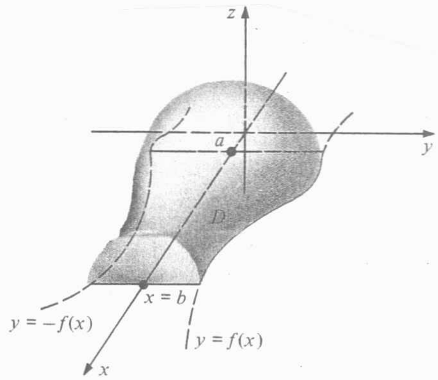


شکل ۴۳

مشتقات جزئی تابع g را بدست می‌آوریم

$$g_x(x,y)=\frac{f'(x)\,f(x)}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,,\qquad g_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}$$

بنابراین مساحت رویه عبارت است از

$$A=2\int_a^b\int_{-f(x)}^{f(x)} f(x)\sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)^2-y^2}}\,dy\,dx$$

(ضریب 2 به خاطر این است که نصف رویه زیر صفحه xy قرار دارد). با انتگرال‌گیری نسبت به y داریم

$$\begin{aligned}
A&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,dy\right]dx\\
&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{y}{f(x)}\right)\Big|_{y=-f(x)}^{f(x)}\right]dx\\
&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)dx\\
&=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

که همان فرمول مساحت رویه دوار یافته در ریاضی ۱ است.

انتگرال سه‌گانه

ایده‌های اساسی مطرح شده در بخش‌های قبل را می‌توان به سادگی از انتگرال‌های دوگانه به انتگرال‌های سه‌گانه تعمیم داد. مانند انتگرال‌های دوگانه، یکی از مفیدترین روش‌های محاسبه انتگرال، تبدیل آن به انتگرال‌های مکرر است.

تعریف ۱۷. یک مکعب مستطیل W در فضا شامل تمام x، y و z هایی است که $a \le x \le b$، $c \le y \le d$ و $p \le z \le q$ و آن را با $W=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ نمایش می‌دهیم. (شکل ۴۴)

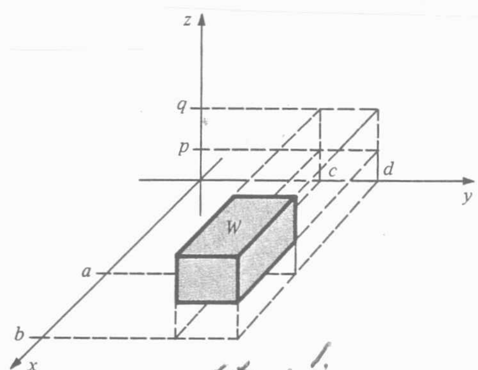
درون W شامل x، y و z هایی است که $a<x<b$، $c<y<d$ و $p<z<q$ و آن را یک مکعب مستطیل باز نامیده و با $(a,b)\times(c,d)\times(p,q)$ نمایش می‌دهیم.

$$\text{int}(W)=\{(x,y,z)\mid a<x<b,\ c<y<d,\ p<z<q\}$$

حجم مکعب مستطیل W برابر $(b-a)(d-c)(q-p)$ است. پس

$$V(W)=\text{حجم}(W)=(b-a)(d-c)(q-p)=\text{حجم}(\text{int}\,W)=V(\text{int}(W))$$

برای راحتی، معمولاً بجای مکعب مستطیل از کلمه جعبه استفاده می‌کنیم.



شکل ۴۴

برای رسیدن به تعریف مناسبی جهت انتگرال سه‌گانه $\iiint_W f(x,y,z)\,dV=\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ ابتدا مفهوم یک تابع پله‌ای از سه متغیر را بیان می‌کنیم.

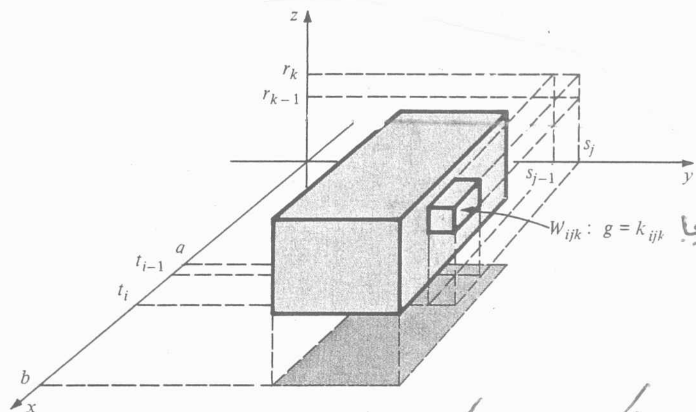
تعریف ۱۸. گوییم تابع $g(x,y,z)$ تعریف شده بر $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ یک تابع پله‌ای است، هرگاه افرازهای

$[a,b]$ از $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$

$[c,d]$ از $c=s_0<s_1<\dots<s_m=d$

$[p,q]$ از $p=r_0<r_1<\dots<r_l=q$

وجود داشته باشد به طوری که g روی هر یک از جعبه‌های باز $W_{ijk}=(t_{i-1},t_i)\times(s_{j-1},s_j)\times(r_{k-1},r_k)$ دارای مقدار ثابت K_{ijk} باشد. در شکل (۴۵) نمودار یک تابع پله‌ای در $\mathbb{R}^3$ نشان داده شده است.



شکل ۲۵ . g یک تابع پله‌ای است، مقدارش روی هر زیرجعبه ثابت است

تعریف ۱۹. مشابه همان روش تعریف انتگرال برای توابع پله‌ای یک متغیره، برای تابع پله‌ای g از سه متغیر x ، y ، z در تعریف ، انتگرال سه‌گانه g روی جعبه W را به فرم زیر تعریف می‌کنیم

$$\iiint_W g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i,j,k=1}^{n,m,l} (k_{ijk})(\text{volume } W_{ijk})$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} k_{ijk}(\Delta t_i)(\Delta s_j)(\Delta r_k)$$

حال روشی برای تعریف انتگرال یک تابع روی یک جعبه بسته با کمک توابع پله‌ای و انتگرال آنها ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲۰. فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ روی جعبه بسته W تعریف شده است و g تابعی پله‌ای تعریف شده روی W است به طوری که برای هر $(x,y,z)\in W$ ، $g(x,y,z)\le f(x,y,z)$. در این صورت $\iiint_W g\,dV$ را یک جمع پایینی برای f روی W نامیم. اگر h تابعی پله‌ای تعریف شده روی جعبه بسته W باشد به طوری که برای هر $(x,y,z)\in W$ داشته باشیم $f(x,y,z)\le h(x,y,z)$ در این صورت $\iiint_W h\,dV$ را یک جمع بالایی برای f روی W نامیم.

