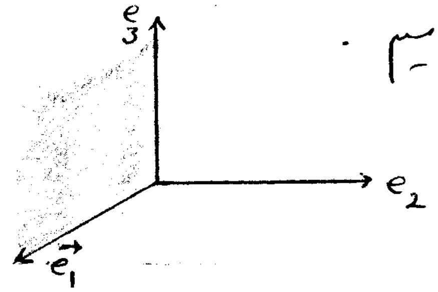
$$0 = \vec{e}_i \cdot \vec{0} = \vec{e}_i \cdot (k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3)$$
$$= k_i \, e_i \cdot e_i$$
$$= k_i$$

یعنی $k_1=k_2=k_3=0$. بنابراین $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها در $\mathbb{R}^3$ است، پس تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند. مجموعه $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ را یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^3$ نامیم.



شکل ۸

مشاهده می‌شود که $\vec{e}_i$ برای $i=1,2,3$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{R}^3$ است اگر و تنها اگر

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1 \quad \text{(بردارهای یکه)} \qquad (۱۲)$$
$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 = 0 \quad \text{(دو به دو متعامد)}$$

یا به طور مختصر می‌نویسیم

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i=j \\ 0 & \text{اگر } i\neq j \end{cases} \qquad (i,j=1,2,3) \qquad (۱۳)$$

کمیت δ_{ij} را نماد کرونکر نامیم. (Kronecker symbol).

قضیه ۷. فرض کنید $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ یک پایه متعامد یکه است و $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ و $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$. آن‌گاه

الف) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$

ب) $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}$

ج) برای $i=1,2,3$ ، $a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i$

اثبات. الف)

$$\vec a\cdot\vec b=(a_1\vec e_1+a_2\vec e_2+a_3\vec e_3)\cdot(b_1\vec e_1+b_2\vec e_2+b_3\vec e_3)$$
$$=a_1b_1(\vec e_1\cdot\vec e_1)+a_1b_2(\vec e_1\cdot\vec e_2)+a_1b_3(\vec e_1\cdot\vec e_3)$$
$$+a_2b_1(\vec e_2\cdot\vec e_1)+a_2b_2(\vec e_2\cdot\vec e_2)+a_2b_3(\vec e_2\cdot\vec e_3)$$
$$+a_3b_1(\vec e_3\cdot\vec e_1)+a_3b_2(\vec e_3\cdot\vec e_2)+a_3b_3(\vec e_3\cdot\vec e_3)$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

به فرم مختصر داریم

$$\vec a\cdot\vec b=\Big(\sum_{i=1}^{3}a_i\vec e_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}b_j\vec e_j\Big)$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j(\vec e_i\cdot\vec e_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_ib_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$$

ب)

$$\|\vec a\|=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

ج)

$$\vec a\cdot\vec e_i=\Big(\sum_{j=1}^{3}a_je_j\Big)\cdot e_i=\sum_{j=1}^{3}a_j(\vec e_j\cdot\vec e_i)=\sum_{j=1}^{3}a_j\delta_{ji}=a_i$$

مثال ۱۸. فرض کنید $\vec a=\vec e_1+2\vec e_3$ ، $\vec b=2\vec e_1+\vec e_2-2\vec e_3$ و $\vec c=-2\vec e_2+\vec e_3$ آن گاه

الف) $\vec a\cdot\vec b=(1)(2)+(0)(1)+(2)(-2)=-2$

ب) $(\vec a\cdot\vec c)\vec b=[(1)(0)+(0)(-2)+(2)(1)](2\vec e_1+\vec e_2-2\vec e_3)$

$$=4\vec e_1+2\vec e_2-4\vec e_3$$

ج) $\|\vec a\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$

د) $\vec u_{\vec a}=\dfrac{\vec a}{\|\vec a\|}=\Big(\dfrac{1}{\sqrt5}\Big)\vec e_1+\Big(\dfrac{2}{\sqrt5}\Big)\vec e_3$

ه) $\cos\measuredangle(\vec a,\vec b)=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\|\vec a\|\|\vec b\|}=\dfrac{-2}{3\sqrt5}$

