۴ سری

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

فصل پنجم . انتگرال چندگانه

انتگرال دوگانه و انتگرال مکرر

انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ که در ریاضی عمومی ۱ تعریف می‌شود، نشان دهنده یک جمع از مقادیر تابع f در نقاطی (تعداد نامتناهی) از فاصله $[a,b]$ است. برای جمع مقادیر تابع $f(x,y)$ روی نقاطی از ناحیه D در صفحه، انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ را تعریف می‌کنیم. توسیع انتگرال‌های دوگانه یک تابع از دو متغیر شبیه به تعریف انتگرال‌های معمولی است. ابتدا یک تعریف رسمی ارائه می‌دهیم، اما محاسبه انتگرال‌های دوگانه با تبدیل به انتگرال‌های مقدماتی مکرر انجام می‌پذیرد.

مجموعه‌هایی که نقش فواصل در انتگرال‌گیری دوگانه را به عهده دارند، مستطیل‌ها هستند.

تعریف ۱ . یک مستطیل بسته D در صفحه شامل تمام x و y هایی است که $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$ و آن را با $[a,b]\times[c,d]$ نمایش می‌دهیم.

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}=[a,b]\times[c,d]$$

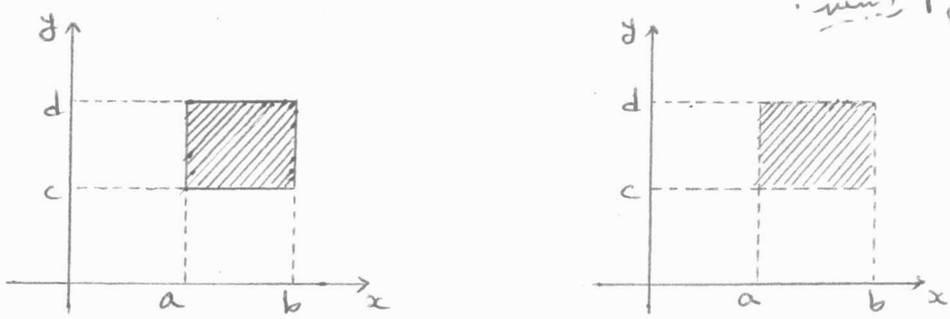
درون D شامل x و y هایی است که $a<x<b$ و $c<y<d$ و آن را یک مستطیل باز نامیده و با $(a,b)\times(c,d)$ نمایش می‌دهیم.

$$\operatorname{int}(D)=\{(x,y)\mid a<x<b,\ c<y<d\}=(a,b)\times(c,d)$$

مساحت مستطیل D برابر $(b-a)(d-c)$ است، پس

$$\operatorname{area}(D)=(b-a)(d-c)=\operatorname{area}(\operatorname{int}D)$$

شکل ۱ را ببینید.



الف) مستطیل بسته $a\le x\le b,\ c\le y\le d$ ب) مستطیل باز $a<x<b,\ c<y<d$

شکل ۲

ربع ۲

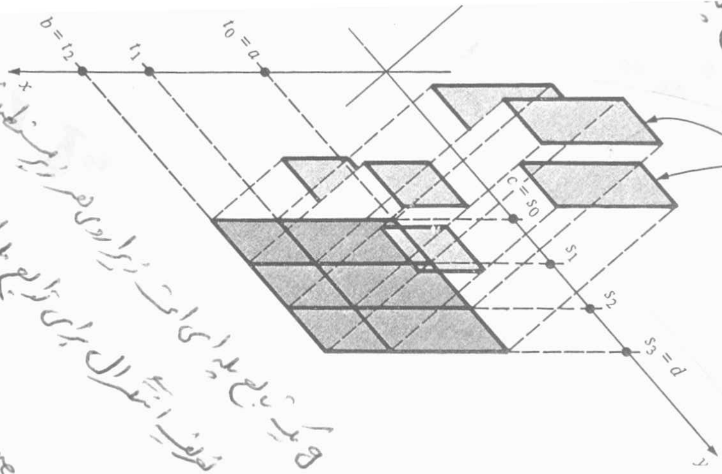
قرارهای $< t_n = b$

زحجورا رات شده باشند به

دارای مقدار ثابت k_{ij} باشد

در شکل ۲ نمودار یک تابع پله‌ای

نمودار g



۲. g یک تابع پله‌ای است. زیرا روی هر زیر مستطیل ثابت است

تعریف انتگرال برای تابع پله‌ای یک متغیره، برای تابع

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1,\,j=1}^{n,\,m} (k_{ij})(\text{area } R_{ij})$$

. نماد مجموع برابر این مفهوم است که روی تمام اندازه‌ها

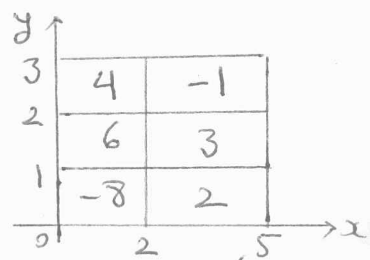
تعداد nm جمله در مجموع متناظر با nm مستطیل

نمودار g است. در واقع ارتفاع

$\text{area } R_{ij} = k_{ij}(\Delta t_i)(\Delta$

مثال ۱. فرض کنید g مقادیری که در شکل ۴ نمایش داده شده، را بپذیرد. انتگرال g روی مستطیل $D=[0,5]\times[0,3]$ را به دست آورید.

حل. انتگرال g برابر با مجموع، حاصل ضرب مقادیر g در مساحتهای مستطیل‌ها است.



شکل ۴

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy = -8\times2+2\times3+6\times2+3\times3+4\times2-1\times3 = 16$$

حال روشی برای تعریف انتگرال یک تابع روی یک مستطیل بسته، مشابه با حالت تک متغیره ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴. فرض کنید تابع $f(x,y)$ روی مستطیل بسته D تعریف شده است و g تابعی پله‌ای تعریف شده روی D است به طوری که برای هر $(x,y)\in D$، $g(x,y)\leq f(x,y)$. در این صورت $\iint_D g$ را یک جمع پایینی برای f روی D نامیم. اگر h تابعی پله‌ای تعریف شده روی مستطیل بسته D باشد به طوری که برای هر $(x,y)\in D$ داشته باشیم $f(x,y)\leq h(x,y)$ در این صورت $\iint_D h$ را یک جمع بالایی برای f روی D نامیم.

اگر توابع g و h توابعی پله‌ای روی D باشند و برای هر $(x,y)\in D$

$$g(x,y)\leq f(x,y)\leq h(x,y)$$

در این صورت جمع پایینی، $\iint_D g$، کوچکتر یا مساوی جمع بالایی، $\iint_D h$، است. بنابراین اگر قرار دهیم

$$L=\{S\in\mathbb{R} \mid \text{یک جمع پایینی برای تابع } f \text{ روی } D \text{ باشد } S\}$$
$$=\{S\in\mathbb{R} \mid S=\iint_D g \text{ ، تابع پله‌ای } g \text{ روی } D \text{ وجود دارد به طوری که } g\leq f \text{ روی } D\}$$

$$\mathcal{U} = \{ S \in \mathbb{R} \mid \text{S یک جمع بالایی برای تابع f روی D باشد} \}$$

$$= \{ S \in \mathbb{R} \mid S = \iint_D h \text{ و } f \le h \text{ روی D به طوری که تابع پله‌ای h روی D وجود دارد} \}$$

در این صورت هر عضو مجموعه $\mathcal{U}$ یک کران بالایی مجموعه $\mathcal{L}$ است و هر عضو مجموعه $\mathcal{L}$ یک کران پایین مجموعه $\mathcal{U}$ است. حال طبق اصل موضوع تمامیت (کامل بودن $\mathbb{R}$) که $\mathcal{L}$ دارای کوچکترین کران بالایی و $\mathcal{U}$ دارای بزرگترین کران پایینی است یعنی $\sup_{S\in\mathcal{L}} S$ و $\inf_{S\in\mathcal{U}} S$ وجود دارند.

تعریف ۵. برای تابع دو متغیره f تعریف شده بر مستطیل بسته D، عدد $\sup_{S\in\mathcal{L}} S$ را انتگرال پایینی f روی D نامیم و عدد $\inf_{S\in\mathcal{U}} S$ را انتگرال بالایی f روی D نامیم و به ترتیب با $\underline{\iint_D} f(x,y)dxdy$ و $\overline{\iint_D} f(x,y)dxdy$ نمایش می‌دهیم.

باید دقت کرد که در تمام کتب حاضر، فرض کرانداری تابع f بر مستطیل بسته D برقرار است، حتی اگر به طور صریح ذکر نشده باشد.

تعریف ۶. فرض کنید f تابعی دو متغیره و کراندار بر مستطیل بسته D است. گوییم تابع f بر D انتگرال‌پذیر است هرگاه $\overline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy$. به عبارت دیگر گوییم f روی D انتگرال‌پذیر است، هرگاه عدد S_0 وجود داشته باشد به طوری که هر عدد S با $S_0 > S$ یک جمع پایینی برای f روی D بوده و هر $S > S_0$ یک جمع بالایی باشد. عدد S_0 انتگرال تابع f روی D نامیده و با $S_0 = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲. فرض کنید D مستطیل $0 \le x \le 2$، $1 \le y \le 3$ است و $f(x,y) = x^2 y$. با انتخاب یک تابع پله‌ای h با شرط $h(x,y) \geq f(x,y)$ نشان دهید $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le 25$.

حل: تابع ثابت $h(x,y) = 12 \geq f(x,y)$ روی مستطیل D دارای انتگرال $12 \times 4 = 48$ است. پس $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le 48$. برای یافتن تقریب بهتر، D را به چهار زیرمستطیل زیر تقسیم می‌کنیم

$D_1 = [0,1] \times [1,2]$ $\qquad$ $D_2 = [0,1] \times [2,3]$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

$$D_3=[1,2]\times[1,2],\qquad D_4=[1,2]\times[2,3]$$

فرض کنید h تابع پله‌ای تعریف شده توسط ماکزیمم مقدار f روی هر کدام از زیرمستطیل‌ها باشد یعنی

$$h(x,y)=2 \qquad (x,y)\in D_1$$
$$h(x,y)=3 \qquad (x,y)\in D_2$$
$$h(x,y)=8 \qquad (x,y)\in D_3$$
$$h(x,y)=12 \qquad (x,y)\in D_4$$

در این صورت

$$\iint_D h(x,y)\,dx\,dy = 2\times 1+3\times 1+8\times 1+12\times 1=25$$

چون $h\geq f$ داریم

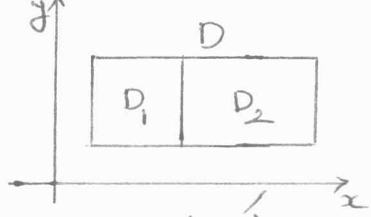
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq 25$$

خواص اساسی انتگرال دوگانه مشابه با انتگرال توابع یک متغیره است.

قضیه ۷. الف) هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر است.

ب) اگر مستطیل D با اضافه کردن یک پاره خط به دو مستطیل D_1 و D_2 تقسیم شود و اگر تابع $f(x,y)$ روی D_1 و D_2 انتگرال‌پذیر باشد آنگاه f روی D انتگرال‌پذیر است و (شکل ۴)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy+\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$



شکل ۴

ج) اگر f_1 و f_2 توابعی انتگرال‌پذیر روی D باشند و روی D، $f_1\leq f_2$ آنگاه

$$\iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy$$

د) اگر روی D داشته باشیم $f(x,y)=K$، آنگاه

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = k\cdot(\text{area } D)$$

ه) $$\iint_D [f_1(x,y)+f_2(x,y)]\,dx\,dy = \iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy + \iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy$$

و) $$\iint_D cf(x,y)\,dx\,dy = c\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

به دلیل تشابه با حالت تک متغیره، اثبات این خواص به عهده دانشجویان است.

