K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

تغییر متغیر در انتگرال های چندگانه

در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک بعدی، اغلب از تغییر متغیر (جانشانی) برای ساده کردن یک انتگرال استفاده می‌کردیم. با جابجا کردن نقش‌های x و u، قانون جانشانی را داشتیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\, g'(u)\,du \qquad (۴۲)$$

که در آن $x = g(u)$ و $a = g(c)$ و $b = g(d)$. گاهی اوقات فرمول (۴۲) را به صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du \qquad (۴۳)$$

در نظر می‌گیریم. در انتگرال‌های دوگانه نیز از تغییر متغیرها برای ساده کردن برخی از انتگرال‌ها استفاده کرد. به عنوان مثال، تبدیل به مختصات قطبی. متغیرهای جدید r، θ وابسته به متغیرهای قدیم x و y طبق معادلات زیر با هم ارتباط دارند.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

و فرمول تغییر متغیر زیر را به دست آوردیم

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dA$$

که در آن D' ناحیه‌ای در صفحه $r\theta$ است که متناظر با ناحیه D در صفحه xy است.

در حالت کلی، تغییر متغیرها توسط تبدیل T از صفحه uv به صفحه xy می‌گیریم

$$T(u,v) = (x,y)$$

به دست می‌آید که در آن x و y وابسته به u و v توسط معادلات

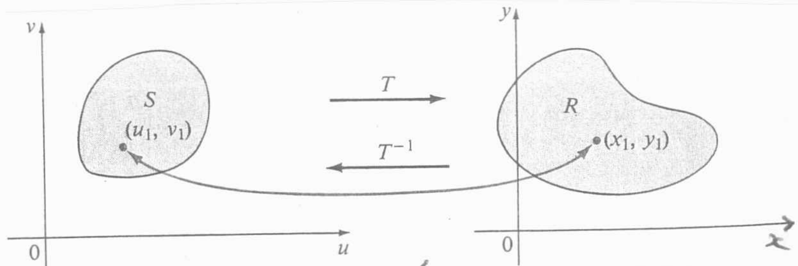
$$x = g(u,v), \qquad y = h(u,v) \qquad (۴۴)$$

یا گاهی اوقات به صورت

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v)$$

داده می‌شوند. معمولاً فرض بر این است که T یک تبدیل از کلاس C^1 است، یعنی g و h دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند. تبدیل T یک تابع است که دامنه و برد آن زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^2$ می‌باشند. اگر $T(u_1,v_1) = (x_1,y_1)$ آنگاه نقطه (x_1,y_1) را تصویر نقطه (u_1,v_1) نامیم. اگر هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نباشند، T را یک به یک نامیم. شکل (۶۱) اثر تبدیل T روی ناحیه

D' در صفحه uv را نمایش می‌دهد. T ناحیه D' را به ناحیه D در صفحه xy تبدیل می‌کند و D را تصویر D' شامل تمام تصویرهای نقاط در D' نامیم.



شکل ۶۱

اگر T یک تبدیل یک به یک باشد آنگاه دارای یک تبدیل معکوس T^{-1} از صفحه xy به صفحه uv است و ممکن است معادلات (۴۴) را برای u و v برحسب x و y حل کرد.

$$u=G(x,y), \qquad v=H(x,y)$$

مثال ۵۷. تبدیل تعریف شده توسط معادلات

$$x=u^2-v^2, \qquad y=2uv$$

را در نظر بگیرید. تصویر مربع $S=\{(u,v)\mid 0\le u,v\le 1\}$ را به دست آورید.