پایه‌های جهت‌دار شده

فرض کنید $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ و $(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$ پایه‌های مرتب شده متعامد یکه اند و تصویر سه تایی $(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$ چنان دوران یابد که $\vec{g}_1$ و $\vec{g}_2$ به ترتیب منطبق بر $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ شوند. آنگاه $\vec{g}_3$ یا منطبق بر $\vec{e}_3$ است که در این حالت گوییم $(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$ هم جهت با $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ است یا $\vec{g}_3$ در جهت مخالف $\vec{e}_3$ است که در این حالت گوییم پایه‌ها دارای جهت متضادند. برای فرموله کردن مفهوم جهت نه تنها برای پایه‌های متعامد یکه بلکه برای پایه‌های دلخواه، به شرح زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ و $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ پایه‌های مرتب شده اند و

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\,\vec{u}_i \qquad (14)$$

آنگاه $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ با $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ هم جهت است، هرگاه $\det(a_{ij})>0$.

قضیه ۸. جهت بیان شده در بالا روی مجموعه تمام پایه‌های مرتب شده در $\mathbb{R}^3$ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات. برای رابطه هم ارزی بودن، جهت دار شده، روی مجموعه تمام پایه‌های مرتب در $\mathbb{R}^3$ سه خاصیت زیر را بررسی می‌کنیم.

(i) $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ با $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ هم جهت است، برای هر پایه $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$. زیرا قرار می‌دهیم

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}\,\vec{v}_i \qquad j=1,2,3 \qquad (15)$$

چون $\det(\delta_{ij})=1>0$ پس $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ دارای همان جهت $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ است.

(ii) اگر $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ هم جهت با $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ باشد، آنگاه $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ نیز دارای همان جهت $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ است. زیرا، فرض کنید $\vec{v}_j=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}\,\vec{u}_i$ و $\vec{u}_j=\sum_{i=1}^{3}b_{ij}\,\vec{v}_i$. قرار می‌دهیم

$$\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}\,\vec{u}_i = \sum_{k=1}^{3} b_{kj}\,\vec{v}_k \qquad (16)$$

که در اینجا نام اندیس را از i به k تغییر داده‌ایم. همچنین $\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}\vec{u}_i$. با جایگزینی داریم

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}\vec{u}_i = \sum_{k=1}^{3} b_{kj} \sum_{i=1}^{3} a_{ik}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{3} \left[\sum a_{ik} b_{kj}\right]\vec{u}_i$$

چون $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ مستقل‌اند پس

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$$

بنابراین

$$\det(\delta_{ij}) = \det\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}\right) = \det(a_{ij})\,\det(b_{ij})$$

در نتیجه

$$\det(b_{ij}) = \frac{\det(\delta_{ij})}{\det(a_{ij})} = \frac{1}{\det(a_{ij})} \qquad (۱۷)$$

حال چون $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ است، پس $\det(a_{ij})>0$، بنابراین $\det(b_{ij})>0$ یعنی $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ است.

(iii) اگر $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ و $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ باشد، آنگاه $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ است، زیرا فرض کنید $\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}\vec{u}_i$ و $\vec{w}_j = \sum_{k=1}^{3} b_{kj}\vec{v}_k$. با جایگزینی داریم

$$\vec{w}_j = \sum_{k=1}^{3} b_{kj} \sum_{i=1}^{3} a_{ik}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}\right)\vec{u}_i$$

پس $\vec{w}_j = \sum_{i=1}^{3} c_{ij}\vec{u}_i$ که در آن برای $i, j = 1,2,3$، $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$. علاوه بر آن

$$\det(c_{ij}) = \det\left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}\right) = \det(a_{ij})\,\det(b_{ij}) \qquad (۱۸)$$