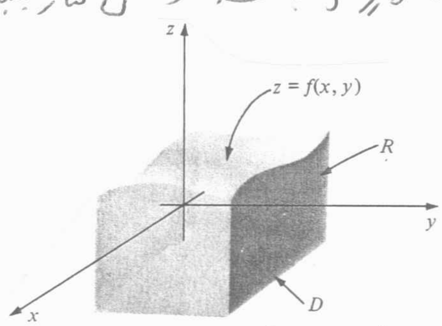
نکته. با انتخاب $k=1$ در (د) داریم

$$\iint_D dx\,dy = D \text{ مساحت}$$

واضح است که اگر g تابعی پله‌ای روی مستطیل D باشد و برای هر $(x,y)\in D$ داشته باشیم

$$g(x,y)\geq 0$$

آنگاه انتگرال g روی D برابر با حجم محصور به نمودار g روی D است. حال اگر $f(x,y)\geq 0$ تابع انتگرال‌پذیر دلخواهی باشد، آنگاه حجم محصور به نمودار تابع f بین حجم‌های محصور به نمودارهای پله‌ای $g\leq f$ و $h\geq f$ قرار دارد، یعنی بین مجموع‌های پایینی و بالایی قرار دارد. چون انتگرال دقیقاً این خاصیت را دارد، مانند توابع تک متغیره نتیجه می‌گیریم که انتگرال f روی D برابر با حجم محصور به نمودار f است، هرگاه $f\geq 0$ باشد. (شکل ۵ را ببینید)



شکل ۵. حجم R ناحیه محصور به نمودار f برابر با $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ است

تا این مرحله، فقط می‌توانستیم انتگرال‌ها را به طور تقریبی یا با بکارگیری فرمول‌های هندسی برای حجم اجسام خاص محاسبه کنیم. در این بخش، نشان خواهیم داد که چگونه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان بکار برد.

انتگرال دوگانه دارای تعبیرهای دیگری به غیر از حجم ناحیه محصور به نمودار تابع زیر نشانه انتگرال است.

به عنوان مثال، فرض کنید یک ورقه مستطیلی D دارای چگالی جرم $\rho(x,y)$ گرم بر سانتیمتر مربع است. نشان می‌دهیم $\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$ برابر جرم ورقه است. اگر ρ ثابت باشد، این ادعا صحیح است زیرا مساحت $\times$ چگالی $=$ جرم. حال اگر ρ یک تابع پله‌ای باشد آنگاه انتگرال ρ روی D جرم ورقه با چگالی ρ است زیرا جرم کل برابر با مجموع جرمهای قسمتهای آن است.
حال فرض کنید ρ دلخواه است. اگر ρ_1 تابع پله‌ای با $\rho_1 \le \rho$ باشد آنگاه

$$\iint_D \rho_1(x,y)\,dx\,dy \le m$$

که در آن m جرم ورقه با چگالی ρ است، زیرا چگالی کمتر جرم کمتر را به دست می‌دهد. به طور مشابه، اگر ρ_2 تابع پله‌ای با $\rho \le \rho_2$ باشد آنگاه $m \le \iint_D \rho_2(x,y)\,dx\,dy$ است. بنابراین جرم m ورقه بین هر زوج از مجموع‌های بالایی و پایینی برای ρ قرار دارد، در نتیجه باید مساوی با انتگرال $\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$ باشد.

قبل از ارائه نتیجه اساسی که ما را قادر خواهد ساخت که از تکنیک‌های انتگرال‌گیری توابع یک متغیره برای محاسبه انتگرال‌های دوگانه استفاده کنیم، برخی از نمادگذاری‌های مورد استفاده را شرح می‌دهیم. انتگرال مکرر

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

مشابه اکثر عبارات ریاضی که با پرانتز بیان می‌شوند، از داخل محاسبه می‌گردد. بدین معنی که نخست y را ثابت فرض کرده و انتگرال $\int_a^b f(x,y)\,dx$ را نسبت به x مانند تابع یک متغیره محاسبه می‌کنیم، حاصل تابعی از y است که از آن روی $[c,d]$ نسبت به y انتگرال می‌گیریم و نهایتاً حاصل آن معین می‌شود. عبارت

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

به طور مشابه تعریف می‌گردد. در این حالت، ابتدا انتگرال نسبت به y با فرض ثابت بودن x گرفته می‌شود و سپس از حاصل نسبت به x انتگرال معین می‌گیریم.
انتگرال‌های مکرر اغلب بدون پرانتز نوشته می‌شوند، مانند

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{یا} \quad \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه $\int_0^2\int_1^3 x^2y\,dy\,dx$.

حل.

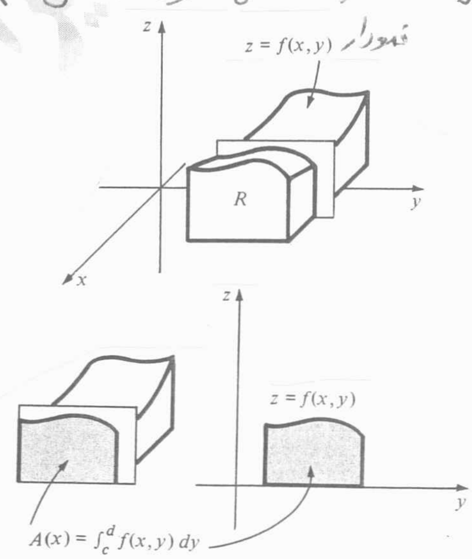
$$\int_0^2\int_1^3 x^2y\,dy\,dx = \int_0^2\left(\int_1^3 x^2y\,dy\right)dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{x^2y^2}{2}\Big|_{y=1}^{3}\right)dx$$
$$= \int_0^2 x^2\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)dx = 4\int_0^2 x^2\,dx = 4\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

توجه کنید که مرحله دوم در این محاسبات، لزوماً عکس یک مشتق‌گیری جزئی است.

در زیر ادعا و ثابت می‌کنیم که انتگرال دوگانه برابر با انتگرال مکرر است. یعنی بر $D=[a,b]\times[c,d]$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx.$$

برای اثبات، فرض کنید $f(x,y)\geq 0$. در نتیجه $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ نشان دهنده حجم ناحیه R محصور به نمودار تابع f بالای مستطیل D است. اگر این حجم را در نظر گرفته و آن را با صفحه‌ای موازی صفحه yz در فاصله x از مبداء برش دهیم حاصل یک ناحیه دوبعدی است که مساحت آن با $A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ داده می‌شود. (شکل ۶).



شکل ۶. مساحت سطح مقطع برابر مساحت محصور به $z=f(x,y)$ از $y=c$ تا $y=d$ برای x ثابت

حال طبق اصل کاوالیری، حجم کل برابر با انتگرال تابع مساحت $A(x)$ است. بنابراین

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \text{حجم } R = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

به طور مشابه، اگر از صفحات موازی با صفحه xz استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy$$

که همان ادعای مطرح شده است. دیدیم که اصل کاوالیری، اثباتی هندسی برای تحویل انتگرال دوگانه به انتگرال مکرر را ارائه می‌کند. در واقع، اثبات نتیجه زیر توجیه مناسبتری از اصل کاوالیری را بیان می‌کند.

قضیه ۸. فرض کنید $f(x,y)$ تابعی انتگرال‌پذیر روی مستطیل $D=[a,b]\times[c,d]$ است. آنگاه هر انتگرال مکرر تابع f در صورت وجود برابر با انتگرال دوگانه است. یعنی

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx.$$

اثبات. ابتدا قضیه را برای تابع پله‌ای ثابت می‌کنیم. فرض کنید g تابعی پله‌ای با $g(x,y)=k_{ij}$ روی $R_{ij}=(t_{i-1},t_i)\times(s_{j-1},s_j)$ است. بنابراین

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m k_{ij}\,(\Delta t_i)(\Delta s_j)$$

اگر جمعوندهای $k_{ij}(\Delta t_i)(\Delta s_j)$ را در یک آرایه مستطیلی قرار دهیم، می‌توان آنها را با جمع سطری و سپس جمع مقادیر زیرجمع‌ها، جمع کرد، مثل آنچه که در زیر آمده است.

$$\begin{array}{cccccl}
k_{11}\Delta t_1\Delta s_1 & k_{21}\Delta t_2\Delta s_1 & \cdots & k_{n1}\Delta t_n\Delta s_1 & \longrightarrow & \Big(\sum_{i=1}^n k_{i1}\Delta t_i\Big)\Delta s_1\\
k_{12}\Delta t_1\Delta s_2 & k_{22}\Delta t_2\Delta s_2 & \cdots & k_{n2}\Delta t_n\Delta s_2 & \longrightarrow & \Big(\sum_{i=1}^n k_{i2}\Delta t_i\Big)\Delta s_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \quad\vdots\\
k_{1m}\Delta t_1\Delta s_m & k_{2m}\Delta t_2\Delta s_m & \cdots & k_{nm}\Delta t_n\Delta s_m & \longrightarrow & \Big(\sum_{i=1}^n k_{im}\Delta t_i\Big)\Delta s_m\\
\hline
 & & & & & \sum_{j=1}^m\Big(\sum_{i=1}^n k_{ij}\Delta t_i\Big)\Delta s_j
\end{array}$$

ضریب Δs_j در جمع روی سطر jام برابر $\sum_{i=1}^n k_{ij}\Delta t_i$ است و برابر با $\int_a^b g(x,y)\,dx$ برای هر y با فرض $s_{j-1}<y<s_j$ است، چون برای y ثابت، $g(x,y)$ یک تابع پله‌ای از x است. بنابراین انتگرال $\int_a^b g(x,y)\,dx$ یک تابع پله‌ای از y است و انتگرال آن نسبت به y برابر با مجموع زیر است

$$\int_c^d\Big[\int_a^b g(x,y)\,dx\Big]dy=\sum_{j=1}^m\Big(\sum_{i=1}^n k_{ij}\Delta t_i\Big)\Delta s_j=\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

به طور مشابه، با جمع شدن روی ستونها و سپس جمع سطرها، نتیجه می‌گیریم که

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\Big[\int_c^d g(x,y)\,dy\Big]\,dx,$$

بنابراین قضیه برای توابع پله‌ای درست است. حال فرض کنید تابع f بر $D=[a,b]\times[c,d]$ انتگرال‌پذیر است و فرض کنید انتگرال مکرر $\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx$ موجود است. این انتگرال را با I نشان می‌دهیم. باید ثابت کنیم هر مجموع پایینی برای f روی D کوچکتر یا مساوی I است، درحالی که هر مجموع بالایی بزرگتر یا مساوی با I می‌باشد. بنابراین I باید انتگرال دوگانه f روی D باشد. برای این منظور، فرض کنید g تابع پله‌ای دلخواهی است که

$$g(x,y)\le f(x,y) \qquad (1)$$

با انتگرال‌گیری از (۱) نسبت به y و استفاده از قسمت (ه) قضیه ۷، برای هر x در $[a,b]$ داریم

$$\int_c^d g(x,y)\,dy\le\int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (2)$$

و با انتگرال‌گیری از (۲) نسبت به x و استفاده از خاصیت (ه) قضیه ۷ داریم

$$\int_a^b\Big[\int_c^d g(x,y)\,dy\Big]\,dx\le\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx \qquad (3)$$

چون g تابع پله‌ای است، از قسمت اول این اثبات نتیجه می‌شود که طرف چپ (۳) مساوی با جمع پایینی $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ است، طرف راست (۳) همان I است. پس ثابت کردیم هر جمع پایینی کوچکتر یا مساوی I است. اثبات اینکه هر جمع بالایی بزرگتر یا مساوی با I است نیز مشابه است و بنابراین قضیه حاصل می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید $f(x,y)=e^{2x+y}$. انتگرال f روی $D=[0,1]\times[0,3]$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^3\Big(\int_0^1 e^{2x+y}\,dx\Big)\,dy$$

$$=\int_0^3\Big(\frac{1}{2}e^{2x+y}\Big|_{x=0}^{1}\Big)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^3(e^{2+y}-e^{y})\,dy$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)\int_0^3 e^{y}\,dy=\frac{1}{2}(e^2-1)(e^3-1)$$

مثال ۵. $\int_1^3\int_0^2 x^2y\,dx\,dy$ را محاسبه کرده و با مثال ۳ مقایسه کنید.