اگر توابع g و h روی W توابعی پله‌ای باشند و برای هر $(x,y,z)\in W$

$$g(x,y,z) \le f(x,y,z) \le h(x,y,z)$$

در این صورت جمع پایینی $\iiint_W g\,dV$ کوچکتر یا مساوی جمع بالایی $\iiint_W h\,dV$ است. بنابراین اگر قرار دهیم

$L = \{ S\in\mathbb{R} \mid$ یک جمع پایینی برای تابع f روی W باشد S $\}$

$= \{ S\in\mathbb{R} \mid S=\iiint_W g\,dV,\ g\le f$ و تابع پله‌ای g روی W وجود دارد به طوری که روی W ، $\}$

$\mathcal{U} = \{ S \in \mathbb{R} \mid$ S یک جمع بالایی برای تابع f روی جعبه W است $\}$

$= \{ S \in \mathbb{R} \mid S = \iiint_W h\,dV$ تابع پله‌ای h روی W وجود دارد به طوری که روی W، $f \leq h$ و $\}$

در این صورت هر عضو مجموعه $\mathcal{L}$ یک کران پایینی مجموعه $\mathcal{U}$ است و هر عضو مجموعه $\mathcal{U}$ یک کران بالایی مجموعه $\mathcal{L}$ است. حال طبق اصل موضوع تمامیت (کامل بودن $\mathbb{R}$) مجموعه $\mathcal{L}$ دارای کوچکترین کران بالا و مجموعه $\mathcal{U}$ دارای بزرگترین کران پایین است. یعنی $\sup_{S \in \mathcal{L}} S$ و $\inf_{S \in \mathcal{U}} S$ وجود دارند.

تعریف ۲۱. برای تابع سه متغیره f تعریف شده بر جعبه بسته W، عدد $\sup_{S \in \mathcal{L}} S$ را انتگرال پایینی f روی W نامیم و با $\underline{\iiint}_W f\,dV = \sup_{S \in \mathcal{L}} S$ نشان می‌دهیم و عدد $\inf_{S \in \mathcal{U}} S$ را انتگرال بالایی f روی W نامیم و با $\overline{\iiint}_W f\,dV = \inf_{S \in \mathcal{U}} S$ نشان می‌دهیم.

توضیح. باید دقت کرد که در تمام کتاب حاضر، فرض کرانداری تابع f بر جعبه بسته W برقرار است، حتی اگر به طور صریح ذکر نشده باشد.

تعریف ۲۲. فرض کنید تابع f از سه متغیر کراندار بوده و بر جعبه مستطیلی بسته W تعریف شده است. گوییم تابع f بر W انتگرال‌پذیر است هرگاه $\underline{\iiint}_W f\,dV = \overline{\iiint}_W f\,dV$. به عبارت دیگر گوییم f روی W انتگرال‌پذیر است، هرگاه عدد S_0 وجود داشته باشد به طوری که هر عدد S با $S < S_0$ یک جمع پایینی برای f روی W بوده و هر عدد S با $S > S_0$ یک جمع بالایی باشد. عدد S_0 را انتگرال تابع f روی W نامیده و با $S_0 = \iiint_W f(x,y,z)\,dV$ نشان می‌دهیم.

در این لحظه، می‌توانید به خواص اساسی انتگرال‌های دوگانه ثابت شده در قضیه ۷ برگردید. خواص مشابهی برای انتگرال‌های سه‌گانه برقرار است. به طریق مشابه، می‌توان تبدیل انتگرال سه‌گانه به انتگرال‌های مکرر را مطرح کرد.

قضیه ۲۳. فرض کنید $f(x,y,z)$ روی جعبه $W=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ انتگرال‌پذیر است. در این صورت هر یک از انتگرال‌های مکرر موجود برابر با انتگرال سه‌گانه است یعنی

$$\begin{aligned}\iiint_W f(x,y,z)\,dV &= \int_p^q\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ &=\int_p^q\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz\\ &=\int_c^d\int_p^q\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy\\ &=\int_c^d\int_a^b\int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy\\ &=\int_a^b\int_p^q\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx\\ &=\int_a^b\int_c^d\int_p^q f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\end{aligned}$$

اثبات. اثبات این قضیه شبیه با قضیه ۸ در بخش اول است.

مثال ۲۴. الف) فرض کنید $W=[0,1]\times[-\frac{1}{2},0]\times[0,\frac{1}{3}]$ است. مطلوب است محاسبه

$$\iiint_W (x+2y+3z)^2\,dx\,dy\,dz$$

ب) پاسخ خود را با حالتی که ابتدا برحسب y، بعد برحسب z و سپس برحسب x انتگرال‌گیری می‌کنید، مقایسه نمایید.

حل. الف) با توجه به قضیه (۲۳) انتگرال را می‌توان محاسبه کرد.

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3}\int_{-1/2}^{0}\int_0^1 (x+2y+3z)^2\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{1/3}\int_{-1/2}^{0}\left[\frac{1}{3}(x+2y+3z)^3\right]_{x=0}^{1} dy\,dz\\ &=\int_0^{1/3}\int_{-1/2}^{0}\frac{1}{3}\left[(1+2y+3z)^3-(2y+3z)^3\right]dy\,dz\\ &=\int_0^{1/3}\frac{1}{24}\left[(1+2y+3z)^4-(2y+3z)^4\right]_{y=-1/2}^{0} dz\\ &=\int_0^{1/3}\frac{1}{24}\left[(3z+1)^4-2(3z)^4+(3z-1)^4\right]dz\\ &=\frac{1}{24\times 25}\left[(3z+1)^5-2(3z)^5+(3z-1)^5\right]_{z=0}^{1/3}\\ &=\frac{1}{24\times 25}(2^5-2)=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

ب) $$\iiint_W (x+2y+3z)^2\,dy\,dz\,dx=\int_0^1\int_0^{1/3}\int_{-1/2}^{0}(x+2y+3z)^2\,dy\,dz\,dx$$
$$=\int_0^1\int_0^{1/3}\left[\frac{1}{6}(x+2y+3z)^3\right]_{y=-1/2}^{0}dz\,dx$$
$$=\int_0^1\int_0^{1/3}\frac{1}{6}\left[(x+3z)^3-(x+3z-1)^3\right]dz\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\left((x+3z)^4-(x+3z-1)^4\right)\right]_{z=0}^{1/3}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{72}\left[(x+1)^4+(x-1)^4-2x^4\right]dx$$
$$=\frac{1}{72}\cdot\frac{1}{5}\left[(x+1)^5+(x-1)^5-2x^5\right]_{x=0}^{1}=\frac{1}{12}$$

مثال ۲۵. انتگرال تابع e^{x+y+z} روی جعبه مکعبی $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ را بدست آورید.

حل.
$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^1\left(e^{x+y+z}\Big|_{x=0}^{1}\right)dy\,dz$$
$$=\int_0^1\int_0^1\left(e^{1+y+z}-e^{y+z}\right)dy\,dz$$
$$=\int_0^1\left[e^{1+y+z}-e^{y+z}\right]_{y=0}^{1}dz$$
$$=\int_0^1\left[e^{2+z}-2e^{1+z}+e^{z}\right]dz$$
$$=\left[e^{2+z}-2e^{1+z}+e^{z}\right]_0^1$$
$$=e^3-3e^2+3e-1=(e-1)^3.$$

انتگرال سه گانه f روی ناحیه های کلی.