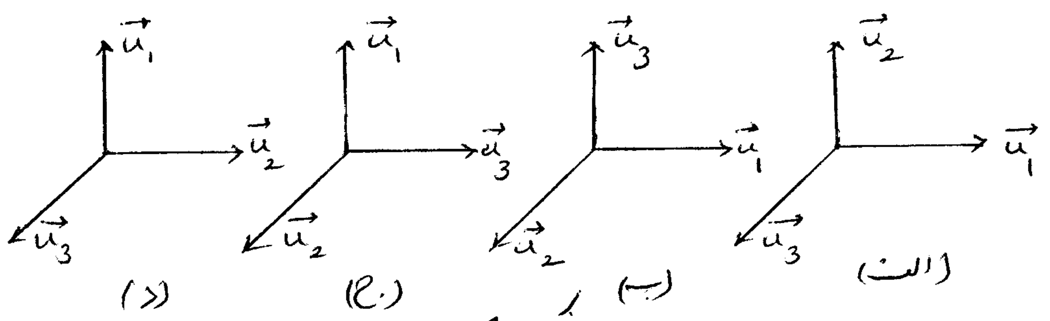
چون $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ است و $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ هم‌جهت با $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ است پس $\det(b_{ij})>0$ و $\det(a_{ij})>0$ بنابراین $\det(c_{ij})>0$. در نتیجه پایه $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ هم‌جهت با پایه $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ است.

پس رابطه هم‌جهت بودن در مجموعه تمام پایه‌های مرتب در $\mathbb{R}^3$ یک رابطه هم‌ارزی است.

رابطه هم‌ارزی در قضیه ۸، خانواده پایه‌های مرتب در $\mathbb{R}^3$ را دقیقاً به دو کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند، پایه‌ها در یک کلاس دارای جهت یکسان هستند و پایه‌های مرتب در کلاس‌های مختلف دارای جهت‌های مختلف می‌باشند.

برای تمایز بین جهت‌ها به طور هندسی، گوییم $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ یک پایه راستگرد است هرگاه به همین ترتیب از قانون دست راست تبعیت کند، در غیر این صورت گوییم دستگاه چپگرد است.

مثال ۱۹. سه‌تایی $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ در شکل ۹، (الف) و (ج) پایه‌های راستگردند و در شکل ، (ب) و (د) پایه‌ها چپگردند.



شکل ۹

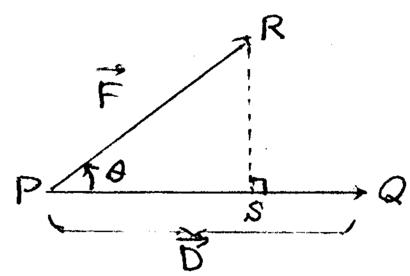
توضیح. در تمام مطالب بیان شده از این قسمت به بعد، فرض بر این است که (دستگاه) پایه متعامد یکه راستگرد است.

به عنوان کاربردی از تصویرها در فیزیک، می‌توان کار انجام شده را محاسبه نمود. می‌دانیم که کار انجام شده در اثر نیروی ثابت F در حرکت جسمی به اندازه d برابر است با $W=Fd$، اما این رابطه زمانی برقرار است که نیرو در امتداد خط حرکت جسم باشد. حال، فرض کنید نیروی ثابت، بردار $\vec{F} = \vec{PR}$ با نقطه ابتدایی مؤثر بر مسیر حرکت جسم است. شکل ۱۰ را ببینید. اگر نیرو جسم را از نقطه P تا Q جابجا کند، آن‌گاه بردار جابجایی $\vec{D} = \vec{PQ}$ است. کار انجام شده توسط این نیرو حاصل ضرب مولفه نیرو در امتداد $\vec{D}$ در فاصله جابجایی است.

$$W = (\|\vec F\| \cos\theta)\,\|\vec D\|$$

در نتیجه

$$W = \|\vec F\|\,\|\vec D\| \cos\theta = \vec F \cdot \vec D$$



شکل ۱۰

مثال ۲۰. در اثر نیروی $\vec F = 3\vec e_1 + 4\vec e_2 + 5\vec e_3$ شیئی از نقطه $P(2,1,0)$ تا نقطه $Q(4,6,2)$ جابجا شده است. کار انجام شده را بدست آورید.

حل. بردار جابجایی $\vec D = \langle 2,5,2\rangle$ است، پس کار انجام شده W برابر است با

$$W = \vec F \cdot \vec D = \langle 3,4,5\rangle \cdot \langle 2,5,2\rangle$$

$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

اگر واحد طول متر و اندازه نیرو برحسب نیوتن داده شده باشد، آنگاه کار انجام شده 36 ژول است.