حل.

$$\int_1^3\int_0^2 x^2y\,dx\,dy=\int_1^3\Big(\int_0^2 x^2y\,dx\Big)\,dy=\int_1^3\Big(\frac{1}{3}x^3y\Big|_{x=0}^{2}\Big)\,dy$$

$$=\int_1^3 \frac{8}{3} y\,dy = \frac{4}{3} y^2 \Big|_1^3 = \frac{4}{3}(3^2-1^2) = \frac{32}{3}$$

پاسخ همان است که در مثال ۳ به دست آمد.

مثال ۶. $\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy$ را که در آن $D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$ است، محاسبه کنید.

حل.
$$\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\Big[\int_0^{\pi} \sin(x+y)\,dx\Big]dy$$
$$=\int_0^{2\pi}\Big[-\cos(x+y)\Big|_{x=0}^{\pi}\Big]dy$$
$$=\int_0^{2\pi}[\cos y - \cos(y+\pi)]\,dy$$
$$=[\sin y - \sin(y+\pi)]\Big|_{y=0}^{2\pi} = 0$$

مثال ۷. حجم زیر نمودار $f(x,y)=x^2+y^2$ محصور به صفحات $z=0$، $x=0$، $x=3$، $y=-1$ و $y=1$ را به دست آورید.

حل.
$$V=\int_{-1}^{1}\int_0^3 (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\Big[\frac{1}{3}x^3+y^2x\Big|_{x=0}^{3}\Big]dy$$
$$=\int_{-1}^{1}(9+3y^2)\,dy$$
$$=(9y+y^3)\Big|_{-1}^{1} = 20$$

مثال ۸. اگر D ورقه ای فلزی تعریف شده توسط $1\le x\le 2$ و $0\le y\le 1$ با چگالی جرم $\rho(x,y)=ye^{xy}$ گرم بر سانتیمتر مربع باشد، جرم ورقه را به دست آورید.

حل. جرم کل برابر است با

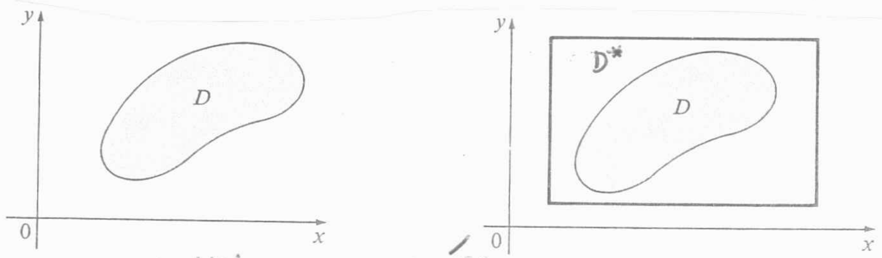
$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_1^2 ye^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(e^{xy}\Big|_{x=1}^{2}\Big)dy$$
$$=\int_0^1 (e^{2y}-e^{y})\,dy = \Big(\frac{1}{2}e^{2y}-e^{y}\Big)\Big|_{y=0}^{1} = \frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}\ \text{gr.}$$

انتگرال دوگانه روی نواحی کلی

بسیاری از کاربردهای انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ روی نواحی غیرمستطیلی D است. برای مثال حجم یک نیم کره، جرم یک ورقه فلزی بیضی گون و... . در این بخش انتگرال دوگانه روی ناحیه D غیرمستطیلی را مورد بررسی قرار می دهیم.

برای شروع ، مفهومی که توسط $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن D یک مستطیل نیست را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید D ناحیه‌ای کراندار در صفحه است. کراندار بودن D به معنای آن است که می‌توان آن را در داخل مستطیل D^* در نظر گرفت. (شکل ۷)

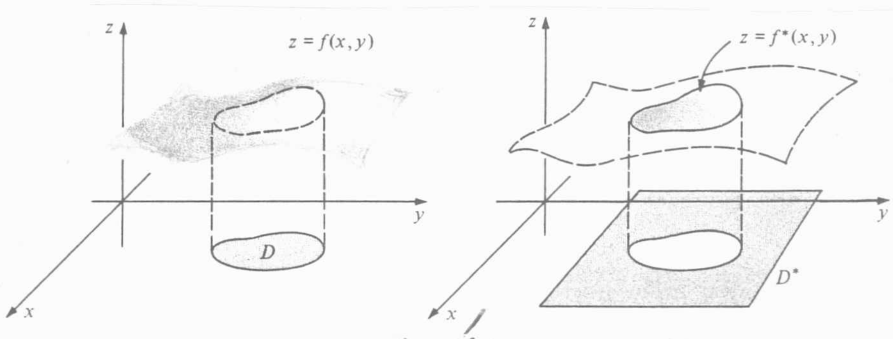


(الف) شکل ۷ (ب)

حال تابع کراندار $f(x,y)$ تعریف شده بر ناحیه کراندار D را به صورت زیر به تابع $f^*(x,y)$ تعریف شده بر مستطیل D^* توسیع می‌دهیم

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in D^*\setminus D \end{cases}$$

شکل ۸ را ببینید.



شکل ۸

حال اگر D^{**} مستطیل دلخواه دیگری شامل D باشد و f^{**} تابع متناظر به آن تعریف شده به صورت بالا باشد آنگاه

$$\iint_{D^*} f^*(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^{**}} f^{**}(x,y)\,dx\,dy$$

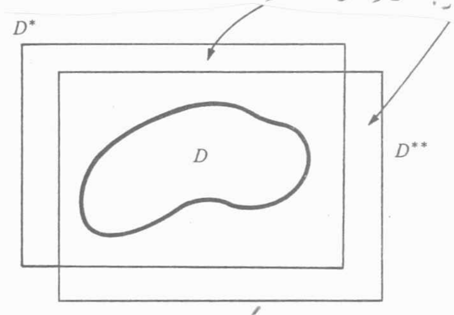
زیرا f^* و f^{**} در ناحیه‌هایی که در آن D^* و D^{**} متفاوت‌اند صفر می‌باشند و داریم

$$\iint_{D^*} f^*(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f^*(x,y)\,dx\,dy+\iint_{D^*\setminus D} f^*(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy+0=\iint_D f^{**}(x,y)\,dx\,dy+0$$

$$=\iint_D f^{**}(x,y)\,dx\,dy+\iint_{D^{**}\setminus D} f^{**}(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^{**}} f^{**}(x,y)\,dx\,dy$$

(شکل ۹ را ببینید)



شکل ۹

توجه می‌کنیم که اگر روی D ، $f(x,y)\geq 0$ آنگاه هر دو انتگرال در بالا برابر با حجم محصور به نمودار تابع f روی ناحیه D است، یعنی حجم مجموعه تمام نقاط (x,y,z) که در آن $(x,y)\in D$ و $0\leq z\leq f(x,y)$. با این ملاحظات، می‌توان تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف ۹. انتگرال دوگانه روی ناحیه D. تابع f را به مستطیل D^* شامل D با فرض $f^*=f$ روی D و $f^*=0$ روی $D^*\setminus D$ به تابع f^* روی D^* توسیع می‌دهیم. در این صورت گوییم تابع f روی D انتگرال‌پذیر است و آن را با $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ نمایش می‌دهیم، هرگاه تابع f^* روی مستطیل D^* به مفهوم بیان شده در بخش قبل انتگرال‌پذیر باشد. در این حالت داریم

$$\begin{aligned}\iint_{D^*} f^*(x,y)\,dxdy &= \iint_D f^*(x,y)\,dxdy+\iint_{D^*\setminus D} f^*(x,y)\,dxdy\\ &=\iint_D f(x,y)\,dxdy+0\\ &=\iint_D f(x,y)\,dxdy\end{aligned}$$

تعریف فوق انتگرال‌پذیری یک تابع کراندار تعریف شده بر ناحیه کلی D را نتیجه می‌دهد، اما برای محاسبه انتگرال به شکل فوق نمی‌توان مطلبی داشت. برای این منظور، ابتدا دو نوع ناحیه مقدماتی را تعریف می‌کنیم و سپس با توجه به مستقل بودن انتگرال تابع f روی D از انتخاب D^* و تابع f^* مشروط به اینکه $D\subseteq D^*$ باشد، روشی برای محاسبه انتگرال به دست می‌آوریم.

ناحیه نوع ۱. فرض کنید دو تابع با مقادیر حقیقی و پیوسته φ_1 و φ_2 تعریف شده بر $[a,b]$ با شرط

$$\varphi_1(t) \le \varphi_2(t) \qquad t\in[a,b]$$

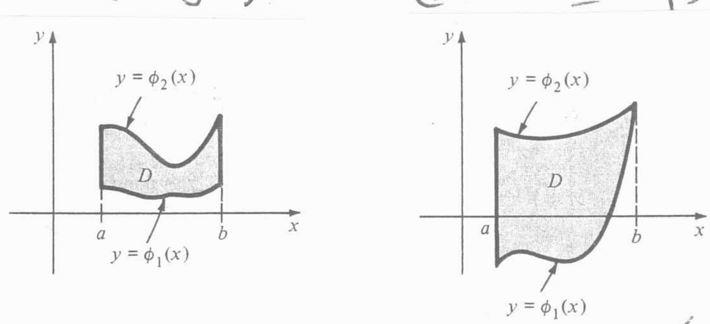
داده شده اند و D مجموعه تمام نقاط (x,y) در صفحه است به طوری که $x\in[a,b]$ و

$$\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)$$

یعنی

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$

در این صورت گوییم ناحیه D از نوع 1 است. (شکل ۱۰)



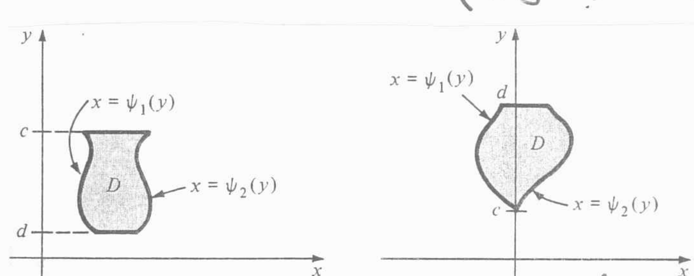
شکل ۱۰. مثال هایی از ناحیه نوع 1

منحنی ها و پاره خط های مستقیم محصور کننده ناحیه را کرانه یا مرز D نامیم.