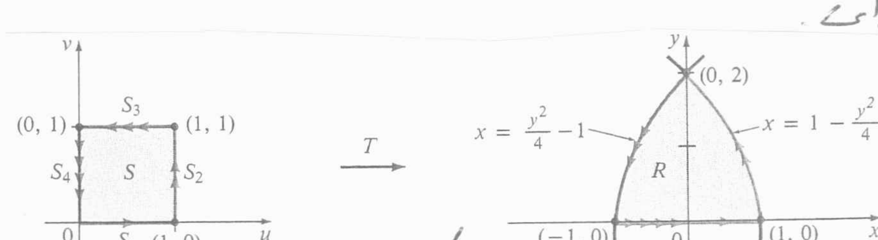
حل. ابتدا تصویرهای اضلاع S را به دست می‌آوریم. ضلع اول S_1 توسط $v=0$، $0\le u\le 1$ داده شده است. بنابراین S_1 تبدیل به پاره خط واصل از $(0,0)$ تا $(1,0)$ در صفحه xy نگاشته می‌شود. ضلع دوم S_2 توسط $u=1$ و $0\le v\le 1$ داده می‌شود. در معادلات داده شده قرار می‌دهیم $u=1$ و داریم

$$x=1-v^2, \qquad y=3v$$

با حذف v داریم

$$x=1-\frac{y^2}{4} \qquad 0\le x\le 1.$$

که قسمتی از یک سهمی است.



شکل ۶۲

به طور مشابه S_3 توسط $v=1$ و $0 \le u \le 1$ داده می‌شود که تصویر قوسی از سهمی

$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \le x \le 0 \qquad (۴۵)$$

است. نهایتاً S_4 توسط $u=0$ ، $0 \le v \le 1$ داده می‌شود که تصویر $x=-v^2$ ، $y=0$ است، یعنی $-1 \le x \le 0$. توجه کنید که حرکت اطراف مربع در جهت مثبت است. همچنین حرکت اطراف ناحیه سهمی شکل نیز در جهت مثبت است. تصویر D' از ناحیه D (شکل ۶۳) که کراندار به محور xها است و سهمی توسط معادلات (۴۵) بدست می‌آید.

حال اثر تغییر متغیر بر یک انتگرال دوگانه را بررسی می‌کنیم. با مستطیل کوچک D' در صفحه uv که گوشه پایین چپ آن نقطه (u_0, v_0) است و اضلاع آن Δu و Δv است شروع می‌کنیم (شکل ۶۳). تصویر آن ناحیه D در صفحه xy است که نقاط مرزی $(x_0,y_0)=T(u_0,v_0)$ است. معادله ضلع پایینی D' به صورت $v=v_0$ است که منحنی تصویر توسط $x=g(u,v_0)$ و $y=h(u,v_0)$ داده می‌شود یا به فرم برداری زیر است

$$g(u,v)\vec{i} + h(u,v)\vec{j}$$

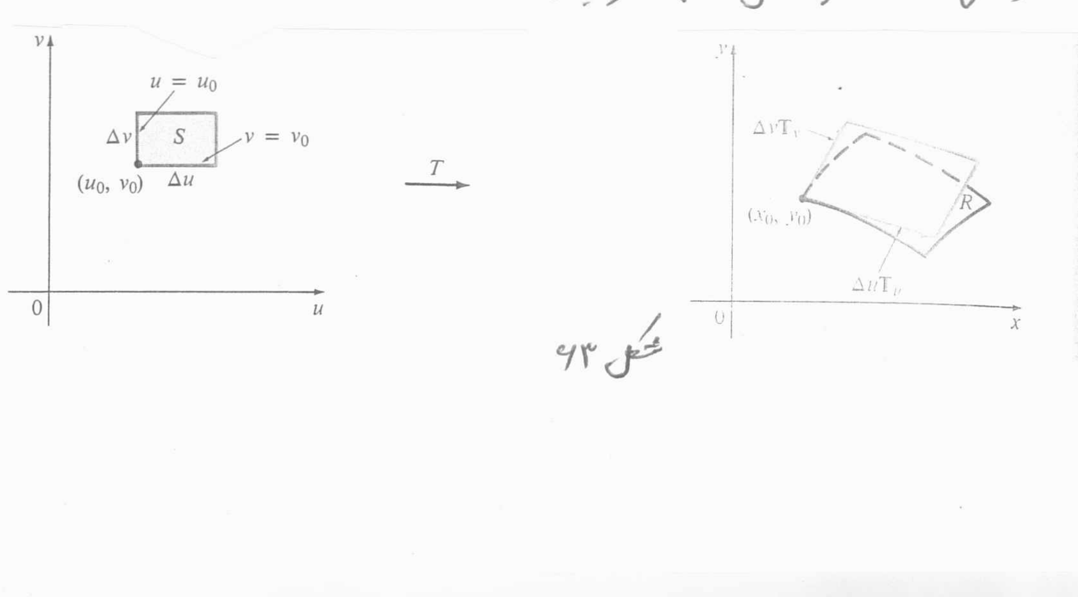
بردار مماس در (x_0,y_0) به منحنی تصویر عبارت است از