حاصل ضرب برداری بردارها

تعریف ۸. فرض کنید $(\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ یک پایه متعامد یکه راستگرد است و فرض کنید $\vec a = a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3$ و $\vec b = b_1\vec e_1 + b_2\vec e_2 + b_3\vec e_3$ باشند، حاصل ضرب برداری $\vec a$ و $\vec b$ را با $\vec a \times \vec b$ نشان داده و بردار

$$\vec a \times \vec b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec e_3 \qquad (19)$$

است.

تعریف ضرب برداری به صورت بالا روشی قدی برای تعریف است. دلیل این است که تعریف به صورت فوق دارای خواص بسیار مفیدی است. به عنوان مثال خواهیم دید که بردار $\vec a \times \vec b$

عمود بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

برای به خاطر سپردن بهتر رابطه ضرب برداری داده شده در تعریف ۸، مختصری از مبحث دترمینان را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۹. دترمینان مرتبه دو توسط

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad (۲۰)$$

تعریف می‌شود.

به عنوان مثال

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

دترمینان مرتبه سه را می‌توان برحسب دترمینان‌های مرتبه دو به صورت زیر تعریف کرد.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (۲۱)$$

مشاهده می‌شود که هر جمله در طرف راست (۲۱) برحسب عدد a_i در سطر اول دترمینان در ضرب آن در یک دترمینان از مرتبه دوم به دست آمده از حذف سطر و ستون محل حضور a_i است. باید به علامت منفی در جمله دوم طرف راست (۲۱) نیز توجه کرد. برای مثال

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (1)(0-4) - 2(6+5) + (-1)(12-0) = -38.$$

در این حالت گوییم بسط دترمینان برحسب سطر اول انجام شده است. باید توجه داشت که می‌توان دترمینان را برحسب هر سطر و یا هر ستونی بسط داد. علامت دترمینان‌های مرتبه دوم از $(-1)^{i+j}$ حاصل می‌شود که i و j نشان دهنده شماره سطر و ستون حذف شده است.

حال اگر عاملهای طرف راست معادله (۱۹) را برحسب دترمینانهای مرتبه دوم بازنویسی

کنیم، داریم

$$\vec a\times\vec b=\vec e_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec e_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec e_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec e_1 & a_1 & b_1\\ \vec e_2 & a_2 & b_2\\ \vec e_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

مثال ۲۱. فرض کنید $\vec a=\vec e_1-\vec e_2$ ، $\vec b=\vec e_2+2\vec e_3$ و $\vec c=-2\vec e_1-\vec e_3$. آن گاه

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec e_1 & 1 & 0\\ \vec e_2 & -1 & 1\\ \vec e_3 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2\vec e_1-2\vec e_2+\vec e_3$$

$$\vec b\times\vec a=\begin{vmatrix}\vec e_1 & 0 & 1\\ \vec e_2 & 1 & -1\\ \vec e_3 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\vec e_1+2\vec e_2-\vec e_3$$

$$\vec b\times\vec c=\begin{vmatrix}\vec e_1 & 0 & -2\\ \vec e_2 & 1 & 0\\ \vec e_3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\vec e_1+4\vec e_2+2\vec e_3$$

قضیه ۹. الف) $\|\vec a\times\vec b\|=\|\vec a\|\|\vec b\|\sin\theta$ که در آن $\theta=\measuredangle(\vec a,\vec b)$

ب) $(\vec a\times\vec b)\perp\vec a$ و $(\vec a\times\vec b)\perp\vec b$

ج) اگر $\vec a\times\vec b\neq 0$ آن گاه $(\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b)$ یک سه تایی مستقل خطی راستگرد است.

اثبات. الف) فرض کنید $\vec a=a_1\vec e_1+a_2\vec e_2+a_3\vec e_3$ و $\vec b=b_1\vec e_1+b_2\vec e_2+b_3\vec e_3$. در این صورت

$$\|\vec a\times\vec b\|^2=(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec a\times\vec b)$$

$$=[(a_2b_3-a_3b_2)\vec e_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec e_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec e_3]$$

$$\cdot[(a_2b_3-a_3b_2)\vec e_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec e_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec e_3]$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2$$

$$-2a_2b_2a_3b_3-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_2b_2$$

و

$$\begin{aligned}\|a\|^2\|b\|^2-\|\vec a.\vec b\|^2&=(\vec a.\vec a)(\vec b.\vec b)-(\vec a.\vec b)(\vec a.\vec b)\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2\\&\quad-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|\vec a\times\vec b\|^2&=\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2-\|\vec a.\vec b\|^2\\&=\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2-\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2\cos^2\theta\\&=\|\vec a\|\|\vec b\|(1-\cos^2\theta)\\&=\|\vec a\|^2\|\vec b\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

چون برای $0\le\theta\le\pi$ ، $\sin\theta\geqslant 0$ پس $\|\vec a\times\vec b\|=\|\vec a\|\,\|\vec b\|\sin\theta$.

