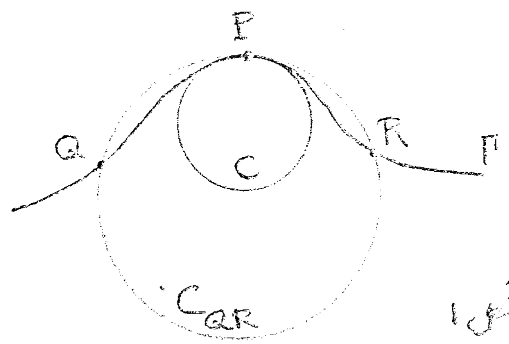
فصل اول . بردارها

مقدمه

هدف مباحث این فصل، بررسی اشکال هندسی با استفاده از روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال است. بالاخص نظریه مقدماتی منحنی‌ها و رویه‌ها در فضای اقلیدسی سه بعدی که آن را $\mathbb{R}^3$ می‌نامیم مطرح می‌شود. خواصی از منحنی‌ها و رویه‌ها که تنها وابسته به نقاط نزدیک به یک نقطه خاص از شکل است را خواص موضعی نامیم. مطالعه خواص موضعی را هندسه دیفرانسیل موضعی گوییم و بررسی خواص کلی که وابسته به خواص موضعی است را هندسه دیفرانسیل کلی نامیم.

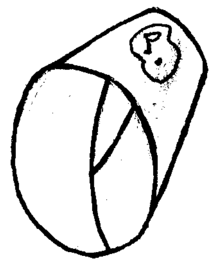
مثال ۱. فرض کنید Q و R دو نقطه نزدیک به نقطه P روی منحنی Γ در صفحه است و C_{QR} دایره گذرنده از نقاط P، Q و R باشد. وضعیت حدی دایره C_{QR} وقتی که نقاط Q و R روی منحنی Γ به نقطه P نزدیک می‌شوند را در نظر بگیرید. در حالت کلی، شکل حدی دایره C مماس بر Γ در نقطه P است. شعاع دایره C، شعاع انحنا (Radius of curvature) منحنی Γ در نقطه P نامیده می‌شود. شعاع انحنا مثالی از یک خاصیت موضعی منحنی است زیرا تنها وابسته به نقاط منحنی Γ نزدیک نقطه P است.



شکل ۱

مثال ۲. نوار موبیوس نشان داده شده در شکل ۲، مثالی از یک رویه یک طرفه است. یک طرفه بودن مثالی از یک خاصیت کلی یک شکل است، زیرا وابسته به طبیعت رویه است. مشاهده می‌شود که قسمتی کوچک از رویه اطراف نقطه دلخواه P یک رویه دوطرفه منظم است، یعنی قسمتی

موضعی از نوار موبیوس دوطرفه می‌باشد.



شکل ۲

برای بررسی خواص موضعی منحنی‌ها و رویه‌ها از بردارها شروع می‌کنیم.

بردارها

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب (a_1, a_2, a_3) است که در آن a_1، a_2 و a_3 اعداد حقیقی‌اند. یک بردار نقطه‌ای در $\mathbb{R}^3$ است و در حالت کلی با $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، $\vec{x}$، ... یا P، Q، R، ... نمایش داده می‌شوند. منفی بردار $\vec{a}$ بردار $-\vec{a}$ است و به صورت $-\vec{a} = \langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$ نمایش داده می‌شود که در آن بردار $\vec{a}$ با سه‌تایی $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ داده شده است. بردار صفر، بردار $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ است. طول یا اندازه بردار دلخواه $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ عدد حقیقی $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ است. واضح است که $\|\vec{a}\| \geq 0$ و $\|\vec{a}\| = 0$ اگر و تنها اگر $\vec{a} = \vec{0}$.

جمع بردارها

برای دو بردار $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ در $\mathbb{R}^3$، جمع دو بردار، برداری است که با $\vec{a} + \vec{b}$ نمایش داده و به وسیله

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

تعریف می‌کنیم.

تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بردار $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ است. در بخش مسائل حل شده ثابت می‌کنیم که جمع برداری در خواص زیر صدق می‌کند.