ناحیه نوع ۲. ناحیه D در صفحه از نوع ۲ نامیده می شود، هرگاه توابع پیوسته ψ_1 و ψ_2 تعریف شده روی $[c,d]$ وجود داشته باشند به طوری که

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\le y\le d,\ \ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

که در آن برای هر $t\in[c,d]$، $\psi_1(t)\le\psi_2(t)$. مجدداً مرز ناحیه شامل منحنی ها و پاره خط های محصور کننده ناحیه اند. (شکل ۱۱)

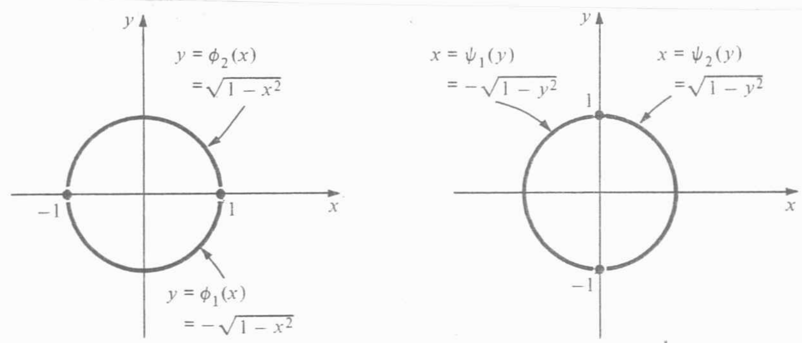


شکل ۱۱. مثال هایی از ناحیه نوع ۲

مثال زیر نشان می‌دهد که یک ناحیه می‌تواند هم از نوع ۱ و هم از نوع ۲ به طور همزمان باشد.

مثال ۹. نشان دهید ناحیه D تعریف شده توسط $x^2+y^2\le 1$ (قرص یکه) ناحیه‌ای از نوع ۱ و ۲ است.

حل. در شکل ۱۲ به وضوح نوع ۱ و ۲ بودن D مشخص است.



الف) ناحیه از نوع ۱ ب) ناحیه از نوع ۲

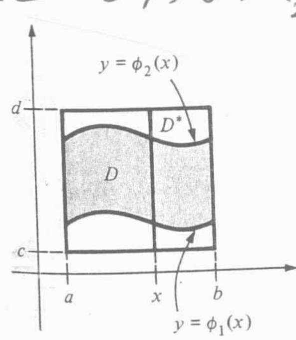
شکل ۱۲

قضیه ۱۵.
اگر تابع f روی یک ناحیه مقدماتی D پیوسته باشد آنگاه f روی D انتگرال‌پذیر است.

با توجه به قضیه ۱۵ و تحویل انتگرال مکرر برای مستطیل‌ها، می‌توانیم انتگرال‌ها روی نواحی مقدماتی را با انتگرال‌گیری مکرر به دست آوریم. اگر $D^*=[a,b]\times[c,d]$ مستطیل شامل D باشد آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f^*(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f^*(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f^*(x,y)\,dx\,dy \qquad (۴)$$

که در آن $f^*=f$ روی D و $f^*=0$ روی D^*-D. حال فرض کنید D ناحیه مقدماتی از نوع ۱ تعریف شده توسط توابع ϕ_1 و ϕ_2 روی $[a,b]$ است (شکل ۱۳) و انتگرال مکرر $\int_a^b\int_c^d f^*(x,y)\,dy\,dx$ را در نظر بگیرید.



شکل ۱۳

بالاخص انتگرال داخلی $\int_c^d f^*(x,y)\,dy$ را برای x ثابت اختیار کنید. طبق تعریف اگر $y<\varphi_1(x)$ یا $y>\varphi_2(x)$ آنگاه $f^*(x,y)=0$

پس

$$\int_c^d f^*(x,y)\,dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (5)$$

بنابراین

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

به طور مشابه می‌توان ناحیه نوع ۲ را در نظر گرفت. پس

انتگرال‌های دوگانه. اگر D ناحیه‌ای از نوع ۱ باشد (شکل ۱۰) آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx \qquad (6)$$

اگر D ناحیه‌ای از نوع ۲ باشد (شکل ۱۱) آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d\Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\Big]dy \qquad (7)$$

اگر D از هر دو نوع باشد، هر دو عبارت بالا برقرارند.

اگر تابع f روی D نامنفی باشد، می‌توان از روش انتگرال مکرر به صورت تکنیک بیان شده در ریاضی ۱ برای یافتن حجم توسط برش دادن حجم محصور فضایی استفاده کرد. به عنوان مثال، فرض کنید D ناحیه مقدماتی از نوع ۱ تعریف شده توسط توابع پیوسته $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ روی $[a,b]$ است. برای x ثابت، حجم محصور به نمودار $f(x,y)$ روی D را با صفحه گذرنده از نقطه $(x,0,0)$ موازی با صفحه yz برش می‌دهیم. حاصل ناحیه‌ای در صفحه فوق تعریف شده توسط نامعادلات $\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)$ و $0\le z\le f(x,y)$ است. مساحت این ناحیه $A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ است. حال انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ که حجم جسم محصور به نمودار $z=f(x,y)$، صفحه xy و ناحیه D است به وسیله انتگرال مکرر زیر به دست می‌آید

$$\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

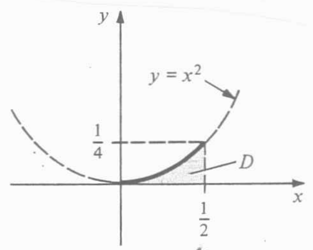
که همان رابطه (۶) است. بررسی درستی رابطه (۷) مشابه می‌باشد.

مثال ۱۰. مطلوب است $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ ، که در آن D ناحیه سایه خورده در شکل ۱۴ است.

حل. D ناحیه‌ای از نوع ۱ با $[a,b]=[0,\frac{1}{2}]$ ، $\varphi_1(x)=0$ و $\varphi_2(x)=x^2$ است. طبق فرمول (۶) داریم

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy=\int_0^{1/2}\int_0^{x^2}(x+y)\,dy\,dx=\int_0^{1/2}\left[\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{x^2}\right]dx$$
$$=\int_0^{1/2}\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^{1/2}$$
$$=\frac{1}{64}+\frac{1}{320}=\frac{3}{160}$$

D ناحیه‌ای از نوع ۲ نیز با $\psi_1(y)=\sqrt{y}$ و $\psi_2(y)=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

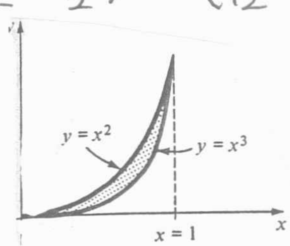


شکل ۱۴

مثال ۱۱. مطلوب است $\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} xy\,dy\,dx$. ناحیه برای انتگرال دوگانه را رسم کنید.

حل. در اینجا y از x^3 تا x^2 تغییر می‌کند، در حالی که x از ۰ تا 1 تغییر می‌کند. بنابراین ناحیه D در شکل ۱۵ نمایش داده شده است. انتگرال عبارت است از

$$\int_0^1\left(\frac{xy^2}{2}\Big|_{y=x^3}^{x^2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^5}{2}-\frac{x^7}{2}\right)dx=\left(\frac{x^6}{12}-\frac{x^8}{16}\right)\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{12}-\frac{1}{16}=\frac{1}{48}$$

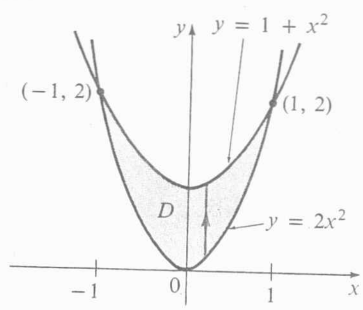


شکل ۱۵

مثال ۱۲. مطلوب است $\iint_D (x+2y)\,dA$ که در آن D ناحیه محصور به سهمی‌های $y=2x^2$ و $y=1+x^2$ است. ($dA=dx\,dy=dy\,dx$ عنصر سطح نامیده می‌شود)

حل. سهمی‌ها با یکدیگر تلاقی دارند، $2x^2=1+x^2$ ، یعنی $x=\pm 1$ پس در دو نقطه $(-1,2)$ و $(1,2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. ناحیه در شکل ۱۶ رسم شده است. این ناحیه از نوع ۱ است ولی از نوع ۲ نمی‌باشد. می‌نویسیم $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2\}$. چون مرز پایینی $y=2x^2$

و مرز بالایی $y=1+x^2$ است.



شکل ۱۶

بنابراین

$$\iint_D (x+2y)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\Big[xy+y^2\Big]_{y=2x^2}^{1+x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\big[x(1+x^2)+(1+x^2)^2-x(2x^2)-(2x^2)^2\big]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)\,dx$$

$$=-3\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\,\Big|_{-1}^{1}=\frac{32}{15}$$

مثال ۱۳. حجم جسم محصور شده از بالا ناحیه D در صفحه xy کراندار به خط $y=2x$ و سهمی $y=x^2$ و زیر سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ را بدست آورید.

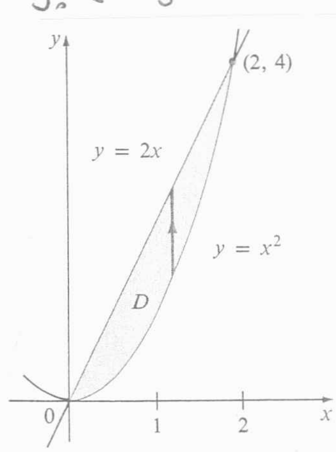
حل. از شکل ۱۷ (الف) دیده می‌شود که D ناحیه از نوع 1 است و

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\quad x^2\le y\le 2x\}$$

پس

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_0^2\Big[x^2y+\frac{y^3}{3}\Big]_{y=x^2}^{2x}dx$$

$$=\int_0^2\Big(-\frac{x^6}{3}-x^4+\frac{14x^3}{3}\Big)dx=\frac{216}{35}$$



شکل ۱۷ (الف)

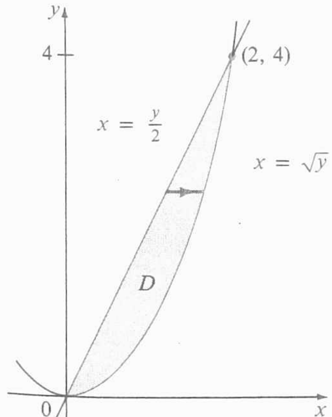
از شکل ۱۷ (ب) دیده می‌شود که D ناحیه‌ای از نوع ۲ است و

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4,\ \frac{y}{2}\le x\le \sqrt{y}\}$$

پس

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^4\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=y/2}^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^4\left(\frac{y^{3/2}}{3}+y^{5/2}-\frac{y^3}{24}-\frac{y^3}{2}\right)dy=\frac{216}{35}$$

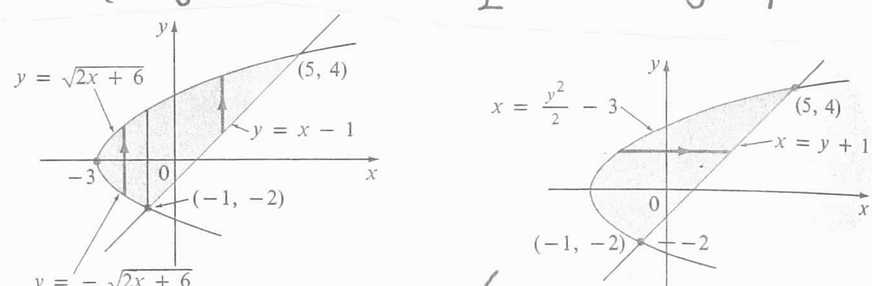


شکل ۱۷ (ب)

مثال ۱۴. مطلوب است $\iint_D xy\,dA$ که در آن D ناحیه محصور به خط $y=x-1$ و سهمی $y^2=2x+6$ است.