ب) فرض کنید $\vec a=a_1\vec e_1+a_2\vec e_2+a_3\vec e_3$ ، $\vec b=b_1\vec e_1+b_2\vec e_2+b_3\vec e_3$ ، پس

$$\begin{aligned}(\vec a\times\vec b).\vec a&=[(a_2b_3-a_3b_2)\vec e_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec e_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec e_3].(a_1\vec e_1+a_2\vec e_2+a_3\vec e_3)\\&=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3-a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0\end{aligned}$$

پس $(\vec a\times\vec b)\perp\vec a$. به طور مشابه $(\vec a\times\vec b)\perp\vec b$.

ج) دترمینان ستون‌های $(\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b)$ عبارت است از

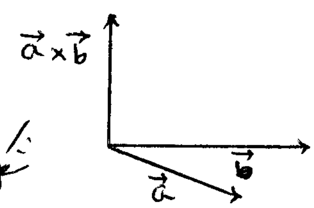
$$\det\begin{bmatrix}a_1&b_1&(a_2b_3-a_3b_2)\\a_2&b_2&(a_3b_1-a_1b_3)\\a_3&b_3&(a_1b_2-a_2b_1)\end{bmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=\|\vec a\times\vec b\|^2$$

اگر $\vec a\times\vec b\neq 0$ آنگاه $\|\vec a\times\vec b\|^2>0$ و در نتیجه $(\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b)$ دارای همان جهت $(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)$ است .

قضیه ۱۵. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ اگر و تنها اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابسته خطی باشند.

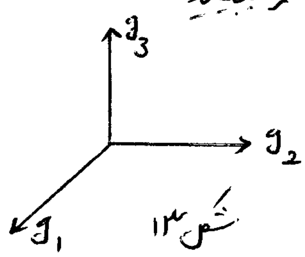
اثبات. چون $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ اگر و تنها اگر $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta=0$ و اگر و تنها اگر $\|\vec{a}\|=0$ یا $\|\vec{b}\|=0$ یا $\theta=0$ یا $\theta=\pi$، از (الف) قضیه و قسمت آخر نامساوی کشی شوارتز (یعنی $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ اگر و تنها اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ وابسته خطی باشند) حکم حاصل می‌شود.

نتیجه ۱. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وابسته خطی نباشند یعنی $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$، قضیه ۹ نتیجه می‌دهد که $\vec{a}\times\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$ یک سه‌تایی راستگرد است. شکل

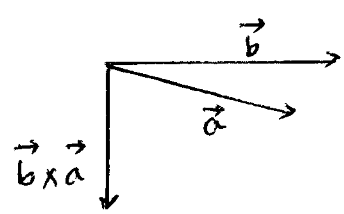


شکل ۱۱

به وضوح ضرب برداری در حالت کلی جابجایی نیست. گرچه $\vec{b}\times\vec{a}$ هم‌اندازه با $\vec{a}\times\vec{b}$ است (قضیه ۹ (الف)) و موازی $\vec{a}\times\vec{b}$ می‌باشد (قضیه ۹ (ب)) دارای جهت مخالف‌اند (قضیه (ج)). بنابراین $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$. شکل ۱۲ را ببینید.



