)$$

حال از (۳۰) داریم

$$|R_3(x)| = \frac{e^c}{4!}|x|^4 < \frac{|x|^4}{4!}$$

چون $-0.2 < c < 0$ و $e^c < 1$ بنابراین

$$|R_3(-0.2)| < \frac{|(-0.2)^4|}{24} < 0.0001$$

نتیجه می‌دهد که نتیجه در (۴۲) با سه رقم اعشار دقیق است.

تبصره ۴۰. الف) قضیهٔ تیلور را قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته‌تر می‌نامند. حالت $n=0$ به قضیهٔ مقدار میانگین معمولی تبدیل می‌شود.

ب) روش تیلور مبتنی بر یافتن یک سری توانی برای تابع است و اثبات اینکه سری نمایش دهندهٔ تابع می‌باشد، معمولاً نیاز به تلاش زیاد دارد. با به دست آوردن عبارتی کلی برای مشتق nام توابع این مهم معمولاً به نتیجه می‌رسد، اما در حالت کلی چنین نیست، با یافتن چند ضریب اول برای c_n سری تیلور نمایش داده می‌شود.

ج) چشم پوشی از اهمیت نتایج روابط (۲۸) و (۲۹) ساده است. فرض کنید بخواهیم

سری مکلورن تابع $f(x)=\frac{1}{2-x}$ را پیدا کنیم. می‌توان از رابطه (۲۹) استفاده کرد. از طرف دیگر باید تشخیص داد که سری‌های توانی f می‌توانند با استفاده از سری هندسی به دست آیند. نکته مهم آن است که نمایش منحصر به فرد است. بنابراین درباره همگرایی سری‌های توانی که نمایش دهنده تابع هستند، صرف‌نظر از روش به دست آوردن آنها، سری‌های تیلور یا مکلورن می‌باشند.

۹.۹ سری دوجمله‌ای

قضیه دوجمله‌ای ۶۱. از ریاضیات مقدماتی می‌دانیم که

$$(1+x)^2=1+2x+x^2$$

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

و در حالت کلی، اگر m عدد صحیح نامنفی باشد آنگاه

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots+x^m \quad (۴۳)$$

بسط $(1+x)^m$ در (۴۳) را قضیه دوجمله‌ای نامند.

تعریف ۶۲. برای هر عدد حقیقی r، سری

$$1+rx+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad (۴۴)$$

را سری دوجمله‌ای نامند.

توجه کنید که (۴۴) تنها در حالتی که r یک عدد صحیح نامنفی باشد قطع می‌شود. در این حالت (۴۴) به (۴۳) تبدیل می‌شود.

آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری دوجمله‌ای برای $|x|<1$ همگرا و برای $|x|>1$ واگرا است. بنابراین بر فاصله $(-1,1)$ سری دوجمله‌ای تعریف کننده یک تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر f است. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که تابع نمایش دهنده سری در (۴۴)، $f(x)=(1+x)^r$ است.

قضیه ۶۳. اگر $|x|<1$ آنگاه برای هر عدد حقیقی r

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (۴۵)$$

مثال ۶۴. سری توانی نمایش دهندهٔ $\sqrt{1+x}$ را بدست آورید.

حل. با $r=\frac{1}{2}$ از (۴۵) برای $|x|<1$ داریم

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2\,2!}x^2 + \frac{1\times 3}{2^3\,3!}x^3 + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2^n\,n!}x^n + \cdots$$