مشابه حالت دو متغیره، فرض کنید تابع f از سه متغیر x، y و z روی ناحیه کراندار W در $\mathbb{R}^3$ تعریف شده و کراندار است. چون W کراندار است، می توان آن را درون یک مکعب مستطیل W^* درنظر گرفت. تابع f از W را به تابع f^* روی W^* توسیع می دهیم.

$$f^*(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z)\in W\\ 0 & (x,y,z)\in W^*-W\end{cases}$$

حال انتگرال تابع f^* روی جعبه W^* طبق قضیه ۲۳ به انتگرال سه گانه مکرر در صورت وجود انتگرال قابل تبدیل است.

در ضمن انتگرال تابع f روی W در صورت وجود، مستقل از انتخاب W^* و توسیع f^* است. زیرا اگر W^{**} مکعب مستطیل دیگری شامل W باشد و تابع f^{**} به صورت

$$f^{**}(x,y,z)=\begin{cases}(x,y,z) & (x,y,z)\in W\\ 0 & (x,y,z)\in W^{**}\setminus W\end{cases}$$

توسیع یابد، آن گاه با توجه به خواص انتگرال و با در نظر گرفتن $W^*=W\cup(W^*\setminus W)$ و $W^{**}=W\cup(W^{**}\setminus W)$

$$\begin{aligned}\iiint_{W^{**}} f^{**}(x,y,z)\,dV &= \iiint_{W} f^{**}(x,y,z)\,dV+\iiint_{W^{**}\setminus W} f^{**}(x,y,z)\,dV\\ &= \iiint_{W} f(x,y,z)\,dV+\iiint_{W^{**}\setminus W} 0\,dV\\ &= \iiint_{W} f(x,y,z)\,dv\\ &= \iiint_{W} f(x,y,z)\,dV+\iiint_{W^{*}\setminus W} 0\,dV\\ &= \iiint_{W} f^{*}(x,y,z)\,dV+\iiint_{W^{*}\setminus W} f^{*}(x,y,z)\,dv\\ &= \iiint_{W^{*}} f^{*}(x,y,z)\,dV\end{aligned}$$

حال اگر تابع f^* به مفهوم بیان شده در تعریف (۲۲) روی مکعب مستطیل W^* انتگرال پذیر باشد، در این صورت تابع f روی W انتگرال پذیر است و

$$\begin{aligned}\iiint_{W} f(x,y,z)\,dV &= \iiint_{W} f(x,y,z)\,dV+\iiint_{W^{*}\setminus W} 0\,dV\\ &= \iiint_{W} f^{*}(x,y,z)\,dV+\iiint_{W^{*}\setminus W} f^{*}(x,y,z)\,dz\\ &= \iiint_{W^{*}} f^{*}(x,y,z)\,dV\end{aligned}$$

که در آن $\iiint_{W^*} f^*(x,y,z)\,dV$ انتگرال تابع f^* روی مکعب مستطیل W^* است و طبق قضیه ۲۴ قابل تبدیل به انتگرال های مکرر می باشد.

برای رسیدن به روشهای محاسبه انتگرال سه‌گانه تابع f روی ناحیه کراندار W در $\mathbb{R}^3$، توجه خود را به ناحیه های ساده در فضا معطوف می کنیم.

تعریف ۲۴. یک ناحیه سه بعدی کراندار W را ناحیه‌ای از نوع I نامیم، هرگاه ناحیه

فرض کنید D در صفحه xy و زوج توابع پیوسته $\gamma_1(x,y)$ و $\gamma_2(x,y)$ تعریف شده روی D وجود داشته باشند به طوری که

$$W=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ \gamma_1(x,y)\le z\le \gamma_2(x,y)\}$$

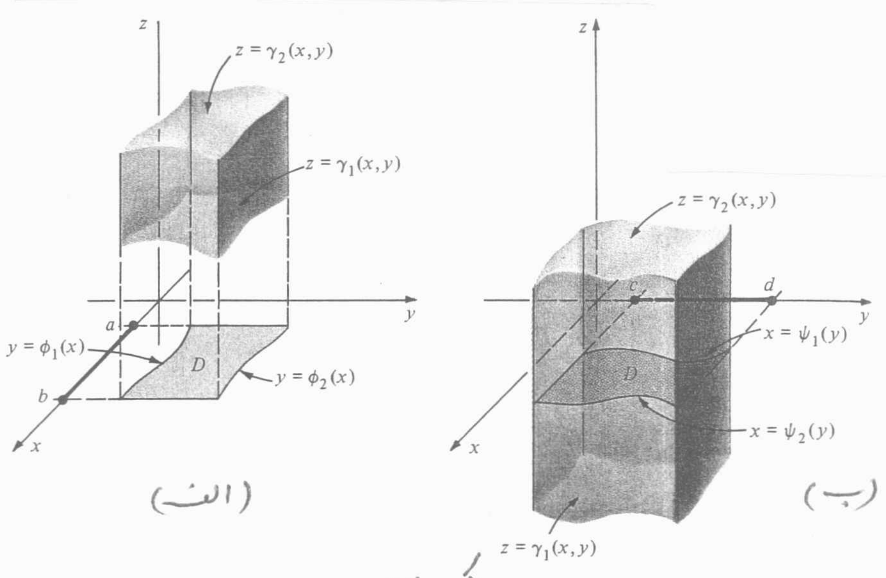
از طرفی ناحیه D در صفحه xy می‌تواند از نوع ۱ یا نوع ۲ باشد، پس دو امکان برای توصیف یک ناحیه از نوع I در فضا وجود دارد:

$$a\le x\le b,\quad \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\quad \gamma_1(x,y)\le z\le \gamma_2(x,y) \qquad (۲۹)$$

یا

$$c\le y\le d,\quad \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\quad \gamma_1(x,y)\le z\le \gamma_2(x,y) \qquad (۳۰)$$

شکل ۴۶ دو ناحیه از نوع I که با (۲۹) و (۳۰) شرح داده شده است، را نمایش می‌دهد.