$$\vec{T}_u = g_u(u_0,v_0)\,\vec{i} + h_u(u_0,v_0)\,\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial x}{\partial}\vec{j}$$

به طور مشابه بردار مماس در (x_0,y_0) به منحنی تصویر ضلع چپ D' (یعنی $u=u_0$) عبارت است از

$$\vec{T}_v = g_v(x_0,y_0)\,\vec{i} + h_v(u_0,v_0)\,\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}$$

پس ناحیه تصویر $D=T(D')$ را می‌توان توسط متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط بردارهای $\Delta u\vec{T}_u$ و $\Delta v\vec{T}_v$ (شکل ۶۳) تقریب زد.



شکل ۶۳

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

بنابراین می‌توان مساحت D را توسط مساحت این متوازی‌الاضلاع تقریب زد، یعنی

$$\|(\Delta u \vec{T}_u)\times(\Delta v \vec{T}_v)\| = \|\vec{T}_u\times\vec{T}_v\|\,\Delta u\,\Delta v \qquad (۴۶)$$

با محاسبه ضرب خارجی، داریم

$$\vec{T}_u\times\vec{T}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\vec{k}$$

دترمینان حاصل را ژاکوبی تبدیل نامیم و داریم

تعریف ۲۸. ژاکوبی تبدیل T داده شده توسط $x=g(u,v)$ و $y=h(u,v)$ عبارت است از

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (۴۷)$$

با این نماد، می‌توان معادله (۴۶) را برای تقریب مساحت ΔA از D مورد استفاده قرار داد

$$\Delta A \simeq \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\,\Delta v \qquad (۴۸)$$

که در آن ژاکوبی در (u_0,v_0) تعریف شده است.

حال ناحیه D' در صفحه uv را به مستطیل‌های D'_{ij} افراز می‌کنیم و تصویر آنها در صفحه xy را D_{ij} نامیم (شکل ۴۴). با بکار بردن تقریب در (۴۸) برای هر D_{ij}، می‌توانیم انتگرال دوگانه f روی D به صورت زیر تقریب زد

$$\iint_D f(x,y)\,dA \simeq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*,y_j^*)\,\Delta A_{ij}$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(g(u_i^*,v_j^*),h(u_i^*,v_j^*))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u_i\,\Delta v_j$$

که در آن ژاکوبی در (u_i^*,v_j^*) محاسبه شده است. این جمع دوگانه یک جمع ریمانی برای انتگرال زیر است:

$$\iint_D f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

و در نتیجه قضیه زیر را ثابت کردیم.