[A_1] $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (قانون جابجایی)

$[A_2]$ $\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\quad$ (قانون شرکت‌پذیری)

$[A_3]$ $\quad$ به ازای هر $\vec{a}$ ، $\quad \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

$[A_4]$ $\quad$ به ازای هر $\vec{a}$ ، $\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

مثال ۳. فرض کنید $\vec{a}=\langle 1,-2,0\rangle$ و $\vec{b}=\langle 0,1,1\rangle$. آنگاه

$\vec{a}+\vec{b}=\langle 1,-1,1\rangle$ ، $-\vec{a}=\langle -1,2,0\rangle$، $\vec{b}-\vec{a}=\langle -1,3,1\rangle$، $\|\vec{a}\|=\sqrt{5}$

مثال ۴. با توجه به خواص $[A_1]-[A_4]$ برای هر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم

$$\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}+(\vec{b}+(-\vec{a}))=\vec{a}+(-\vec{a})+\vec{b}=\vec{0}+\vec{b}=\vec{b}$$

بنابراین معادله برداری $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ دارای یک جواب $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$ است. در ضمن این جواب تنها جواب است، زیرا اگر $\vec{a}+\vec{y}=\vec{b}$ آنگاه

$$(-\vec{a})+\vec{a}+\vec{y}=(-\vec{a})+\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$$

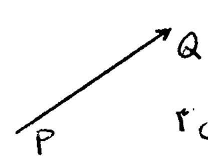
لذا

$$\vec{0}+\vec{y}=\vec{b}-\vec{a} \Rightarrow \vec{y}=\vec{b}-\vec{a}=\vec{x}$$

برای نقاط P و Q در $\mathbb{R}^3$ (یعنی دو بردار $\vec{P}$ و $\vec{Q}$) هستند. نماد $\overrightarrow{PQ}$ را برای تفاضل $\vec{Q}-\vec{P}$ بکار می‌بریم و $\overrightarrow{PQ}$ پاره‌خطی از نقطه P تا Q است. (شکل ۳) فاصله از P تا Q را با طول $\|\overrightarrow{PQ}\|$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP},\quad \|\overrightarrow{PQ}\|=\|\overrightarrow{QP}\|,$$

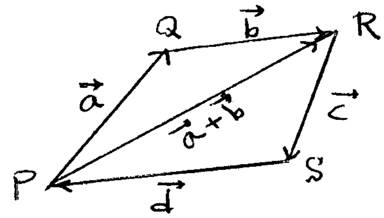
و $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P'Q'}$ اگر و تنها اگر $Q-P=Q'-P'$ و برای هر P ، $\overrightarrow{PP}=\vec{0}$.



شکل ۳

مثال ۵. فرض کنید $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ ، $\vec{b}=\overrightarrow{QR}$ ، $c=\overrightarrow{RS}$ و $\vec{d}=\overrightarrow{SP}$ (شکل ۴).

آنگاه



شکل ۴

$$\vec a+\vec b=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\vec Q-\vec P+\vec R-\vec Q=\vec R-\vec P=\overrightarrow{PR}$$

$$\vec a+\vec b+\vec c=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\vec R-\vec P+\vec S-\vec R=\vec S-\vec P=\overrightarrow{PS}=-\vec d$$

$$\vec a+\vec b+\vec c+\vec d=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP}=\vec S-\vec P+\vec P-\vec S=\vec 0.$$

ضرب یک بردار در یک اسکالر

اگر k عددی حقیقی و $\vec a=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ یک بردار در $\mathbb{R}^3$ باشد، ضرب بردار $k\vec a$ ، $k\vec a=\langle ka_1,ka_2,ka_3\rangle$ است. بوضوح برای هر $k\in\mathbb{R}$ ، $\vec a\in\mathbb{R}^3$ ، $0\vec a=k\vec 0=\vec 0$. در اینجا به تبعیت اعداد حقیقی را اسکالرها نامیم. حاصل ضرب $k\vec a$ را ضرب اسکالری بردار و در اسکالر نامیم.