حل. ناحیه D در شکل ۱۸ نمایش داده شده است. D ناحیه‌ای از نوع ۱ و از نوع ۲ است، اما شرح ناحیه D به عنوان نوع ۱ کمی پیچیده‌تر است زیرا کران پایین آن شامل دو قسمت است. بنابراین ناحیه D را به عنوان ناحیه نوع ۲ زیر در نظر می‌گیریم

$$D=\{(x,y)\mid -2\le y\le 4,\ \frac{y^2}{2}-3\le x\le y+1\}$$



(الف) D به عنوان نوع ۱ شکل ۱۸ (ب) D به عنوان نوع ۲

پس

$$\iint_D xy\,dA=\int_{-2}^4\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1}xy\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^4\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right)dy=36$$

اگر D را به عنوان ناحیه از نوع ۱ در شکل ۱۸ (الف) در نظر بگیریم، آن گاه

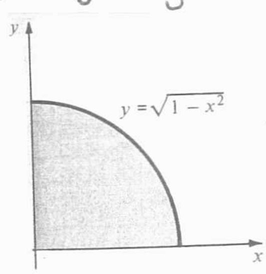
$$\iint_D xy\,dA=\int_{-3}^{1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx+\int_{1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

که محاسبات طولانی تری دارد!

مثال ۱۵. انتگرال $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\,dy\,dx$ را به عنوان یک انتگرال روی ناحیه D نوشته، ناحیه را رسم کرده و نشان دهید از نوع ۱ و ۲ است. با تغییر ترتیب انتگرال گیری آن را محاسبه کنید.

حل. ناحیه D در شکل ۱۹ نمایش داده شده است و از نوع ۱ با $\varphi_1(x)=0$ و $\varphi_2(x)=\sqrt{1-x^2}$ است و از نوع ۲ با $\psi_1(y)=0$ و $\psi_2(y)=\sqrt{1-y^2}$ می باشد. بنابراین

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}\,x\Big|_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}}\right]dy$$
$$=\int_0^1(1-y^2)\,dy=\frac{2}{3}$$



شکل ۱۹

مثال ۱۶. انتگرال تابع $f(x,y)=(x+y)^2$ روی ناحیه نشان داده شده در شکل ۲۰ را بدست آورید.

حل. در این مثال، اگر ناحیه را از نوع ۲ بگیریم، باید آن را به دو قسمت با رسم خط $y=1$ تقسیم کنیم و هر کدام را محاسبه و نهایتاً با هم جمع نماییم. اما اگر ناحیه از نوع ۱، در نظر گرفته شود داریم

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_x^{\frac{1}{2}x+1}f(x,y)\,dy\,dx$$

پس

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ \ x\le y\le \tfrac{1}{2}x+1\}$$

حال انتگرال را محاسبه می کنیم

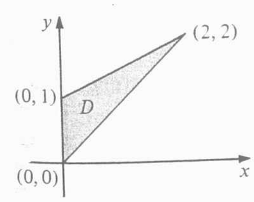
$$\int_0^2\int_x^{\frac{1}{2}x+1}(x+y)^2\,dy\,dx=\int_0^2\left[\frac{1}{3}(x+y)\Big|_{y=x}^{\frac{1}{2}x+1}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2\left[\left(\frac{3}{2}x+1\right)^3-(2x)^3\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}x+1\right)^4\Big|_0^2-2x^4\Big|_0^2\right]$$

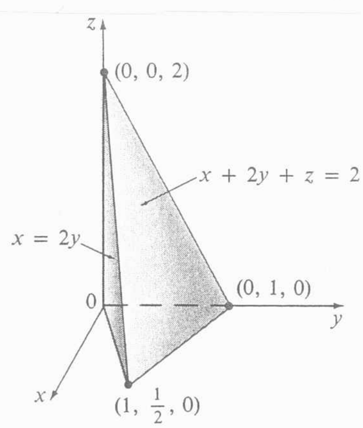
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}(4^4-1)-32\right]$$

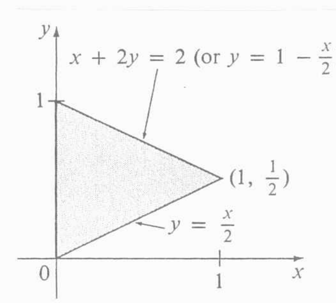
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{21}{2}\right]=\frac{21}{6}$$



شکل ۲۰

مثال ۱۷. حجم هرم محصور به صفحات $x+2y+z=2$ ، $x=2y$ ، $x=0$ و $z=0$ را بدست آورید. (شکل ۲۱)



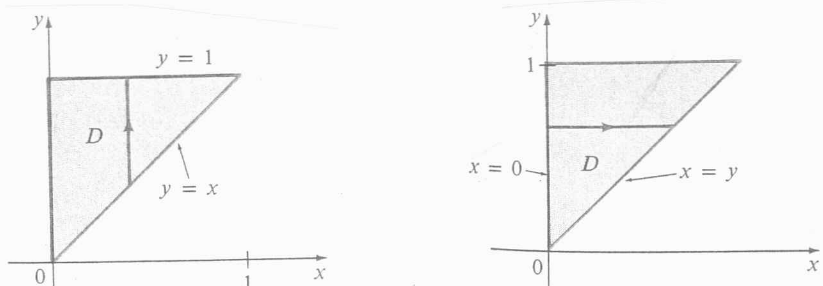


(الف) شکل ۲۱ (ب)

حل. تمرین

مثال ۱۸. انتگرال مکرر $\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx$ را به دست آورید. (شکل ۲۲)

حل.



الف) ناحیه از نوع ۱

ب) ناحیه از نوع ۲

شکل ۲۲

تمرین

خواص انتگرال دوگانه

همواره فرض براین است که تمام انتگرالهای بیان شده در این قسمت موجودند. برخی از خواص انتگرال دوگانه در قضیه ۷ مطرح شد. این خواص برای انتگرال دوگانه f روی ناحیه کلی D نیز برقرارند. دیگر خواص انتگرالهای دوگانه در زیر لیست شده‌اند.

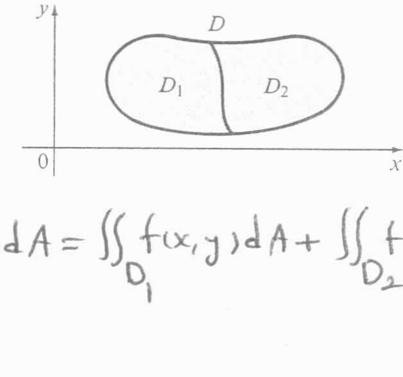
$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA \qquad (8)$$

$$\iint_D c\,f(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA \qquad (9)$$

اگر برای هر $(x,y)\in D$ داشته باشیم $f(x,y)\geq g(x,y)$ آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA \qquad (10)$$

خاصیت بعد برای انتگرال دوگانه مشابه خاصیت $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ برای انتگرالهای معمولی است. اگر $D=D_1\cup D_2$ که در آن D_1 و D_2 بجز در مرز نقاط مشترک دیگری ندارند (شکل ۲۳)

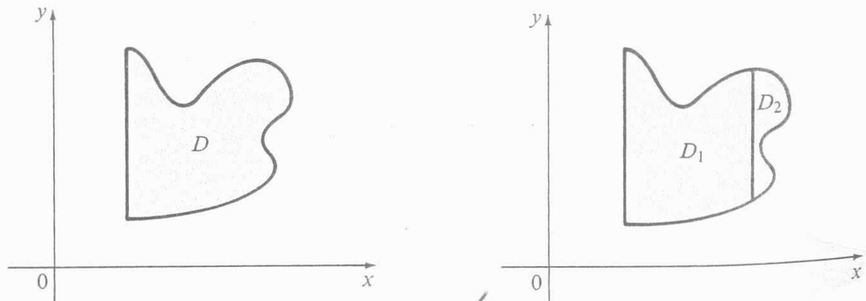


شکل ۲۳

آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA \qquad (11)$$

خاصیت (۱۱) را می‌توان برای انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D که نه از نوع ۱ و نه از نوع ۲ است اما آن را به صورت اجتماع نواحی نوع ۱ و ۲ می‌توان نوشت، استفاده کرد. (شکل ۲۴)



الف) D از نوع ۱ و ۲ نیست   شکل ۲۴   ب) $D=D_1\cup D_2$، D_1 از نوع ۱ و D_2 از نوع ۲ است

خاصیت بعد بیان می‌کند که انتگرال از تابع ثابت $f(x,y)=1$ روی ناحیه D، مساحت ناحیه D است.

$$\iint_D 1\,dA = A(D) \tag{۱۲}$$

زیرا، برای مثال اگر D از نوع ۱ باشد و در فرمول (۹) قرار دهیم $f(x,y)=1$، آنگاه

$$\iint_D 1\,dA=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\,dy\,dx=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]\,dx=A(D)$$

نهایتاً قضیه مقدار اکسترمم برای انتگرال معمولی نیز در انتگرالهای دوگانه به فرم زیر است.

اگر برای هر $(x,y)\in D$،

$$m\le f(x,y)\le M$$

آنگاه

$$m\,A(D)\le\iint_D f(x,y)\,dA\le M\,A(D) \tag{۱۳}$$

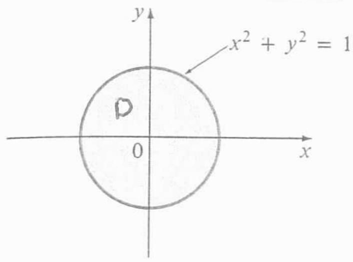
مثال ۱۹. با استفاده از (۱۳) انتگرال $\iint_D e^{\sin x\cos y}\,dA$ را تخمین بزنید که در آن D قرص به مرکز مبدا و شعاع ۲ است.

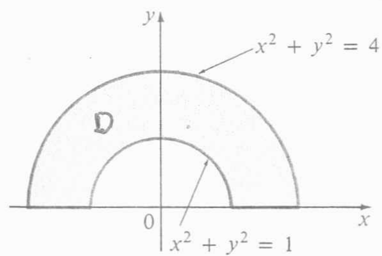
حل. چون $-1\le\sin x\le 1$ و $-1\le\cos x\le 1$ پس $-1\le\sin x\cos y\le 1$ و بنابراین $e^{-1}\le e^{\cos y\sin x}\le e^1=e$. پس $m=e^{-1}$، $M=e$ و $A(D)=4\pi$ بنابراین

$$\frac{4\pi}{e}\le\iint_D e^{\sin x\cos y}\,dA\le 4\pi e$$

انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

فرض کنید انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ مورد نظر است که در آن ناحیه D یکی از نواحی در شکل ۲۵ است.



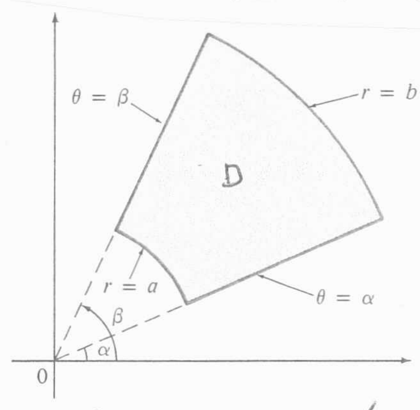


(الف) $R=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ شکل ۲۵ $R=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant \pi\}$ (ب)

در هر دو حالت D برحسب مختصات قطبی شرح داده شده است. نمایش D در مختصات دکارتی پیچیده‌تر از مختصات قطبی است. این نواحی حالتهای خاص مستطیل قطبی

$$D=\{(r,\theta)\mid a\leq r\leq b,\ \alpha\leq\theta\leq\beta\}$$

است که در شکل ۲۶ نمایش داده شده است.