شکل ۴۶

تعریف ۲۵. گوییم ناحیه کراندار W از نوع II است، هرگاه بتوان آن را به صورت زیر شرح داد

$$p\le z\le q,\quad \psi_1(z)\le y\le \psi_2(z),\quad \rho_1(y,z)\le x\le \rho_2(y,z) \qquad (۳۱)$$

یا

$$c\le y\le d,\quad \eta_1(y)\le z\le \eta_2(y),\quad \rho_1(y,z)\le x\le \rho_2(y,z) \qquad (۳۲)$$

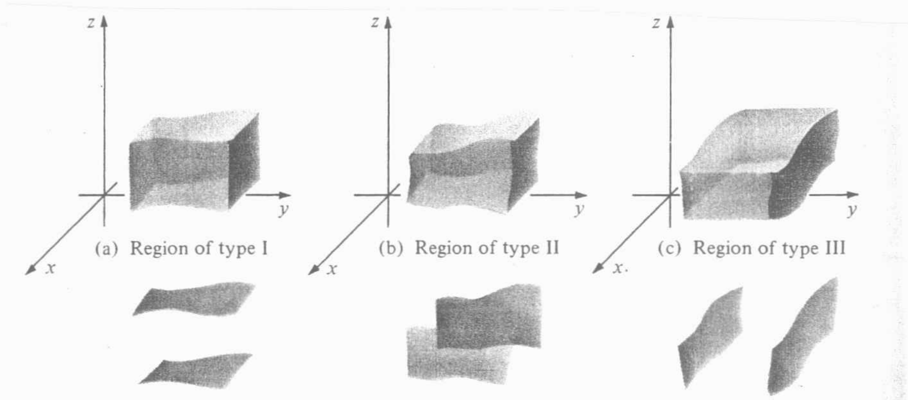
و از نوع III است، هرگاه

$$a\le x\le b,\qquad \theta_1(x)\le z\le \theta_2(x),\qquad \delta_1(x,z)\le y\le \delta_2(x,z) \tag{۳۳}$$

یا

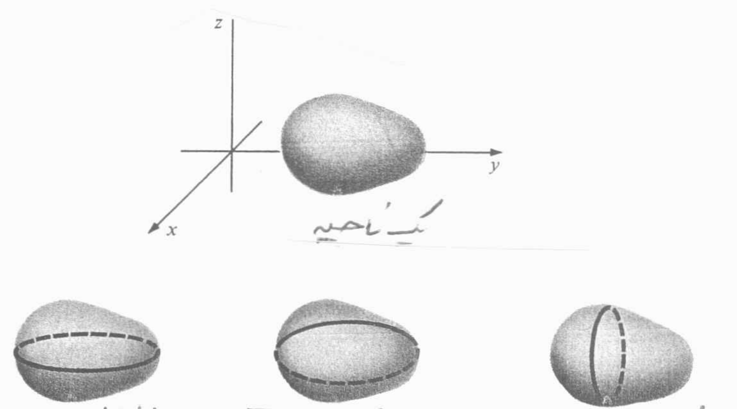
$$p\le z\le q,\qquad \alpha_1(z)\le x\le \alpha_2(z),\qquad \delta_1(x,z)\le y\le \delta_2(x,z) \tag{۳۴}$$

به شکل ۴۷ توجه کنید.



شکل ۴۷

باید توجه داشت که یک ناحیه داده شده، می‌تواند به طور همزمان از دو یا حتی سه نوع باشد (شکل ۴۸). همانند نواحی در صفحه، ناحیه‌های نوع I، II و III در فضا را انواع مقدماتی نامیم.



شکل ۴۸

مثال ۳۶. $\iiint_W z\,dV$ را محاسبه کنید که در آن W هرم محدود به چهار صفحه $x=0$، $y=0$، $z=0$ و $x+y+z=1$ است.

حل. در نمودار در شکل ۴۹ رسم کرده‌ایم، یکی جسم W در فضا و یکی تصویر D آن بر صفحه xy است. مرز پایینی هرم صفحه $z=0$ و مرز بالایی آن صفحه $x+y+z=1$ (یا $z=1-x-y$) است. پس $\gamma_1(x,y)=0$ و $\gamma_2(x,y)=1-x-y$ می‌باشد و ناحیه از نوع I است. توجه داریم

فصل مشترک صفحات $x+y+z=1$ و $z=0$ خط $x+y=1$ یا $y=1-x$ است. پس تصویر W ناحیه مثلثی نشان داده شده در شکل ۴۹ (ب) می‌باشد و داریم

$$W=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1-x,\quad 0\le z\le 1-x-y\}$$

که مطابق شرط (۲۹) ناحیه‌ای از نوع I در فضا و نوع ۱ در صفحه است. پس

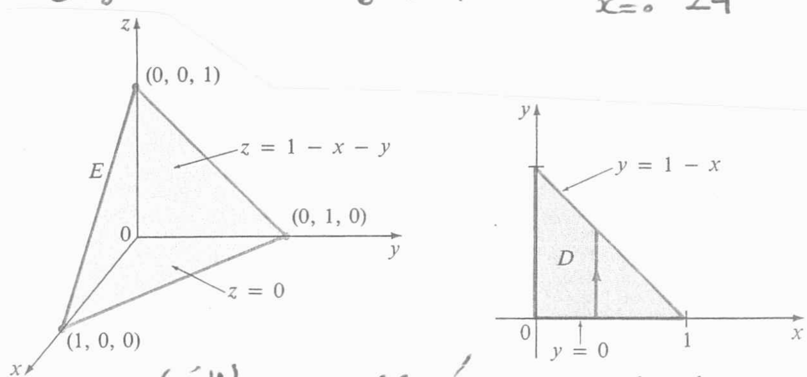
$$\iiint_W z\,dV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-x-y}dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3\right]_{y=0}^{1-x}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\,dx=\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_{x=0}^{1}=\frac{1}{24}$$



(الف) شکل ۴۹ (ب)

مثال ۳۷. مطلوب است محاسبه $\iiint_W \sqrt{x^2+z^2}\,dV$ که در آن W ناحیه محدود به سهمی‌گون $y=x^2+z^2$ و صفحه $y=4$ است.

حل. جسم W در شکل ۵۰ (الف) نمایش داده شده است. اگر آن را به عنوان ناحیه نوع I در نظر بگیریم آنگاه باید تصویر D_1 بروی صفحه xy را که یک ناحیه محصور به سهمی است اختیار کنیم (شکل ۵۰ (ب)). اثر $y=x^2+z^2$ در صفحه $z=0$ سهمی $y=x^2$ است. از $y=x^2+z^2$ داریم $z=\pm\sqrt{y-x^2}$ پس رویه پایینی W تابع $z=-\sqrt{y-x^2}$ و رویه بالایی $z=\sqrt{y-x^2}$ است. پس توصیف W به عنوان ناحیه نوع I به صورت زیر است.

$$W=\{(x,y,z)\mid -2\le x\le 2,\ x^2\le y\le 4,\ -\sqrt{y-x^2}\le z\le\sqrt{y-x^2}\}$$