در بخش مسائل حل شده، ثابت می‌کنیم که ضرب بردارها در اسکالرها در خواص زیر صدق می‌کنند. برای اسکالرهای k_1 و k_2 ، k و بردارهای $\vec a$ و $\vec b$

$$(k_1k_2)\vec a=k_1(k_2\vec a)=k_1k_2\vec a \qquad [B_1]$$

(قوانین توزیع پذیری)

$$(k_1+k_2)\vec a=k_1\vec a+k_2\vec a$$

$$k(\vec a+\vec b)=k\vec a+k\vec b \qquad [B_2]$$

$$1\vec a=\vec a \qquad [B_3]$$

نهایتاً، اگر $\vec a=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ آنگاه

$$\|k\vec a\|=\sqrt{(ka_1)^2+(ka_2)^2+(ka_3)^2}=\sqrt{k^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

بنابراین برای هر اسکالر k و هر بردار $\vec a$

$$\|k\vec a\|=|k|\,\|\vec a\| \qquad (1)$$

مثال ۶. فرض کنید $\vec a=\langle 1,\pi,0\rangle$ ، $\vec b=\langle 0,2,-1\rangle$. در این صورت

$2\vec a=\langle 2,2\pi,0\rangle$, $(-1)\vec a=\langle -1,-\pi,0\rangle=-\vec a$, $\vec a-3\vec b=\langle 1,\pi-6,3\rangle$.

مثال ۷. فرض کنید $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ ، $\vec{u}_3$ بردارهای داده شده اند و $\vec{a}=\vec{u}_1-2\vec{u}_2$ و $\vec{b}=-\vec{u}_2+2\vec{u}_3$ و $\vec{c}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$. در این صورت

$$\begin{aligned}\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c} &= (\vec{u}_1-2\vec{u}_2)-2(-\vec{u}_2+2\vec{u}_3)-(\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3)\\ &= \vec{u}_1-2\vec{u}_2+2\vec{u}_2-4\vec{u}_3-\vec{u}_1-\vec{u}_2-\vec{u}_3\\ &= -\vec{u}_2-5\vec{u}_3 .\end{aligned}$$

گوییم بردار $\vec{a}$ هم جهت با بردار ناصفر $\vec{b}$ است، هرگاه اسکالری نامنفی مانند $k\geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $\vec{a}=k\vec{b}$.

اگر $\vec{a}$ هم جهت با بردار $\vec{b}$ بوده و طول آن با طول $\vec{b}$ برابر باشد، آنگاه معادله (۱) نتیجه می دهد که

$$\|\vec{a}\|=\|k\vec{b}\|=|k|\,\|\vec{b}\|=k\,\|\vec{b}\|=\|\vec{b}\|$$

بنابراین $k=1$ و بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساویند. بنابراین یک بردار بطور منحصر بفردی توسط جهت و طولش تعیین می شود.

اگر $\vec{a}=k\vec{b}$ ، $\vec{b}\neq\vec{0}$ و $k\leq 0$ ، آنگاه $\vec{a}$ با $\vec{b}$ مختلف الجهت اند. اگر $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ ، $\vec{a}$ با $\vec{b}$ هم جهت یا مختلف الجهت باشند یعنی به ازای عددی حقیقی مانند k داشته باشیم $\vec{a}=k\vec{b}$ ، گوییم $\vec{a}$ موازی $\vec{b}$ است.

بردار $\vec{u}$ با طول واحد را یک بردار یکه نامیم. در حالت کلی $\vec{u}_{\vec{a}}$ نشان دهنده بردار یکه در جهت بردار ناصفر $\vec{a}$ است. چون بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{u}_{\vec{a}}$ هم جهت اند پس به ازای اسکالری مانند $k\geq 0$ داریم $\vec{a}=k\vec{u}_{\vec{a}}$. از طرفی طبق فرض، $\vec{u}_{\vec{a}}$ یکه است پس $\|\vec{u}_{\vec{a}}\|=1$ و بنابراین

$$\|\vec{a}\|=k\,\|\vec{u}_{\vec{a}}\|=k$$

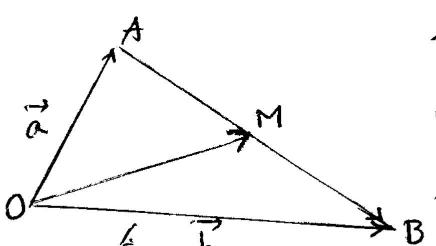
به عبارت دیگر $\vec{a}=\|\vec{a}\|\,\vec{u}_{\vec{a}}$ یا

$$\vec{u}_{\vec{a}}=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \qquad (۲)$$

مثال ۸. فرض کنید $\vec{a}=\langle 1,-1,3\rangle$ ، $\vec{b}=\langle 2,-2,6\rangle$ و $\vec{c}=\langle -3,3,-9\rangle$.
چون $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}$ پس بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌جهت‌اند، بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مختلف‌الجهت هستند، زیرا $\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{c}$. بردار یکه در جهت بردار $\vec{a}$ ، بردار

$$\vec{u}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\left\langle \frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right\rangle,$$

است.