شکل ۲۶. مستطیل قطبی

برای محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$ که در آن D یک مستطیل قطبی است، با افراز $[a,b]$ به m زیرفاصله

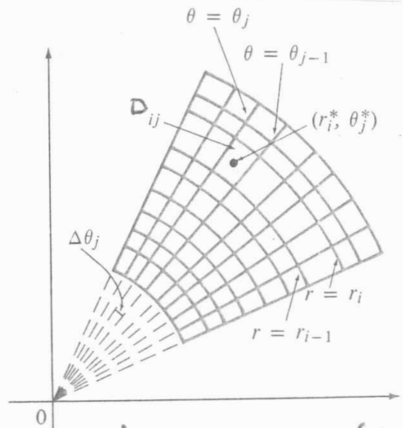
$$a=r_0<r_1<r_2<\cdots<r_{i-1}<r_i<\cdots<r_m=b$$

و افراز $[\alpha,\beta]$ به n زیرفاصله

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{j-1}<\theta_j<\cdots<\theta_n=\beta$$

شروع می‌کنیم. در این صورت دایره‌های $r=r_i$ و شعاع‌های $\theta=\theta_j$ افراز قطبی P از D به

مستطیل‌های قطبی که جملگی نشان داده شده در شکل ۲۷ است. نُرم $\|P\|$ برای افراز قطبی طول بلندترین قطر تمام زیر مستطیل‌های قطبی است.



شکل ۲۷. افراز قطبی

مرکز زیر مستطیل قطبی ij-ام $D_{ij}=\{(r,\theta) \mid r_{i-1}\le r\le r_i,\ \theta_{j-1}\le\theta\le\theta_j\}$ دارای مختصات قطبی $r_i^*=\frac{1}{2}(r_{i-1}+r_i)$ و $\theta_j^*=\frac{1}{2}(\theta_{j-1}-\theta_j)$ است. مساحت D_{ij} با استفاده از این واقعیت که مساحت یک قطاع از دایره‌ای با شعاع r و زاویه مرکزی θ برابر $\frac{1}{2}r^2\theta$ است، به دست می‌آید. با تفاضل مساحت دو قطاع که هر یک دارای زاویه مرکزی $\Delta\theta_j=\theta_j-\theta_{j-1}$ است، مساحت D_{ij} عبارت است از

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta_j-\frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta_j=\frac{1}{2}(r_i^2-r_{i-1}^2)\Delta\theta_j\\ &=\frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})(r_i-r_{i-1})\Delta\theta_j\\ &=r_i^*\Delta r_i\Delta\theta_j\end{aligned}$$

که در آن $\Delta r_i=r_i-r_{i-1}$. گرچه انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ برحسب افرازهای دکارتی تعریف می‌شود، می‌توان نشان داد که برای تابع پیوسته f پاسخ مشابهی با استفاده از افراز قطبی حاصل می‌شود. مختصات دکارتی مرکز D_{ij} عبارت است از $(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)$ پس جمع ریمانی متناظر به صورت

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\,\Delta A_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j)\,r_i^*\Delta r_i\Delta\theta_j \quad (۱۴)$$

است. اگر قرار دهیم $g(r,\theta)=r f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ آنگاه جمع در (۱۴) را می‌توان به صورت

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*,\theta_j^*)\,\Delta r_i\Delta\theta_j$$

نوشت که جمع ریمانی برای انتگرال دوگانه $\int_\alpha^\beta\int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dA &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\,\Delta A_{ij}\\ &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*,\theta_j^*)\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j\\ &= \int_\alpha^\beta\int_a^b g(r,\theta)\,dr\,d\theta = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

قضیه ۱۱. اگر f روی مستطیل قطبی D داده شده توسط $0\le a\le r\le b$ ، $\alpha\le\theta\le\beta$ پیوسته باشد، که در آن $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$ آنگاه

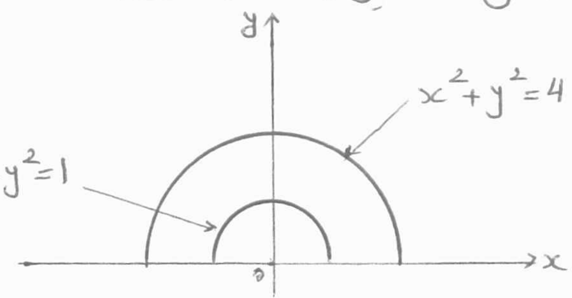
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (۱۵)$$

مثال ۲۰. مطلوب است $\iint_D (3x+4y^2)\,dA$ که در آن D ناحیه‌ای در نیم‌صفحه بالایی کراندار به دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است.

حل. ناحیه D را می‌توان به صورت

$$D=\{(x,y)\mid y\geq 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$$

شرح داد. نمودار D در شکل ۲۸ نمایش داده شده است.



شکل ۲۸

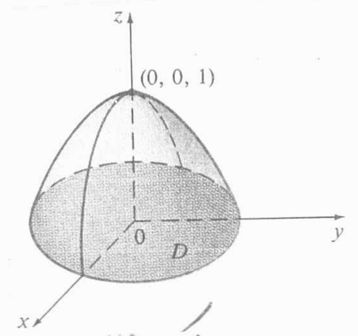
$$D=\{(r,\theta)\mid 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

بنابراین از فرمول (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}\iint_D (3x+4y^2)\,dA &= \int_0^\pi\int_1^2 (3r\cos\theta+4r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^\pi \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_{r=1}^{2} d\theta\\ &= \int_0^\pi (7\cos\theta+15\sin^2\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^\pi \left[7\cos\theta+\frac{15}{2}(1-\cos 2\theta)\right] d\theta = \frac{15\pi}{2}\end{aligned}$$

مثال ۲۱. حجم جسم محصور به سهمی گون $z=1-x^2-y^2$ و صفحه $z=0$ را بدست آورید.

حل. اگر قرار دهیم $z=0$، از معادله سهمی گون داریم $x^2+y^2=1$. یعنی جسم صفحه xy مقطع $x^2+y^2=1$ را دارد. پس ناحیه D توسط $x^2+y^2\le 1$ داده می شود. (شکل ۲۹)



شکل ۲۹

در مختصات قطبی D توسط $0\le r\le 1$ و $0\le\theta\le 2\pi$ بدست می آید. از

$$1-x^2-y^2=1-r^2$$

نتیجه می گیریم

$$V=\iint_D (1-x^2-y^2)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^3)\,dr$$

$$=2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

در این انتگرال اگر از مختصات دکارتی بجای مختصات قطبی استفاده کنیم، باید انتگرال زیر را بدست آوریم

$$V=\iint_D (1-x^2-y^2)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

که دارای محاسبات طولانی است.

قضیه ۱۲. اگر تابع f روی ناحیه قطبی $D=\{(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$ پیوسته باشد آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (16)$$

و اگر $D=\{(r,\theta)\,|\,a\le r\le b,\ g_1(r)\le\theta\le g_2(r)\}$ آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (17)$$

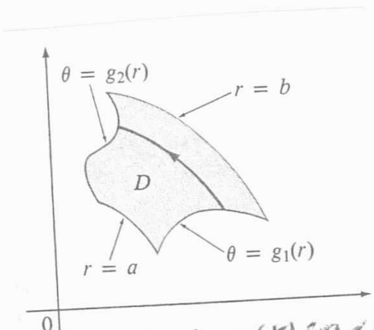
(شکل ۳۰ و شکل ۳۱ را ببینید)

مثال ۲۲. اگر $f(x,y)=1$ و $h_1(\theta)=0$ ، $h_2(\theta)=h(\theta)$ ، آنگاه برای ناحیه محصور به $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ و $r=h(\theta)$ ، مقدار $\iint_D f(x,y)\,dA$ را بدست آورید.

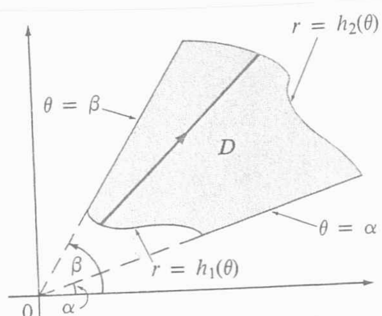
حل.

$$A(D)=\iint_D 1\,dA=\int_\alpha^\beta\int_0^{h(\theta)} r\,dr\,d\theta=\int_\alpha^\beta\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)}d\theta=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[h(\theta)]^2\,d\theta$$

که مساحت ناحیه D است.



$D=\{(r,\theta)\mid a\le r\le b,\ g_1(r)\le\theta\le g_2(r)\}$. شکل ۳۱

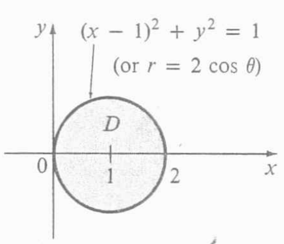


$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\ h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$. شکل ۳۰

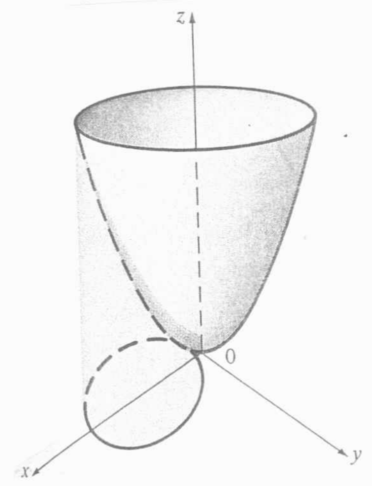
مثال ۲۳. حجم جسم زیر سهمی گون $z=x^2+y^2$ ، بالای صفحه xy و داخل استوانه $x^2+y^2=2x$ را بدست آورید.

حل. جسم بالای قرص D با مرز $x^2+y^2=2x$ یعنی $(x-1)^2+y^2=1$ قرار دارد (شکل ۳۲) در مختصات قطبی داریم $x^2+y^2=r^2$ و $x=r\cos\theta$ پس دایره مرزی به صورت $r^2=2r\cos\theta$ یا $r=2\cos\theta$ است. بنابراین قرص D توسط $D=\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2\cos\theta\}$ داده می‌شود. و از فرمول (۱۹) داریم (شکل ۳۳)

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3\pi}{2}$$



شکل ۳۲

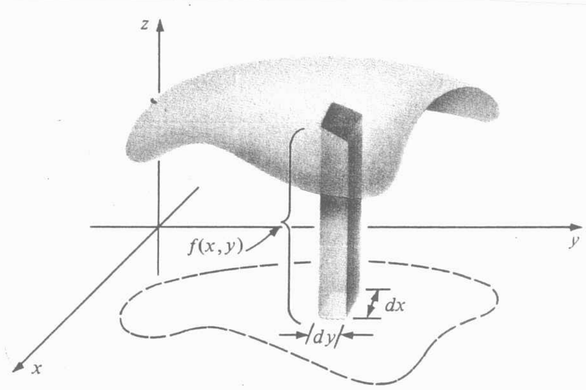


شکل ۳۳

کاربردهای انتگرال دوگانه

در بخش اول دیدیم که اگر تابع f روی ناحیه D نامنفی و کراندار باشد، آنگاه انتگرال دوگانه $\iint_D f(x,y)\,dA$ حجم ناحیه سه‌بعدی R محصور به نمودار $f(x,y)$ برای $(x,y)\in D$ است. مفهوم هندسی این نتیجه به شرح زیر است.

فرض کنید ناحیه سه‌بعدی R توسط استوانه‌هایی با قاعده dx در dy و ارتفاع $f(x,y)$ پر می‌شود. (شکل ۳۴). مجموع حجم‌های این استوانه‌ها توسط انتگرال‌گیری نمایش داده می‌شود که حاصل حجم مورد نظر است. واضح است که اگر $f(x,y)=1$ آنگاه $\iint_D dA$ مساحت ناحیه D است.