قضیه ۲۹. تغییر متغیر در انتگرال دوگانه. فرض کنید T یک تبدیل از کلاس C^1 و یک به یک است که ژاکوبی آن ناصفر بوده و ناحیه D' در صفحه uv را بروی ناحیه D در صفحه xy می‌نگارد و فرض کنید f روی D پیوسته و D و D' از نوع ۱ یا ۲ در صفحه باشند. آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv \qquad (۴۹)$$

به عنوان مثالی از (۴۹)، فرمول انتگرال‌گیری در مختصات قطبی را بررسی می‌کنیم. تبدیل T از صفحه $r\theta$ به صفحه xy توسط

$$x=g(r,\theta)=r\cos\theta,\qquad y=h(r,\theta)=r\sin\theta$$

که در شکل ۴۴ نمایش داده شده‌اند، T مستطیل مقدماتی در صفحه $r\theta$ را به صفحه xy می‌برد. ژاکوبی T عبارت است از

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r>0$$

پس

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

که همان فرمول انتگرال در مختصات قطبی است.

مثال ۵۸. با استفاده از تغییر متغیر $x=u^2-v^2$، $y=2uv$، مقدار $\iint_D y\,dA$ را که در آن D ناحیه کراندار به محور xها و سهمی‌های $y^2=4-4x$ و $y^2=4+4x$ است، به دست آورید.

حل. ناحیه D در شکل (۴۳) نمایش داده شده است. در مثال ۵۷، دیدیم که ناحیه D' با $T(D')=D$ مربع $[0,1]\times[0,1]$ است. برای تغییر متغیر در انتگرال، ابتدا ژاکوبی را تعیین می‌کنیم، داریم $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4u^2+4v^2>0$ پس از قضیه ۲۹ داریم

$$\iint_D y\,dA = \iint_{D'} 2uv \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (2uv)\,4(u^2+v^2)\,du\,dv = 2$$

مثال ۵۹. مطلوب است محاسبه $\iint_D e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$ که در آن D ناحیه مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,-1)$ است.

حل. چون انتگرال گیری از $e^{(x+y)/(x-y)}$ ساده نیست، از تغییر متغیر زیر که با توجه به ضابطه f به دست می آید، استفاده می کنیم

$$u = x+y, \qquad v = x-y$$

این معادلات تبدیل T^{-1} از صفحه xy به صفحه uv را تعریف می کنند. باید تبدیل T را داشته باشیم، پس x و y را برحسب u و v به دست می آوریم

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

ژاکوبی T عبارت است از

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$$

برای یافتن ناحیه D' در صفحه uv متناظر به D، توجه خود را به اضلاع D متمرکز می کنیم.