شکل ۵

مثال ۹. در مثلث OAB (شکل ۵)، فرض کنید $\vec{a}=\vec{OA}$ و $\vec{b}=\vec{OB}$ و M نقطه وسط ضلع AB است. در این صورت بردار $\vec{OM}$ را می‌توان برحسب بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به دست آورد.

$$\begin{aligned}\vec{OM}&=\vec{a}+\vec{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{AB}\\&=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.\end{aligned}$$

وابستگی و استقلال خطی

در این بخش مفاهیم بسیار مهم وابسته خطی و استقلال خطی بردارها را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱. بردارهای $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$ را وابسته خطی نامیم هرگاه اسکالرهای $k_1,k_2,\dots,k_n$ که همگی با هم صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که

$$k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+\dots+k_n\vec{u}_n=\vec{0} \qquad (۳)$$

بردارهای $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$ را مستقل خطی نامیم، هرگاه وابسته خطی نباشند. یعنی بردارهای $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$ مستقل خطی‌اند هرگاه معادله (۳) نتیجه دهد که $k_1=k_2=\dots=k_n=0$.

توجه کنید که یک مجموعه از بردارها که شامل بردار صفر باشد، وابسته‌اند، زیرا می‌توان نوشت:

$$1\vec{0}+0\vec{u}_1+\dots+0\vec{u}_n=\vec{0}.$$

مثال ۱۰. بردارهای $\vec{a}=\langle 1,-1,0\rangle$، $\vec{b}=\langle 0,2,-1\rangle$ و $\vec{c}=\langle 2,0,-1\rangle$ وابسته خطی اند، زیرا $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$.

مثال ۱۱. فرض کنید $\vec{a}$ موازی $\vec{b}$ است ($\vec{a}\parallel\vec{b}$). در این صورت $\vec{a}=\vec{0}$، $\vec{b}=\vec{0}$ یا $\vec{a}=k\vec{b}$ است، یعنی $\vec{a}-k\vec{b}=\vec{0}$. بنابراین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابسته اند. برعکس، فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابسته اند. در این صورت اسکالرهای k_1 و k_2 که باهم صفر نیستند وجود دارند بطوری که $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$. مثلا فرض کنید $k_1\neq 0$، در نتیجه $\vec{a}=-\frac{k_2}{k_1}\vec{b}$ یعنی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی اند. پس

دو بردار وابسته اند اگر و تنها اگر موازی باشند.

قضیه ۱. اگر یک بردار برحسب تابعی خطی از بردارهای مستقل داده شده باشد آنگاه این شرح منحصربفرد است. یعنی اگر $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$ مستقل باشند و

$$\vec{u}=k_1\vec{u}_1+k_2\vec{u}_2+\dots+k_n\vec{u}_n=k'_1\vec{u}_1+k'_2\vec{u}_2+\dots+k'_n\vec{u}_n$$

آنگاه $k_1=k'_1$، $k_2=k'_2$، ...، $k_n=k'_n$.

اثبات. فرض کنید به ازای j ای، $k_j\neq k'_j$. آنگاه

$$(k_1-k'_1)\vec{u}_1+(k_2-k'_2)\vec{u}_2+\dots+(k_j-k'_j)\vec{u}_j+\dots+(k_n-k'_n)\vec{u}_n=0$$

که در آن $k_j-k'_j\neq 0$. بنابراین $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n$ وابسته اند و این با فرض متناقض است.

پایه و بُعد

سه بردار $\vec{e}_1=\langle 1,0,0\rangle$، $\vec{e}_2=\langle 0,1,0\rangle$ و $\vec{e}_3=\langle 0,0,1\rangle$ مستقل اند زیرا

$$k_1\vec{e}_1+k_2\vec{e}_2+k_3\vec{e}_3=\langle k_1,k_2,k_3\rangle$$

و اگر $k_1\vec{e}_1+k_2\vec{e}_2+k_3\vec{e}_3=\vec{0}$ آنگاه $k_1=k_2=k_3=0$. علاوه بر آن هر بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ را می توان به صورت $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ نوشت و طبق قضیه ۱ این نمایش منحصربفرد است.