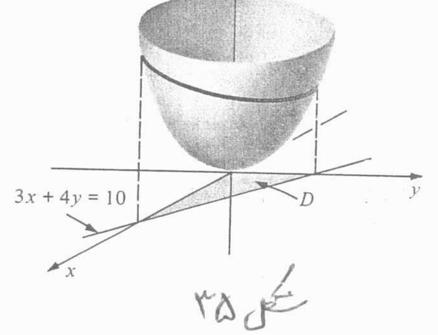


شکل ۳۴

مثال ۲۴. حجم جسم فضایی کراندار به چهار صفحه $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$ و $3x+4y=10$ و نمودار $z=x^2+y^2$ را بدست آورید.

حل. ناحیه در شکل ۳۵ نمایش داده شده است. بنابراین حجم برابر است با

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_0^{5/2}\left[\int_0^{(10-4y)/3}(x^2+y^2)\,dx\right]dy=\frac{15625}{1296}$$



شکل ۳۵

...دلال مشابه بیان...

...حیه ای سطح به صورت زیر می گیرد...

مقدار متوسط ۱۳.۱۱. اگر f تابعی انتگرال...

ناحیه D مقدار متوسط f روی D ناحیه...

$$\frac{\iint_D f(x,y)\,dA}{\iint_D dA} \qquad (۱۶)$$

مثال ۲۵. مقدار متوسط تابع $f(x,y)=x\sin^2(xy)$ ...

حل. ابتدا انتگرال تابع f روی D را تعیین می کنیم.

$$\int_0^\pi\int_0^\pi x\sin^2(xy)\,dx\,dy = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2)-1}{8\pi}$$

ها f روی مستطیل D عبارت است از:

۵.۰ به ...

$$\frac{\left(\frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2)-1}{8\pi}\right)}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2)-1}{8\pi^3}$$

کاربرد انتگرال معمولی، گشتاورها و مرکز جرم ورقه نازک

استفاده از انتگرال دوگانه می توانیم اطلاعات فیزیکی ...

قضیه ۳. فرض کنید ورقه مورد نظر ناحیه D در صفحه با چگالی

م است که در آن ρ تابعی پیوسته روی D می باشد

$\rho(x,y) =$ ...

... یک مستطیل کوچک ... (x,y) است و

... کنید، گرفته شود. (شکل ۳۶) ...

D را به مستطیل های ...

... * *

گیریم، آنگاه جرم قسمتی از ورقه که R_{ij} را اشغال می‌کند، تقریباً برابر $\rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}$ است که در آن ΔA_{ij} مساحت R_{ij} می‌باشد. با جمع تمام این جرم‌ها، تقریبی برای جرم کل به صورت

$$m \simeq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \rho(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij}$$

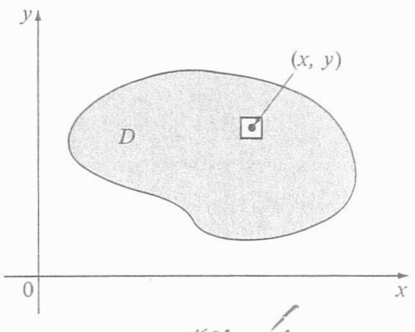
حاصل می‌شود. حال با ظریف‌تر کردن افراز به مقدار واقعی m به عنوان مقدار حدی تقریب‌ها می‌رسیم.

$$m = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \rho(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij} = \iint_D \rho(x,y)\, dA \qquad (۱۷)$$

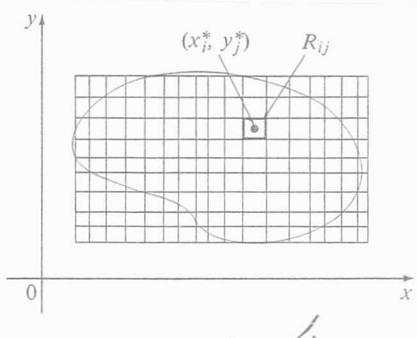
به طور مشابهی می‌توان انواع دیگری از چگالی‌ها را در نظر گرفت. به عنوان مثال اگر بار الکتریکی روی یک ناحیه D توزیع شده و چگالی بار (یعنی واحد بار به واحد مساحت) توسط $\sigma(x,y)$ در نقطه (x,y) از D داده شده باشد، آنگاه بار کل Q توسط

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)\, dA \qquad (۱۸)$$

به دست می‌آید.



شکل ۳۶

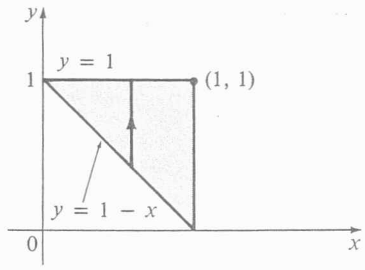


شکل ۳۷

مثال ۲۶. بار روی ناحیه مثلثی D در شکل ۳۸ توزیع شده و در نقطه (x,y) از آن دارای چگالی بار $\sigma(x,y) = xy$ اندازه‌گیری شده در واحد C/m^2 است. بار کل را به دست آورید.

حل. از معادله (۱۸) و شکل ۳۸ داریم

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1-(1-x)^2\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{24}$$



شکل ۳۸

بنابراین شارژ کل برابر $\frac{5}{24}C$ است. (C نماد اختصاری Coulombs است)

حال مختصات مرکز جرم یک ورقه به شکل ناحیه D با تابع چگالی $\rho(x,y)$ را بدست می‌آوریم. همان گونه که می‌دانیم گشتاور یک ذره حول یک محور برابر با حاصل ضرب جرم آن ذره و فاصله ذره تا محور است. ناحیه D را افراز کرده و مستطیل کوچک در شکل (۳۷) را در نظر می‌گیریم. جرم R_{ij} تقریباً برابر $\rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}$ است، پس می‌توان گشتاور تقریبی R_{ij} نسبت به محور xها را به صورت $[\rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}]y_j^*$ نمایش داد، حال اگر این کمیت‌ها را باهم جمع کرده و در حد وقتی که $\|P\| \to 0$ آن را محاسبه کنیم، گشتاور ورقه حول محور xها به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$M_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j^* \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \iint_D y\rho(x,y)\,dA \qquad (19)$$

به طور مشابه گشتاور حول محور yها عبارت است از

$$M_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \iint_D x\rho(x,y)\,dA$$

بنابراین

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA \qquad (۲۰)$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ نقطه مرکز جرم ورقه است و m جرم ورقه می‌باشد.

مثال ۲۷ . جرم و مرکز جرم ورقه‌ای مثلثی با رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0,2)$ را به دست آورید، هرگاه تابع چگالی $\rho(x,y) = 1+3x+y$ باشد. (شکل ۳۹).

حل. مثلث مورد نظر در شکل ۳۹ نمایش داده شده است. معادله مرز بالایی مثلث به صورت $y=2-2x$ است. جرم ورقه عبارت است از

$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)\,dA = \frac{8}{3}$$

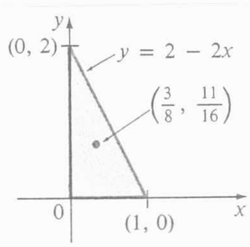
و از فرمولهای (۲۰) داریم

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA = \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(x+3x^2+xy)\,dy\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int \left[xy+3x^2y+x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2-2x}dx = \frac{3}{8}$$

و

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA = \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}(y+3xy+y^2)\,dy\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}+3x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2-2x}dx = \frac{11}{16}$$

پس مرکز جرم نقطه $\left(\frac{3}{8},\frac{11}{16}\right)$ است،



شکل ۳۹

مثال ۲۸ . مرکز جرم مستطیل $[0,1]\times[0,1]$ را به دست آورید، هرگاه تابع چگالی آن به صورت $f(x,y)=e^{x+y}$ باشد.

حل. ابتدا جرم را به دست می‌آوریم

$$m=\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1 \left[e^{x+y}\right|_{x=0}^{1} dy = -2e+1+e^2$$

و

$$\iint_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(xe^{x+y}-e^{x+y}\right)\Big|_{x=0}^{1} dy$$
$$=\int_0^1 \left[e^{1+y}-e^{1+y}-(0e^y-e^y)\right]dy$$
$$=\int_0^1 e^y\,dy = e^y\Big|_{x=0}^{1} = e-1$$

بنابراین

$$\bar{x} = \frac{e-1}{e^2-2e+1} = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1}$$

چون نقش x و y یکسان است. پس

$$\bar{y} = \frac{1}{e-1} \simeq 0.582$$

مثال ۲۹. چگالی در هر نقطه روی ورقه نیم دایره‌ای متناسب با فاصله نقطه از مرکز دایره است. مرکز جرم ورقه را به دست آورید.

حل. نیم دایره بالایی از دایره $x^2+y^2=a^2$ را در نظر بگیرید (شکل ۴۰). فاصله از نقطه (x,y) تا مرکز دایره (مبدأ) برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است. بنابراین تابع چگالی به صورت

$$\rho(x,y) = K\sqrt{x^2+y^2}$$

است که در آن K ثابت تناسب است. تابع چگالی و شکل ناحیه را در مختصات قطبی در نظر می‌گیریم. پس $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و ناحیه توسط $0\le r\le a$ و $0\le\theta\le\pi$ به دست می‌آید. جرم ورقه m عبارت است از

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA = \iint_D K\sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{a}(Kr)\,r\,dr\,d\theta$$

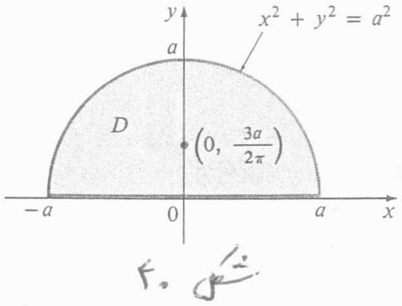
$$= K\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\,dr = \frac{K\pi a^3}{3}$$

ورقه و تابع چگالی نسبت به محور yها متقارن است، پس مرکز جرم روی محور yها واقع است یعنی $\bar{x}=0$. مختص y مرکز جرم را به دست می‌آوریم

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA = \frac{3}{K\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta\,(Kr)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a} r^3\,dr = \frac{3}{\pi a^3}\cdot\frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

پس مختصات مرکز جرم $\left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$ است.



شکل ۴۰

گشتاورهای اینرسی ۱۵. گشتاور اینرسی یا گشتاور دوم یک ذره به جرم m حول یک محور توسط mr^2 تعریف می‌شود که در آن r فاصلهٔ ذره تا محور است. این مفهوم را به یک ورقهٔ با تابع چگالی $\rho(x,y)$ به شکل ناحیهٔ D در صفحه تعمیم می‌دهیم. ناحیهٔ D را به مستطیل‌های کوچک افراز می‌کنیم، گشتاور اینرسی هر زیرمستطیل حول محور xها را تقریب زده و مجموع آنها وقتی $\|P\|$ به صفر میل می‌کند را به دست می‌آوریم. نتیجه گشتاور اینرسی ورقه حول محور xها به صورت زیر است:

$$I_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_j^*)^2 \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \iint_D y^2 \rho(x,y)\, dA \qquad (۲۱)$$

به طور مشابه، گشتاور اینرسی حول محور yها عبارت است از

$$I_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_i^*)^2 \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \iint_D x^2 \rho(x,y)\, dA \qquad (۲۲)$$

و گشتاور اینرسی حول مبدأ که آن را گشتاور اینرسی قطبی نیز می‌نامیم به صورت زیر است

$$I_0 = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} [(x_i^*)^2 + (y_j^*)^2] \rho(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} = \iint_D (x^2+y^2) \rho(x,y)\, dA \qquad (۲۳)$$

توجه کنید که $I_0 = I_x + I_y$.

مثال ۳۰. گشتاورهای اینرسی I_x، I_y و I_0 قرص همگن D با چگالی $\rho(x,y)=\rho$ به مرکز مبدأ و شعاع a را به دست آورید.