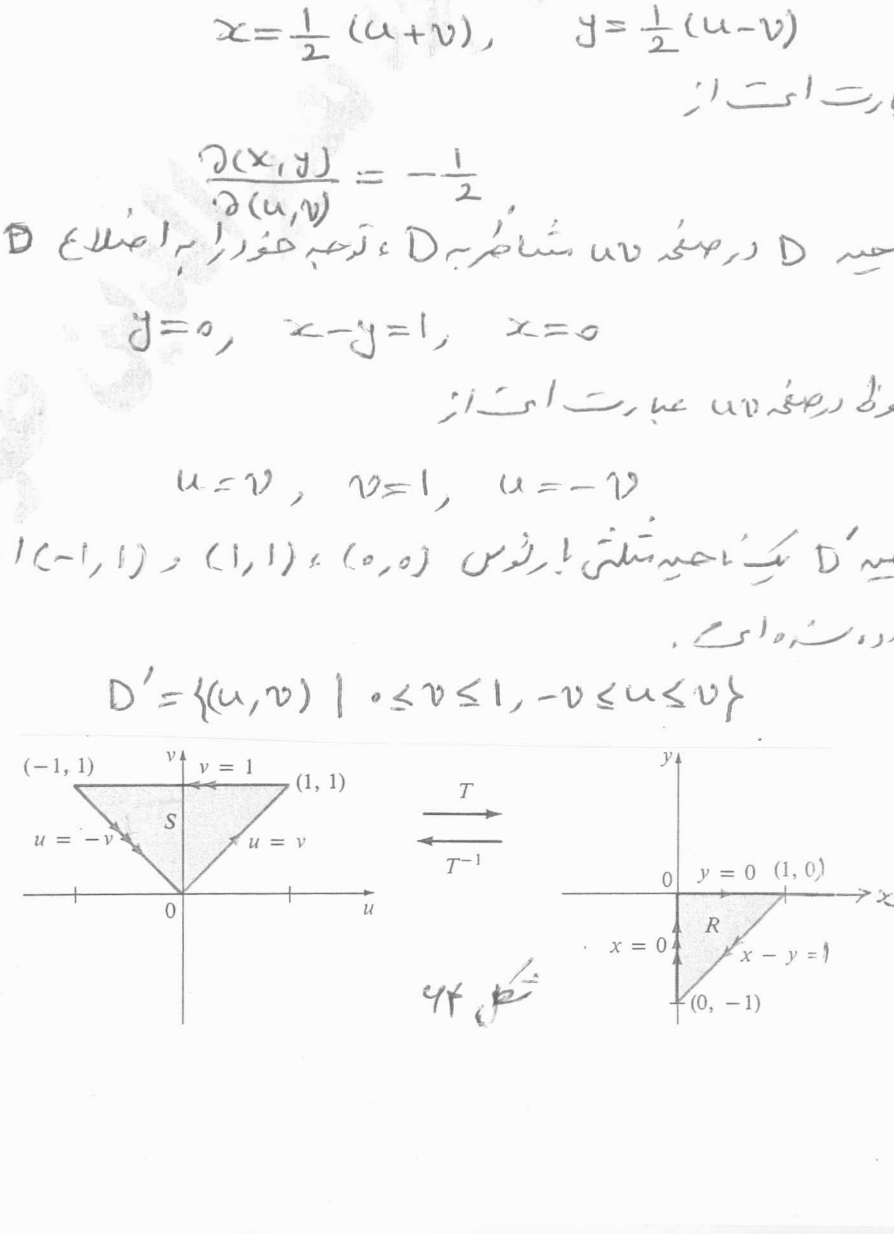
$$y=0, \quad x-y=1, \quad x=0$$

تصویر این خطوط در صفحه uv عبارت است از

$$u=v, \quad v=1, \quad u=-v$$

بنابراین ناحیه D' یک ناحیه مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,1)$ و $(-1,1)$ است که در شکل (۶۴) نمایش داده شده است.

$$D' = \{(u,v) \mid 0 \le v \le 1,\ -v \le u \le v\}$$



شکل ۶۴

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

حال قضیه (۲۹) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\iint_D e^{(x+y)/(x-y)}\,dA &= \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv\\ &= \int_0^1\int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\,dv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[v e^{u/v}\right]_{u=-v}^{v} dv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (e-e^{-1})\,v\,dv\\ &= \frac{e-e^{-1}}{4}\end{aligned}$$

فرمول مشابهی برای تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه وجود دارد. فرض کنید T تبدیلی است که ناحیه W' در فضای uvw را بروی ناحیه W در فضای xyz با معادلات

$$x=g(u,v,w),\quad y=h(u,v,w),\quad z=k(u,v,w)$$

می‌نگارد. ژاکوبی T یک دترمینال 3×3 به صورت زیر است.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

تحت فرضیات مشابه با قضیه (۲۹)، فرمول زیر را برای انتگرال سه‌گانه داریم

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw \qquad (۸۰)$$

مثال ۱۰. با استفاده از (۸۰) فرمول انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی را بدست آورید.

حل. از تغییر متغیر $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$، $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$ و $z=\rho\cos\varphi$، ژاکوبی عبارت است از $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = -\rho^2\sin\varphi$. چون $0\le\varphi\le\pi$ پس $\sin\varphi\ge 0$. بنابراین $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \rho^2\sin\varphi$ و با توجه به فرمول (۸۰) داریم

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

که همان رابطه انتگرال سه‌گانه در مختصات کروی است.