گرچه این عبارت صحیح است، اما محاسبه انتگرال

$$\iiint_W \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

بسیار سخت است. ناحیه را از نوع III در نظر می‌گیریم. تصویر D_3 ناحیه بر روی صفحه xz یک دایره به صورت $x^2+z^2\le 4$ است. همان‌گونه که در شکل ۵۰ (ج) نشان داده شده است. مرز سمت چپ W سهمی‌گون $y=x^2+z^2$ است و مرز سمت راست صفحه $y=4$ می‌باشد، پس با انتخاب $\delta_1(x,z)=x^2+z^2$ و $\delta_2(x,z)=4$ داریم

$$\iiint_W \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \iint_{D_3}\left[\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right]dA$$

$$= \iint_{D_3}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA$$

گرچه این انتگرال را می‌توان به صورت

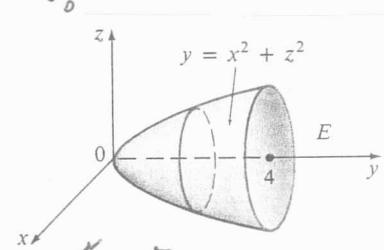
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dx$$

نوشت و آن را محاسبه کرد، بهتر است انتگرال دوگانه را به مختصات قطبی در صفحه xz تبدیل کنیم: با $x=r\cos\theta$، $z=r\sin\theta$ داریم

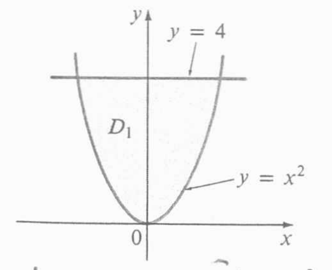
$$\iiint_W \sqrt{x^2+z^2}\,dV = \iint_{D_3}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r^2)\,r\,r\,dr\,d\theta$$

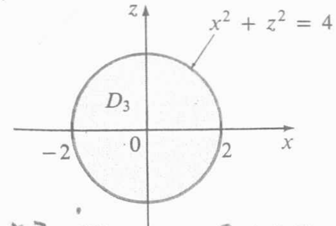
$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}(4r^2-r^4)\,dr = 2\pi\left[\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$



الف) ناحیه انتگرال‌گیری



ب) تصویر روی صفحه xy



ج) تصویر روی صفحه xz

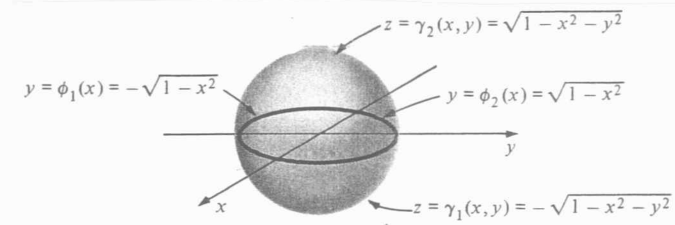
شکل ۵۰

مثال ۳۸. نشان دهید گوی یکه $x^2+y^2+z^2\le 1$ ناحیه‌ای از نوع سه است.

حل. به عنوان یک ناحیه از نوع I، داریم

$$-1\le x\le 1,\quad -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2},\quad -\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}$$

برای انجام این منظور، ابتدا نیم کره های بالایی و پایینی را نوشته‌ام: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ که در آن x، y روی قرص یکه تغییر می‌کنند (یعنی x بین ۱- و ۱ و y بین $-\sqrt{1-x^2}$ و $\sqrt{1-x^2}$). شکل ۵۱ را ببینید. برای نوشتن ناحیه به عنوان ناحیه نوع II و ناحیه نوع III به طریق مشابه با تغییر نقش x، y و z در فرمولهای (۳۰)، (۳۱)، (۳۲)، (۳۴) می‌توان عمل کرد.



شکل ۵۱

مثال ۳۹. حجم یک گوی به شعاع ۱ را به دست آورید.

حل. فرض کنید

$$W=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

باید $\iiint_W dx\,dy\,dz$ را به دست آوریم. طبق مثال ۳۸، گوی یکه را به عنوان ناحیه‌ای از نوع I اختیار می‌کنیم، طبق فرمول (۲۹) داریم

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

x و y را ثابت در نظر گرفته و نسبت به z انتگرال می‌گیریم داریم

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[z\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]dy\,dx$$

$$=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{1/2}\,dy\,dx$$

چون x در انتگرال نسبت به y ثابت در نظر گرفته می‌شود، انتگرال را می‌توان به صورت $\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)^{1/2}dy$ در نظر گرفت که در آن $a=(1-x^2)^{1/2}$. این انتگرال نشان دهندهٔ مساحت یک نیم دایره به

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

شعاع a است، پس

$$\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)^{1/2}dy=\frac{a^2}{2}\pi$$

بنابراین

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{1/2}dy=\frac{1-x^2}{2}\pi$$

و در نتیجه

$$2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{1/2}dy\,dx=2\int_{-1}^{1}\pi\frac{1-x^2}{2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)dx=\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{1}=\frac{4}{3}\pi$$

مثال ۴. فرض کنید W ناحیه محصور به صفحات $x=0$، $y=0$، و $z=2$ و رویه $z=x^2+y^2$ است. مطلوب است $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ و نمودار رویه را رسم کنید.

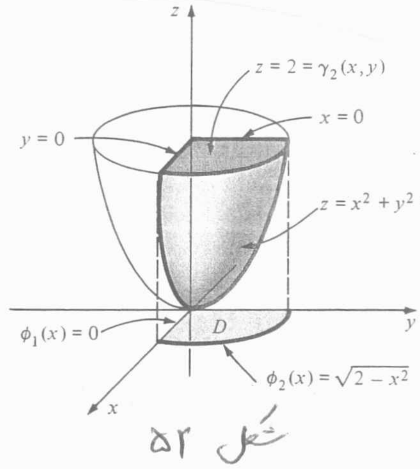
حل. روش ۱: ناحیه در شکل ۵۲ رسم شده است. این ناحیه را می‌توان به صورت ناحیه نوع I با $\gamma_1(x,y)=x^2+y^2$ و $\gamma_2(x,y)=2$، $\varphi_1(x)=0$، $\varphi_2(x)=\sqrt{2-x^2}$، $a=0$ و $b=\sqrt{2}$ در نظر گرفت. پس

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2}x\,dz\right)dy\right]dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}x(2-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}x\left[(2-x^2)^{3/2}-\frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2}\right]dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{3}(2-x^2)^{3/2}dx=\frac{8\sqrt{2}}{13}$$



شکل ۵۲

روش ۲. می‌توان ناحیه را به عنوان مجموعه تمام (x,y,z) هایی در نظر گرفت که

$$\rho_1(z,y)=0 \le x \le (z-y^2)^{1/2}=\rho_2(x,y), \qquad (z,y)\in D$$

که در آن D زیرمجموعه‌ای از صفحه yz با $0\le z\le 2$ و $0\le y\le z^{1/2}$ است (شکل ۵۳). بنابراین