در حالت کلی تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲. یک مجموعه از بردارها مانند B پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است هرگاه

الف) هر بردار در $\mathbb{R}^3$ را بتوان به صورت ترکیب خطی بردارها در B نوشت.

ب) بردارهای مجموعه B یک مجموعه مستقل خطی از بردارها باشد.

قضیه ۲. هر سه بردار مستقل خطی یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ است. برعکس، هر پایه در $\mathbb{R}^3$ شامل سه بردار مستقل خطی است.

اثبات. اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مستقل خطی باشند آنگاه معادله

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

تنها دارای جواب $x=y=z=0$ است. به طور معادل دستگاه

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 + zc_1 &= 0 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= 0 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 &= 0 \end{aligned}$$

تنها دارای جواب بدیهی $x=y=z=0$ است که این جواب حاصل می‌شود تنها اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه ناصفر باشد، یعنی

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

در نتیجه برای هر بردار $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ در $\mathbb{R}^3$ دستگاه

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 + zc_1 &= u_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= u_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 &= u_3 \end{aligned}$$

دارای جواب $x=k_1$ ، $y=k_2$ و $z=k_3$ است یعنی $\vec{u} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$ و حکم حاصل می‌شود.

تعریف ۳. فرض کنید $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ یک پایه در فضا باشند و $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$.
اسکالرهای a_1, a_2, a_3 که با a_i برای $i=1,2,3$ نشان می‌دهیم، مولفه‌ها یا مختصات بردار $\vec{a}$ نسبت به پایه $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ نامیده می‌شوند.

از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که مختصات (مولفه‌ها) یک بردار نسبت به یک پایه داده شده منحصربفردند. بهرحال باید توجه داشت که مولفه‌های یک بردار وابسته به پایه انتخابی است و در حالت کلی مولفه‌ها درصورت تغییر پایه، تغییر خواهند کرد. تنها بردار مستثنی از این حالت، بردار $\vec{0}$ است که مولفه‌های آن نسبت به هر پایه‌ای همواره ۰، ۰، ۰ می‌باشند.
در حالت کلی، مولفه‌های بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{x}$، $\vec{y}$، $\vec{u}$، ... نسبت به پایه داده شده را با a_i، b_i، x_i، y_i، u_i، ... نشان می‌دهیم.

مثال ۱۲. فرض کنید $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ یک پایه و $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ ، $\vec{b} = \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ و $\vec{c} = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3$ است. نشان می‌دهیم $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مستقل خطی اند و بنابراین به فرم یک پایه برای فضا می‌باشند. فرض کنید

$$k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c} = (2k_1 + 3k_3)\vec{u}_1 + (-k_1 + k_2)\vec{u}_2 + (-2k_2 + k_3)\vec{u}_3 = \vec{0}$$

چون $\vec{u}_i$ها مستقل اند، پس

$$2k_1 + 3k_3 = 0, \qquad -k_1 + k_2 = 0, \qquad -2k_2 + k_3 = 0$$

که یک دستگاه معادلات خطی همگن برحسب k_1, k_2, k_3 است. چون دترمینان ماتریس ضرایب آن ناصفر است،

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 8 \neq 0$$

پس دستگاه تنها دارای جواب $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ است. بنابراین بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مستقل اند.
مشاهده می‌شود که مختصات (مولفه‌های) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ستونهای ماتریس بالا هستند.

مشابه حل مثال ۱۲، می‌توان قضیه زیر را در حالت کلی ثابت کرد.