حل. مرز D دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ است و در مختصات قطبی D توسط $0 \le \theta \le 2\pi$ و $0 \le r \le a$ نمایش داده می‌شود. ابتدا I_0 را محاسبه می‌کنیم

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\, r\, dr\, d\theta = \rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

به جای محاسبهٔ I_x و I_y مستقیماً، از $I_x + I_y = I_0$ و $I_x = I_y$ (زیرا ناحیه متقارن است) استفاده می‌کنیم، پس

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}.$$

در مثال ۳۰، توجه داریم که جرم قرص برابر

$$m = \text{چگالی} \times \text{مساحت} = \rho(\pi a^2)$$

است، پس گشتاور اینرسی قرص حول مبدأ را می‌توان به صورت $I_0 = \frac{1}{2}ma^2$ نوشت. پس

اگر جرم افزایش یابد یا شعاع قرص بزرگ شود، گشتاور اینرسی افزایش می‌یابد. در حالت خطی، گشتاور اینرسی نقش را اثر قالونی در حرکت چرخشی دارد که جرم در حرکت خطی ایفا می‌کند. گشتاور اینرسی چرخی که بخواهد متوقف یا شروع به حرکت چرخشی کند شبیه به جرم اتومبیلی که بخواهد شروع به حرکت یا متوقف شود، موثر است.

شعاع ژیراسیون یک ورقه حول یک محور عدد R است به طوری که

$$mR^2 = I \qquad (24)$$

که در آن m جرم ورقه و I گشتاور اینرسی حول محور داده شده است. معادله (۲۴) بیان می‌کند که اگر جرم ورقه که در فاصله R از محور قرار دارد متمرکز شود آنگاه گشتاور اینرسی این "جرم نقطه‌ای" همان گشتاور اینرسی ورقه خواهد بود.

در حالت خاص، شعاع ژیراسیون $\bar{\bar{y}}$ نسبت به محور xها و شعاع ژیراسیون $\bar{\bar{x}}$ نسبت به محور yها توسط معادلات

$$m\bar{\bar{y}}^2 = I_x, \quad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y, \qquad (25)$$

به دست می‌آید. پس $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ نقطه‌ای است که جرم ورقه را می‌توان در آن متمرکز کرد بدون اینکه تغییری در گشتاورهای اینرسی نسبت به محورهای مختصات به وجود آید.

مثال ۳۱. شعاع ژیراسیون حول محور xها برای قرص مثال ۳۰ را به دست آورید.

حل. جرم قرص برابر $m=\rho\pi a^2$ است، پس از معادلات (۲۵) داریم

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{1}{\rho\pi a^2}\cdot\frac{\pi\rho a^4}{4} = \frac{a^2}{4}$$

پس شعاع ژیراسیون حول محور xها برابر

$$\bar{\bar{y}} = \frac{a}{2}$$

است که نصف شعاع قرص می‌باشد.

مساحت رویه ۱۶. از انتگرال‌گیری مقدماتی برای یافتن مساحت رویه دوار استفاده کرده‌ایم. با استفاده از انتگرال دوگانه می‌توان مساحت یک رویه در فضا را به دست آورد. مجدداً از بحث تقریب (مانند تمام کاربردهای انتگرال) استفاده می‌کنیم.

برای یافتن مساحت رویه نمودار تابع $z=f(x,y)$ تعریف شده بر ناحیه D ابتدا ناحیه D را به مستطیل‌های کوچک با ابعاد $[x,x+dx]\times[y,y+dy]$ افراز می‌کنیم. تصویر این مستطیل‌ها روی نمودار f تقریباً یک متوازی‌الاضلاع کوچک با رئوس در نقاط

$$P_1=(x,y,f(x,y))$$

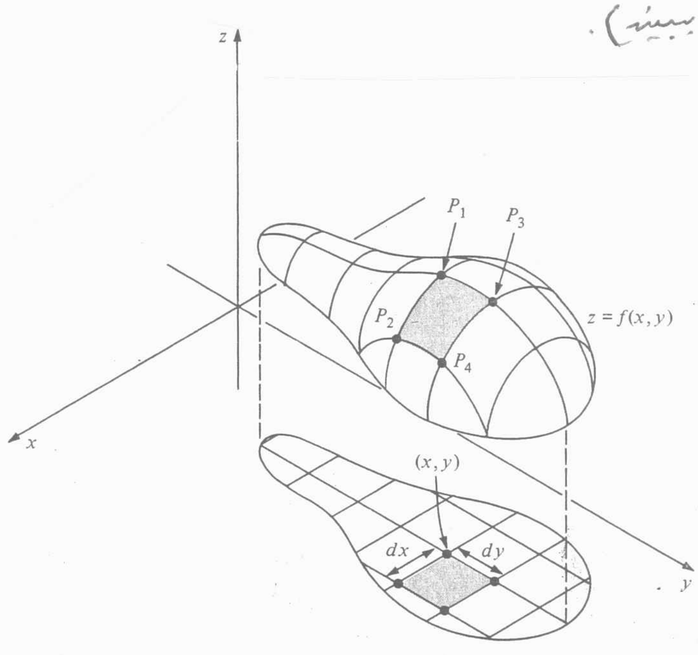
$$P_2=(x+dx,y,f(x+dx,y))\simeq(x+dx,y,f(x,y)+f_x(x,y)dx)$$

$$P_3=(x,y+dy,f(x,y+dy))\simeq(x,y+dy,f(x,y)+f_y(x,y)dy)$$

$$P_4=(x+dx,y+dy,f(x+dx,y+dy))$$

$$\simeq(x+dx,y+dy,f(x,y)+f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy)$$

است. (شکل ۴۱ را ببینید).



شکل ۴۱

مساحت dA این متوازی‌الاضلاع برابر با اندازه حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ است، که در آن $\overrightarrow{P_1P_2}=dx\,\vec{i}+f_x(x,y)dx\,\vec{k}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}=dy\,\vec{j}+f_y(x,y)dy\,\vec{k}$ و با توجه به تمرین

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & f_x(x,y)\,dx \\ 0 & dy & f_y(x,y)\,dy \end{vmatrix} = -f_x(x,y)\,dx\,dy\,\vec{i} - f_y(x,y)\,dx\,dy\,\vec{j} + dx\,dy\,\vec{k}$$

این مساحت، طول بردار فوق است یعنی

$$dA = \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\;dx\,dy$$

برای به دست آوردن مساحت رویه مطلوب، این مساحتهای متوازی الاضلاع کوچک بسیار کوچک را جمع کرده و در حد وقتی که $\|P\| \to 0$، انتگرال دوگانه زیر روی ناحیه D را داریم.

$$A(S) = S_{\text{رویه}} = \text{مساحت رویه} = \iint_D dA = \iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\;dx\,dy \qquad (۲۶)$$
$$= \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;dx\,dy$$

توجه کنید که (۲۶) عبارتی است به فرمول طول قوس یک منحنی در صفحه است. اگر رویه به صورت $x=g(y,z)$ و ناحیه D در صفحه yz یا $y=h(x,z)$ و ناحیه در صفحه xz باشد، فرمولهای مشابه‌ای برای محاسبه مساحت رویه حاصل می‌شود.

$$x=g(y,z),\quad D\subseteq(\text{صفحه } yz) \qquad A(S)=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\;dy\,dz \qquad (۲۷)$$

$$y=h(x,z),\quad D\subseteq(\text{صفحه } xz) \qquad A(S)=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\;dx\,dz \qquad (۲۸)$$

مثال ۴۲. مساحت رویه قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=1$ که بالای بیضی $x^2+\frac{y^2}{a^2}\le 1$ قرار دارد را به دست آورید که در آن a ثابت و برقرار در $0<a\le 1$ است.

حل. ناحیه مورد نظر در صفحه xy بیضی $x^2+\frac{y^2}{a^2}\le 1$ از نوع I با $\varphi_1(x)=-a\sqrt{1-x^2}$ و $\varphi_2(x)=a\sqrt{1-x^2}$ برای $-1\le x\le 1$ است. نیم کره بالایی توسط معادله

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

داده شده است. مشتقات جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}=-x/\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=-y/\sqrt{1-x^2-y^2}$ را داریم. پس مساحت عبارت است از

$$A=\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_{-1}^{1}\int_{-a\sqrt{1-x^2}}^{a\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx$$

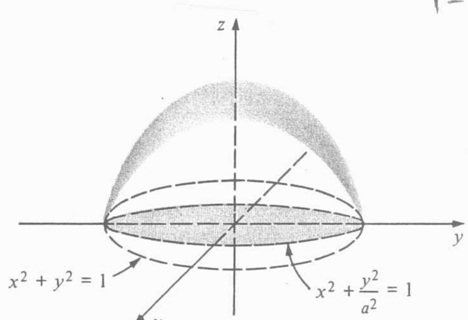
$$=\int_{-1}^{1}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\Big|_{y=-a\sqrt{1-x^2}}^{a\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sin^{-1}a\,dx=4\sin^{-1}a$$

شکل ۴۲ را ببینید. برای بررسی درستی پاسخ، توجه کنید که اگر $a=1$ باشد داریم

$$4\sin^{-1}1=4\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$$

که رابطه درستی برای مساحت نیم کره به شعاع ۱ است.



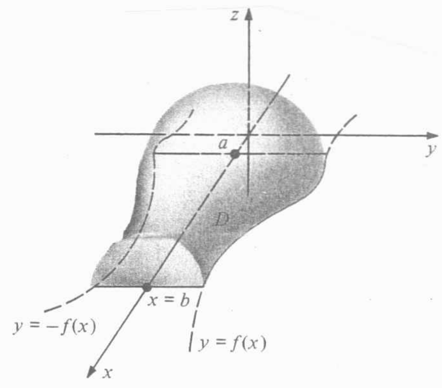
شکل ۴۲

مثال ۳۳. معادله رویه دوران یافته از دوران $y=f(x)$ حول محور xها $y^2+z^2=[f(x)]^2$ است. عبارتی برای مساحت قسمتی از این رویه که بین صفحات $x=a$ و $x=b$ قرار دارد به عنوان یک انتگرال دوگانه به دست آورید. انتگرال نسبت به y را محاسبه کرده و بررسی کنید که رابطه حاصل همان فرمول مساحت رویه دوران یافته توسط انتگرال معمولی است.

حل. z را به عنوان تابعی از x و y می‌نویسیم. داریم

$$z=g(x,y)=\pm\sqrt{f(x)^2-y^2}$$

دامنه تعریف این تابع نقاط (x,y) است که $-f(x)\le y\le f(x)$. پس رویه مورد نظر از نوع ۱ با ناحیه $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ -f(x)\le y\le f(x)\}$ می‌باشد (شکل ۴۳).



شکل ۴۳

مشتقات جزئی تابع g را بدست می‌آوریم

$$g_x(x,y)=\frac{f'(x)\,f(x)}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,,\qquad g_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

بنابراین مساحت رویه عبارت است از

$$A=2\int_a^b\int_{-f(x)}^{f(x)} f(x)\sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)^2-y^2}}\,dy\,dx$$

(ضریب 2 به خاطر این است که نصف رویه زیر صفحه xy قرار دارد). با انتگرال‌گیری نسبت به y داریم

$$\begin{aligned}
A&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,dy\right]dx\\
&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{y}{f(x)}\right)\Bigg|_{y=-f(x)}^{f(x)}\right]dx\\
&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)dx\\
&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

که همان فرمول مساحت رویه دوران یافته در ریاضی ۱ است.

انتگرال سه‌گانه

ایده‌های اساسی مطرح شده در بخش‌های قبل را می‌توان به سادگی از انتگرال‌های دوگانه به انتگرال‌های سه‌گانه تعمیم داد. مانند انتگرال‌های دوگانه، یکی از مفیدترین روش‌های محاسبه انتگرال، تبدیل آن به انتگرال‌های مکرر است.