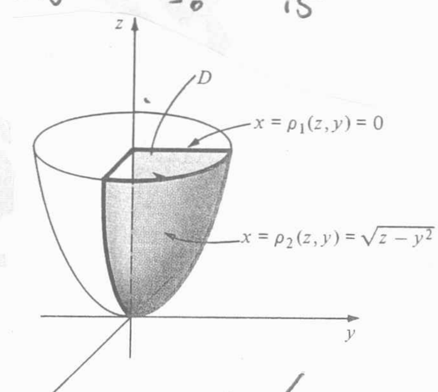
$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz=\iint_D\left(\int_{\rho_1(z,y)}^{\rho_2(z,y)} x\,dx\right)dy\,dz$$

$$=\int_0^2\left[\int_0^{z^{1/2}}\left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x\,dx\right)dy\right]dz$$

$$=\int_0^2\int_0^{z^{1/2}}\left(\frac{z-y^2}{2}\right)dy\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(z^{3/2}-\frac{z^{3/2}}{3}\right)dz=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2}{3}z^{3/2}\,dz$$

$$=\left[\frac{2}{15}z^{5/2}\right]_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{15}.$$



شکل ۵۳

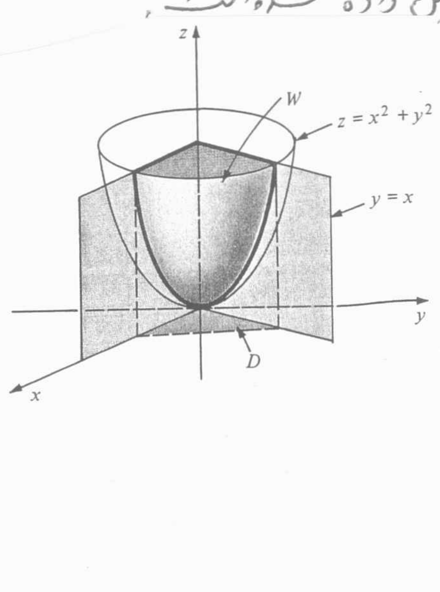
مثال ۴۱. مطلوب است $\int_0^1\int_0^x\int_{x^2+y^2}^1 dz\,dy\,dx$. نمودار ناحیه W را رسم کنید.

حل.

$$\int_0^1\int_0^x\int_{x^2+y^2}^1 dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^x(1-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left(x-x^3-\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

نمودار W در شکل ۵۴ نمایش داده شده است.



شکل ۵۴

انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی.

قبل از ورود به بحث انتگرال‌های سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی، ابتدا جهت یادآوری مطالب بخش ، انتگرال دوگانه در مختصات قطبی، به مثال‌های زیر توجه می‌کنیم.

مثال ۴۲. مطلوب است محاسبه $\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ که در آن D_a قرص $x^2+y^2\le a^2$ است.

حل. عبارت $r^2=x^2+y^2$ در زیر نشانه انتگرال و تقارن قرص، تغییر متغیر در مختصات قطبی را ایجاب می‌کند. قرص مورد نظر در مختصات قطبی به فرم $0\le r\le a$ و $0\le\theta\le 2\pi$ است. پس

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a d\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(e^{-a^2}-1\right)d\theta=\pi\left(1-e^{-a^2}\right).$$

نکته قابل توجه‌ای از نتیجه مثال ۱ در ریاضی عمومی ۱ که می‌توان در نظر گرفت چنین است که: مایل هستیم انتگرال گاوس $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ را که نقش اساسی در نظریه احتمالات و مکانیک کوانتمی بعهده دارد محاسبه کنیم. می‌دانیم که از روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره نمی‌توان این انتگرال را به طور مستقیم به دست آورد. اگر از انتگرال دوگانه استفاده کنیم، این انتگرال بسیار ساده می‌باشد. فرض کنید در $\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\pi(1-e^{-a^2})$ عدد a به ∞ میل کند، در این صورت $\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ موجود و برابر π است. با توجه به تعریف انتگرال ناسره روی خط، می‌توانیم حد را به عنوان انتگرال ناسره تابع $e^{-(x^2+y^2)}$ روی تمام صفحه در نظر بگیریم زیرا قرص‌های D_a وقتی $a\to\infty$ تمام صفحه را در نظر می‌گیرند. مستطیل‌های $R_a=[-a,a]\times[-a,a]$ نیز می‌توانند رشد کرده و تمام صفحه شوند. داریم

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\pi$$

اما

$$\iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy$$
$$=\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy\right)=I_a^2$$

که در آن $I_a=\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$. بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\lim_{a\to\infty} I_a=\left(\lim_{a\to\infty} I_a^2\right)^{1/2}=\left(\lim_{a\to\infty}\iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\right)^{1/2}=\sqrt{\pi}$$

انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ را انتگرال گاوس نامیده می‌شود.

مثال ۴۳. مطلوب است $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx$.

حل. با استفاده از تغییر متغیر $y=\sqrt{2}\,x$، انتگرال فوق به انتگرال گاوس تبدیل می‌شود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}dx=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-2x^2}dx=\lim_{a\to\infty}\int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

مثال ۴۴. $\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dA$ را به دست آورید که در آن D ناحیه‌ای در ربع اول بین دوایر $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است.

حل. در مختصات قطبی، D مجموعه نقاط (r,θ) است به طوری که $1<r<2$ و $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.
بنابراین

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=1}^{2}\ln(r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_1^2 2(\ln r)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^2}{2}(2\ln r-1)\Big|_{r=1}^{2}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)d\theta=\frac{\pi}{2}\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right).$$

مثال ۴۵. ثابت کنید $\lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\lim_{a\to\infty}\iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ که در آن D_a قرص بسته $x^2+y^2\le a^2$ و R_a مستطیل $[-a,a]\times[-a,a]$ است.

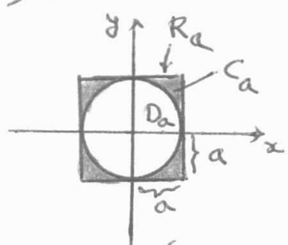
حل. کافی است ثابت کنیم

$$\lim_{a\to\infty}\left(\iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy-\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\right)=0$$

حد فوق برابر $\lim_{a\to\infty}\iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$ است که در آن C_a ناحیه بین R_a و D_a (شکل ۵۵)

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

است، در ناحیه C_a ، $\sqrt{x^2+y^2} \geq a$ (شعاع D_a ، a) پس $e^{-(x^2+y^2)} \leq e^{-a^2}$. بنابراین



شکل ۵۵

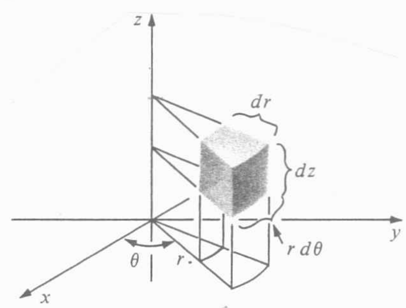
$$0 \leq \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \iint_{C_a} e^{-a^2}\,dx\,dy$$
$$= e^{-a^2}(\text{مساحت } C_a) = e^{-a^2}(4a^2-\pi a^2)$$
$$=(4-\pi)\,a^2 e^{-a^2}$$

پس کافی است نشان دهیم $\lim_{a\to\infty} a^2 e^{-a^2} = 0$. طبق قانون هوپیتال

$$\lim_{a\to\infty} a^2 e^{-a^2} = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{a^2}{e^{a^2}}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{2a}{2a e^{a^2}}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^{a^2}}\right) = 0$$

و حکم حاصل می‌شود.

انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای ۲۶. می‌دانیم که مختصات استوانه‌ای در فضا با مختصات قطبی در صفحه xy یکسان است و در این حالت تنها مختص z را از مختصات دکارتی داریم. بنابراین عنصر حجم بسیار کوچک دارای حجم $r\,dr\,d\theta\,dz$ است (شکل ۵۶).



شکل ۵۶

بنابراین، همانند مختصات قطبی انتگرال‌های دوگانه، فرمول زیر برای انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای را داریم

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz \qquad (۲۵)$$

که در آن W' ناحیه در مختصات r,θ,z برای ناحیه W در دستگاه دکارتی است.

مثال ۴۶. مطلوب است $\iiint_W (z^2x^2+z^2y^2)\,dV$ که در آن W ناحیه استوانه‌ای تعیین شده توسط $x^2+y^2 \leq 1$ و $-1 \leq z \leq 1$ است.

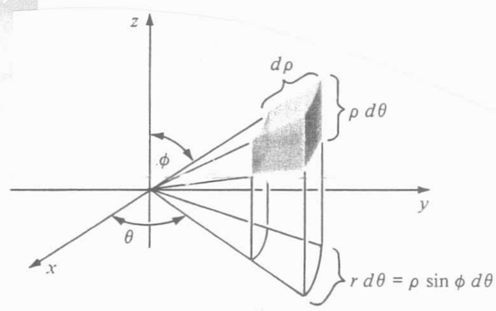
حل. طبق فرمول (۳۵) داریم

$$\iiint_W (z^2x^2+z^2y^2)\,dV = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(z^2r^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} z^2\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{1}\,d\theta\,dz$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{2\pi}{4}z^2\,dz = \frac{\pi}{3}$$

انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی ۲۷. حجم در فضا متناظر به ذره بی‌نهایت کوچک حجم جسمی با ابعاد $d\rho$، $d\theta$ و $d\phi$ نشان داده شده در شکل (۵۷) را در نظر بگیرید. ابعاد این جعبه به طول‌های $d\rho$، $r\,d\theta$ $(=\rho\sin\phi\,d\theta)$ و $\rho\,d\phi$ در شکل است. بنابراین حجم $\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ می‌باشد و داریم

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV = \iiint_{W^*} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \qquad (۳۶)$$

که در آن W^* ناحیه‌ای در فضای $\rho\theta\phi$ متناظر به W است. یعنی حدود ρ، θ، ϕ را چنان انتخاب می‌کنیم که ناحیه W در فضای xyz باشد.



شکل ۵۷

مثال ۴۷. حجم کره $x^2+y^2+z^2\le R^2$ را با استفاده از مختصات کروی به دست آورید.

حل. کره مورد نظر در مختصات کروی به صورت $0\le\theta\le 2\pi$ ، $0\le\phi\le\pi$ و $0\le\rho\le R$ است.

پس از فرمول (۳۶) داریم

$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$
$$= \frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\theta\,d\phi$$
$$= \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi = \frac{2\pi R^3}{3}\left(-[\cos(\pi)-\cos(0)]\right)$$
$$= \frac{4\pi R^3}{3}.$$

مثال ۴۸. مطلوب است محاسبه $\iiint_W \exp[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]\,dx\,dy\,dz$ که در آن W گوی یکه است. یعنی مجموعه تمام (x,y,z) هایی که $x^2+y^2+z^2\le 1$.

حل. در مختصات کروی W توسط

$$0\le\rho\le 1,\qquad 0\le\varphi\le\pi,\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

به دست می‌آید. بنابراین

$$\iiint_W \exp[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \exp(\rho^3)\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\exp(\rho^3)\Big|_0^1\right)\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e-1)\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\frac{1}{3}(e-1)\int_0^{2\pi}(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}(e-1)\int_0^{2\pi}2\,d\theta=\frac{2}{3}(e-1)(2\pi-0)=\frac{4\pi}{3}(e-1).$$

مثال ۴۹. حجم ناحیه محصور به استوانه دایره‌ای $r=2a\cos\theta$، مخروط $z=r$ و صفحه $z=0$ را به دست آورید.

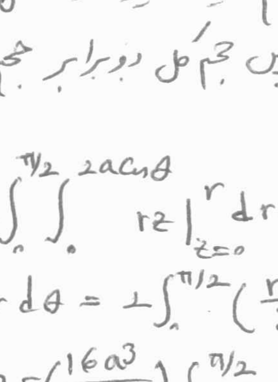
حل. چون $r=2a\cos\theta$ را می‌توان به صورت $r^2=2ax$ یا $(x-a)^2+y^2=a^2$ نوشت، دیده می‌شود که قاعده جسم یک دایره در صفحه xy به مرکز $(a,0)$ و شعاع a است. صفحه xz یک صفحه تقارن است. این حجم کل دو برابر حجم روی ناحیه سایه خورده است. در مختصات استوانه‌ای حجم کل برابر است با

$$V=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} rz\Big|_{z=0}^{r}dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{2a\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{8a^3\cos^3\theta}{3}\,d\theta=\left(\frac{16a^3}{3}\right)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{32a^3}{9}.$$



شکل ۵۸

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

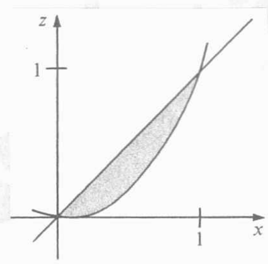
مثال ۵۰. حجم جسم کراندار به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و سهمی‌گون دوران یافته $z=x^2+y^2$ را بدست آورید.

حل. در مختصات استوانه‌ای جسم به $z=r$, $z=r^2$ محصور است (شکل ۵۹). جسم از دوران مساحت سایه خورده در شکل حول محور zها حاصل می‌شود. بنابراین

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(rz\Big|_{z=r^2}^{r}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2-r^3)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{z=0}^{1}d\theta=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{6}$$



شکل ۵۹

مثال ۵۱. مطلوبست حجم جسم محصور به $y=x^2$ ، $y=x+2$ ، $4z=x^2+y^2$ و $z=x+3$.

حل. نیازی به محاسبه در انتگرال‌های استوانه‌ای یا کروی نیست. معادله $y=x^2=x+2$ دارای جواب‌های $x=-1$ و $x=2$ است. پس

$$V=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\int_{(x^2+y^2)/4}^{x+3}dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\left[(x+3)-\frac{x^2+y^2}{4}\right]dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\left[\left(x+3-\frac{x^2}{4}\right)y-\frac{y^3}{12}\right]\right)\Big|_{y=x^2}^{x+2}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(\frac{16}{3}+4x-3x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{12}\right)dx$$

$$=\left(\frac{16x}{3}+2x^2-x^3-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{84}\right)\Big|_{x=-1}^{2}$$

$$=\frac{783}{70}$$

کاربردهای انتگرال سه‌گانه

کاربردهایی از انتگرال سه‌گانه که مشابه به کاربردهای انتگرال دوگانه است در زیر لیست شده است. حجم، جرم، مرکز جرم یک ناحیه با چگالی متغیر $\rho(x,y,z)$ فرمولهایی به صورت زیر دارند.