قضیه ۳. فرض کنید $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ یک پایه است و فرض کنید

$$\vec{v}_1 = a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + a_{31}\vec{u}_3$$
$$\vec{v}_2 = a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + a_{32}\vec{u}_3$$
$$\vec{v}_3 = a_{13}\vec{u}_1 + a_{23}\vec{u}_2 + a_{33}\vec{u}_3$$

یا به طور مختصر

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\,\vec{u}_i\,, \qquad j = 1, 2, 3.$$

آنگاه بردارهای $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ یک پایه اند اگر و تنها اگر

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 0$$

اثبات. با توجه به قضیه ۲، کافی است مستقل خطی بودن بردارهای $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ را بررسی کنیم. قرار می‌دهیم

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = 0$$

با توجه به تعریف بردارهای $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ دستگاه زیر را برحسب مجهولات k_1, k_2, k_3 داریم

$$k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + k_3 a_{13} = 0$$
$$k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + k_3 a_{23} = 0$$
$$k_1 a_{31} + k_2 a_{32} + k_3 a_{33} = 0$$

زیرا بردارهای $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ مستقل خطی اند. این دستگاه دارای جواب بدیهی $k_1 = 0$، $k_2 = 0$ و $k_3 = 0$ است اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس ضرایب آن ناصفر است. یعنی اگر و تنها اگر

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 0$$

ضرب اسکالری بردارها

تعریف ۴. ضرب نقطه‌ای یا اسکالری دو بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ عدد حقیقی $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ است.

بالاخص، برای $\vec{a}=\vec{b}$ فرمول زیر را داریم

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\|\vec{a}\|^2 \qquad (۴)$$

قضیه ۴. برای بردارهای $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$، $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ و $\vec{c}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$ و اسکالر $k\in\mathbb{R}$، ضرب نقطه‌ای دارای خواص زیر است.

الف) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (قانون تقارن)

ب) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

ج) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (قانون توزیع‌پذیری)

د) ضرب نقطه‌ای معین مثبت است، یعنی

(i) برای هر $\vec{a}$، $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ اگر و تنها اگر $\vec{a}=0$

اثبات. الف) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\vec{b}\cdot\vec{a}$

ب) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=ka_1b_1+ka_2b_2+ka_3b_3=k(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

ج) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$

$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

د) واضح است که $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^3\geq 0$ و $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ اگر و تنها اگر $a_1=a_2=a_3=0$.

توضیح. به وضوح از تعریف نتیجه می‌شود که برای هر $\vec{a}$، $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$. علاوه بر آن، اگر برای هر $\vec{a}$، $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ آنگاه $\vec{b}\cdot\vec{b}=0$ و بنابراین از د-(ii) نتیجه می‌شود $\vec{b}=\vec{0}$.

مثال ۱۳. فرض کنید $\vec{a}=\langle -2,1,0\rangle$ و $\vec{b}=\langle 2,1,1\rangle$ آنگاه $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ و $\vec{a}\cdot\vec{a}=5=\|\vec{a}\|^2$.

مثال ۱۴. فرض کنید $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ بردارهای دلخواه اند و $\vec{a}=\vec{u}_1-\vec{u}_2$، $\vec{b}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2$. آنگاه

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (\vec{u}_1-\vec{u}_2)\cdot(2\vec{u}_1+\vec{u}_2)\\ &= 2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1-2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2+\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2-\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2\\ &= 2\|\vec{u}_1\|^2-\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2-\|\vec{u}_2\|^2.\end{aligned}$$

قضیه ۵. نامساوی کوشی-شوارتز. برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$،

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|,$$

و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابسته خطی باشند.

اثبات. اگر $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ باشد، نامساوی برقرار است. پس فرض کنید $\vec{a}\neq 0$، $\vec{b}\neq 0$. از (۲) قضیه ۴ داریم

$$\begin{aligned}0 &\le \left(\sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}}\,\vec{a}\pm\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}}\,\vec{b}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}}\,\vec{a}\pm\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}}\,\vec{b}\right)\\ &\le 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

در نتیجه $\pm 2\vec{a}\cdot\vec{b}\le 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|.$$

حال تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\vec{0}=\sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}}\,\vec{a}+\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}}\,\vec{b}$ یا $\vec{0}=\sqrt{\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|}}\,\vec{a}-\sqrt{\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|}}\,\vec{b}$ و این برقرار است اگر و تنها اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابسته خطی باشند.

ضرب نقطه‌ای $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را می‌توان برحسب زاویه θ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ اندازه‌گیری شده از مبدا، با فرض $0\le\theta\le\pi$، به طور هندسی تعبیر کرد.

قضیه ۶. اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد آنگاه

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta. \qquad (۵)$$

اثبات. قانون کسینوس‌ها را برای مثلث OAB در شکل ۶ بکار می‌بریم. داریم

$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\|\vec{OA}\|\,\|\vec{OB}\|\cos\theta$$

باید توجه کرد که قانون کسینوس‌ها را در حالتهای مرزی $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ یا $\vec{a}=0$ یا $\vec{b}=0$ بکار برد. اما $\|\vec{OA}\|=\|\vec{a}\|$ ، $\|\vec{OB}\|=\|\vec{b}\|$ و $\|\vec{AB}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$ ، پس

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

با توجه به خواص ضرب داخلی، طرف چپ معادله بالا را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

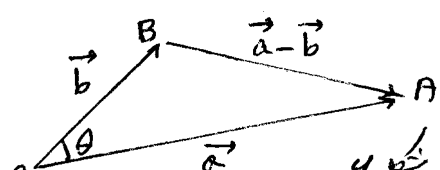
$$\begin{aligned}\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}\cos\theta$$

$$-2\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta$$

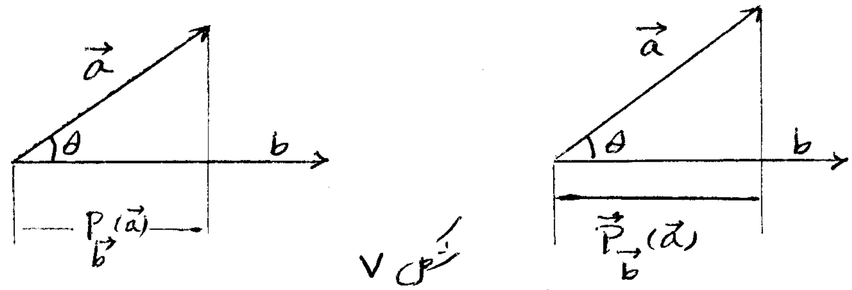


شکل ۶

تعریف ۵.
فرض کنید $\vec{b}$ یک بردار ناصفر است. تصویر اسکالر $\vec{a}$ بروی $\vec{b}$ را با $P_{\vec{b}}(\vec{a})$ نمایش می‌دهیم و برابر است با

$$P_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

فرض کنید $\vec{u}_b = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ یک بردار یکه در جهت بردار $\vec{b}$ است. در این صورت $P_{\vec{b}}(\vec{a})\,\vec{u}_b$ تصویر برداری $\vec{a}$ بروی $\vec{b}$ نامیده می‌شود و با $\vec{P}_{\vec{b}}(\vec{a})$ نمایش داده می‌شود (شکل ۷).



شکل ۷

بنابراین

$$\vec P_{\vec b}(\vec a) = P_{\vec b}(\vec a)\,\vec u_{\vec b} = \left((\vec a\cdot\vec b)/\|\vec b\|\right)\left(\vec b/\|\vec b\|\right)$$
$$= \frac{(\vec a\cdot\vec b)\,\vec b}{\|\vec b\|^2} \qquad (۶)$$

واضح است که $P_{\vec b}(\vec 0)=0$ و $\vec P_{\vec b}(\vec 0)=\vec 0$. اگر $\vec a\neq 0$ آنگاه از معادله (۵) داریم

$$P_{\vec b}(\vec a) = \|\vec a\|\cos\theta, \qquad \vec P_{\vec b}(\vec a)=\|\vec a\|\cos\theta\, \vec u_b \qquad (۷)$$

که در آن $\theta=\measuredangle(\vec a,\vec b)$. پس $P_{\vec b}(\vec a)$ و $\vec P_{\vec b}(\vec a)$ مستقل از طول بردار $\vec b$ هستند اما به جهت بردار $\vec b$ وابسته می باشند. (شکل ۷). در واقع بردار $\vec P_{\vec b}(\vec a)$ مستقل از جهت $\vec b$ نیز می باشد، یعنی $\vec P_{-\vec b}(\vec a)=\vec P_{\vec b}(\vec a)$. زیرا

$$\vec P_{-\vec b}(\vec a) = \frac{\vec a\cdot(-\vec b)}{\|-\vec b\|^2}(-\vec b) = \frac{\vec a\cdot\vec b}{\|\vec b\|^2}\,\vec b = \vec P_{\vec b}(a).$$

اسکالر $P_{\vec b}(a)$ با تغییر جهت بردار $\vec b$ در جهت مخالف $\vec b$ تغییر علامت می دهد.