حجم $= \iiint_W dv =$ حجم جسم W در فضا

(۳۷) جرم $= \iiint_W \rho(x,y,z)\,dv =$ جرم جسم W با تابع چگالی $\rho(x,y,z)$

(۳۸) مرکز جرم $= (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ که در آن m جرم W است داریم

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x\rho(x,y,z)\,dv}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_W y\rho(x,y,z)\,dv}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_W z\rho(x,y,z)\,dv}{m}$$

مقدار متوسط تابع f روی ناحیه W توسط

$$\frac{\iiint_W f(x,y,z)\,dv}{\iiint_W dv} \qquad (۳۹)$$

تعریف می‌شود.

مثال ۵۲. مکعب $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ دارای چگالی جرم $\rho(x,y,z)=(1+x)e^z y$ است. مطلوب است جرم مکعب.

حل. جرم جعبه عبارت است از

$$m = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 (1+x)e^z y\,dx\,dy\,dz = \int_1^2\int_1^2 \Big[(x+\frac{x^2}{2})e^z y\Big]_{x=1}^{2} dy\,dz$$
$$= \int_1^2\int_1^2 \frac{5}{2}e^z y\,dy\,dz = \int_1^2 \frac{15}{4}e^z\,dz = \frac{15}{4}(e^2-e)$$

مثال ۵۳. مرکز جرم ناحیه نیم‌کروی W تعریف شده توسط $x^2+y^2+z^2 \le 1$ و $z \geq 0$ را بدست آورید. (فرض کنید چگالی ثابت است).

حل. به دلیل تقارن، مرکز جرم باید روی محور zها باشد پس $\bar{x}=\bar{y}=0$. برای یافتن $\bar{z}$ از فرمول (۳۸) باید مقدار $I=\iiint_W z\,dx\,dy\,dz$ را محاسبه کنیم. نیم‌کره از انواع I، II و III است. آن را از نوع II در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} z\,dx\,dy\,dz$$

چون z برای x و y ثابت است، پس

$$I=\int_0^1 z\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx\,dy\right)dz$$

بجای محاسبه دو انتگرال داخلی، توجه می‌کنیم که این دو انتگرال همان $\iint_D dx\,dy$ است که در آن

D قرص $x^2+y^2\le 1-z^2$ است. مساحت این قرص $\pi(1-z^2)$ است. پس

$$I=\pi\int_0^1 z(1-z^2)\,dz=\pi\int_0^1(z-z^3)\,dz=\pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

از طرفی حجم نیم کره $\frac{2\pi}{3}$ است. پس $\bar z=\frac{\pi/4}{2\pi/3}=\frac{3}{8}$، مختصات مرکز جرم $(0,0,\frac{3}{8})$ است.

شکل ۵۴. درجه حرارت در هر نقطه از مکعب $W=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ متناسب با مربع فاصله نقطه تا مبدأ است.

الف) درجه حرارت متوسط چقدر است؟

ب) در کدام نقاط از مکعب درجه حرارت برابر با حرارت متوسط است؟

حل. الف) فرض کنید c ثابت تناسب است. پس $T=c(x^2+y^2+z^2)$ و حرارت متوسط برابر $\bar T=\frac{1}{8}\iiint_W T\,dx\,dy\,dz$، زیرا حجم مکعب برابر 8 می‌باشد. پس

$$\bar T=\frac{c}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

انتگرال سه‌گانه جمع انتگرال‌های توابع x^2، y^2 و z^2 است. چون x، y و z در مکعب مورد نظر به طور متقارن هستند، پس سه انتگرال با هم مساوی‌اند. بنابراین

$$\bar T=\frac{3c}{8}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 z^2\,dx\,dy\,dz=\frac{3c}{8}\int_{-1}^1 z^2\left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1 dx\,dy\right)dz$$

انتگرال دوگانه داخلی برابر مساحت مربع $[-1,1]\times[-1,1]$ است، پس

$$\bar T=\frac{3c}{8}\int_{-1}^1 4z^2\,dz=c$$

ب) درجه حرارت برابر مقدار متوسط است هرگاه $c(x^2+y^2+z^2)=c$ یعنی روی کره $x^2+y^2+z^2=1$ که در مکعب محاط شده است.

مثال ۵۵. گشتاور اینرسی حول محور x ها برای جسم S با چگالی یکنواخت توسط

$$I_x = \iiint_S \rho\cdot(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \qquad (۴۰)$$

تعریف می‌شود، به طور مشابه

$$I_y = \iiint_S \rho\cdot(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad I_z = \iiint_S \rho\cdot(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \qquad (۴۱)$$

مقدار I_z را به دست آورید هرگاه جسم S دارای چگالی ثابت بوده و بالای صفحه xy به سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و استوانه $x^2+y^2=a^2$ محصور باشد.

حل. سهمی‌گون و استوانه یکدیگر را در صفحه $z=a^2$ قطع می‌کنند. با استفاده از مختصات استوانه‌ای داریم

$$I_z = \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{r^2} \rho r^2\cdot r\,dz\,d\theta\,dr = \rho\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{r^2} r^3\,dz\,d\theta\,dr = \frac{\pi\rho a^6}{3}$$

مثال ۵۶. با استفاده از مختصات کروی حجم جسمی در فضا که بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و زیر کره $x^2+y^2+z^2=z$ قرار دارد را به دست آورید. (شکل ۶۰)

حل. توجه داریم که کره از مبدا می‌گذرد و مرکز آن $(0,0,\frac{1}{2})$ است. معادله کره را در مختصات کروی می‌نویسیم $\rho^2=\rho\cos\varphi$ یا $\rho=\cos\varphi$. مخروط را می‌توان به صورت

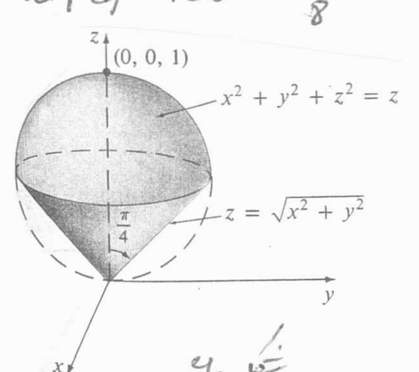
$$\rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} = \rho\sin\varphi$$

نوشت که در نتیجه $\varphi=\frac{\pi}{4}$. بنابراین جسم مورد نظر در مختصات کروی به صورت

$$W=\{(\rho,\theta,\varphi)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\rho\le\cos\varphi\}$$

است. پس

$$V(W)=\iiint_W dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi}{8}$$



شکل ۶۰