مثال ۱۵. تصویر اسکالری و تصویر برداری، بردار $\vec b=\langle 1,1,2\rangle$ بروی $\vec a=\langle -2,3,1\rangle$ را بدست آورید.

حل. چون $\|\vec a\|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$، تصویر اسکالری $\vec b$ بروی $\vec a$ عبارت است از

$$P_{\vec a}(\vec b)=\|\vec b\|\cos\theta=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\|\vec a\|}=\frac{(-2)(1)+3(1)+1(2)}{\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

و تصویر برداری $\vec b$ بروی $\vec a$ برداری در جهت $\vec a$ است و داریم

$$\vec P_{\vec b}(\vec a)=\frac{3}{\sqrt{14}}\frac{\vec a}{\|\vec a\|}=\frac{3}{14}\vec a=\left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right\rangle$$

تعریف ۶. زوایای هادی بردار ناصفر $\vec a$ به ترتیب زوایای α، β، γ درباره

است که بردار $\vec{a}$ با جهت مثبت محورهای x ، y و z می‌سازد. کسینوس‌های این زوایای هادی یعنی $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی بردار $\vec{a}$ نامیم. $[0, \pi]$

با توجه به قضیه ۶ و در نظر گرفتن بردار یکه $\vec{e}_1$ در جهت مثبت محور xها که گاهی آن را با $\vec{i}$ نمایش می‌دهیم، داریم

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{e}_1\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \qquad (۸)$$

بطور مشابه، اگر $\vec{e}_2$ (گاهی آن را $\vec{j}$ نامیم) بردار یکه در جهت مثبت محور yها و $\vec{e}_3$ (گاهی آن را $\vec{k}$ نامیم) بردار یکه در جهت مثبت محور zها باشد، آنگاه

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \qquad (۹)$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \frac{a_1^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\vec{a}\|^2} \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)/\|\vec{a}\|^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2/\|\vec{a}\|^2 \\
&= 1 \qquad (۱۰)
\end{aligned}$$

و می‌توان بردار $\vec{a}$ را با داشتن کسینوس‌های هادی و اندازه بردار $\vec{a}$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle \\
&= \langle \|\vec{a}\|\cos\alpha, \|\vec{a}\|\cos\beta, \|\vec{a}\|\cos\gamma\rangle \\
&= \|\vec{a}\| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle
\end{aligned}$$

بنابراین اگر $\vec{u}_{\vec{a}}$ بردار یکه در جهت بردار $\vec{a}$ باشد، آنگاه

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle. \qquad (۱۱)$$

مثال ۱۴. زوایای هادی بردار $\vec{a} = \langle 1,2,3\rangle$ را به دست آورید.

حل. چون $\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$ پس

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

بنابراین

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \simeq 74^\circ$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \simeq 58^\circ$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \simeq 37^\circ$$

تعریف ۷. دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را متعامد گوییم و می‌نویسیم $\vec{b} \perp \vec{a}$ هرگاه $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
از معادله (۵) نتیجه می‌شود: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامدند اگر و تنها اگر یا $\vec{a}=\vec{0}$، $\vec{b}=\vec{0}$ یا $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

مثال ۱۷. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستقل خطی اند و $\vec{c} = \vec{a} - \vec{P}_{\vec{b}}(\vec{a})$. آنگاه $\vec{c}$ برداری ناصفر عمود بر $\vec{b}$ است. زیرا اگر $\vec{0} = \vec{c}$ آنگاه از معادله (۶)

$$\vec{0} = 1\vec{a} - \vec{P}_{\vec{b}}(\vec{a}) = 1\vec{a} - k\vec{b}$$

که در آن $k = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ که غیرممکن است زیرا $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستقل اند. بنابراین $\vec{c} \neq 0$.
نهایتاً

$$\vec{c}\cdot\vec{b} = \left(\vec{a} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{b})}{\|\vec{b}\|^2}$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$$

پس $\vec{c} \perp \vec{b}$.

پایه‌های متعامد

فرض کنید $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ بردارهای یکه دو به دو متعامدند، همان‌گونه که در شکل ۸ آمده است. این بردارها مستقل اند. زیرا اگر $k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ آنگاه