شکل ۱۳



شکل ۱۲

نتیجه ۲. دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

اثبات. دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\theta=0$ یا $\theta=\pi$. در هر حالت این معادل است با $\sin\theta=0$ پس $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

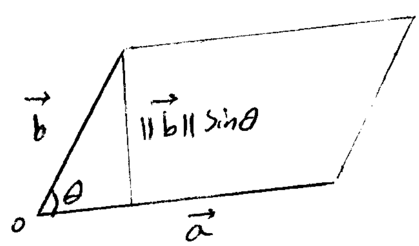
مثال ۲۲. برای بردارهای متعامد یکه $(\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3)$، همانگونه که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، از قضیه داریم

$$\vec{j}_1\times\vec{j}_1=\vec{0},\qquad \vec{j}_2\times\vec{j}_1=-\vec{j}_3,\qquad \vec{j}_3\times\vec{j}_1=\vec{j}_2$$
$$\vec{j}_1\times\vec{j}_2=\vec{j}_3,\qquad \vec{j}_2\times\vec{j}_2=\vec{0}\qquad\qquad \vec{j}_3\times\vec{j}_2=-\vec{j}_1$$
$$\vec{j}_1\times\vec{j}_3=-\vec{j}_2,\qquad \vec{j}_2\times\vec{j}_3=\vec{j}_1\qquad\qquad \vec{j}_3\times\vec{j}_3=\vec{0}$$

تعبیر هندسی قضیه ۹ (الف) را می‌توان در شکل ۱۴ دید. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نشان دهنده پاره خط‌های جهت‌دار با نقطه شروع یکسان باشند، آنگاه دو بردار فوق متوازی الاضلاعی با قاعده $\|\vec{a}\|$ و ارتفاع $\|\vec{b}\|\sin\theta$ می‌سازند. پس مساحت این متوازی الاضلاع به صورت

$$A=\|\vec{a}\|\left(\|\vec{b}\|\sin\theta\right)=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

به دست می‌آید.



شکل ۱۴

مثال ۲۳. مساحت مثلث با رئوس $P(1,4,6)$، $Q(-2,5,-1)$ و $R(1,-1,1)$ را به دست آورید.

حل. بردارهای متناظر به پاره خط‌های جهت‌دار $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ عبارتند از:

$$\vec{a}=\langle -3,1,-7\rangle,\qquad \vec{b}=\langle 0,-5,-5\rangle$$

حاصل ضرب برداری دو بردار را به دست می‌آوریم

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -3 & 1 & -7\\ 0 & -5 & -5\end{vmatrix}=(-5-35)\vec{e}_1-(15-0)\vec{e}_2+(15-0)\vec{e}_3=-40\vec{e}_1-15\vec{e}_2+15\vec{e}_3$$

حال مساحت مثلث مورد نظر نصف مساحت متوازی الاضلاع با اضلاع مجاور $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ است. بنابراین

$$A=\frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-40)^2+(-15)^2+15^2}=\frac{5\sqrt{82}}{2}$$

نکته . حاصلضرب برداری بردارها علاوه بر اینکه دارای خاصیت جابجایی نیست، شرکت‌پذیر نیز نمی‌باشد. یعنی در حالت کلی $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود داریم

$$\vec{g}_1\times(\vec{g}_1\times\vec{g}_2)=\vec{g}_1\times\vec{g}_3=-\vec{g}_2$$

در حالی که

$$(\vec{g}_1\times\vec{g}_1)\times\vec{g}_2=\vec{0}\times\vec{g}_2=\vec{0}$$

قضیه ۱۱ . فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای دلخواه و k یک اسکالر است. در این صورت

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (پادجابجایی)

ب) $\vec{a}\times(k\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$

ج) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (توزیع‌پذیری)

د) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

ه) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

و) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

ز) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

اثبات . با فرض $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$، $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ و $\vec{c}=\langle c_1,c_2,c_3\rangle$، اثبات به طور مستقیم حاصل می‌شود. به عنوان مثال قسمت (و) را ثابت می‌کنیم.

(و)
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\\&=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3\\&=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.\end{aligned}$$

مثال ۲۴. مثلث ABC در شکل ۱۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\vec{a}=\vec{BC}$، $\vec{b}=\vec{AC}$، $\vec{c}=\vec{AB}$، $\alpha=\measuredangle(\vec{b},\vec{c})$، $\beta=\measuredangle(\vec{c},\vec{a})$ و $\gamma=\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ است. واضح است

که $\vec{c}=\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$. داریم

$$\vec{o}=\vec{c}\times\vec{c}=\vec{c}\times(\vec{b}-\vec{a})=\vec{c}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}$$

یا $\vec{c}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$. به طور مشابه

$$\vec{c}\times\vec{b}=(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

بنابراین

$$\vec{c}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}$$

پس

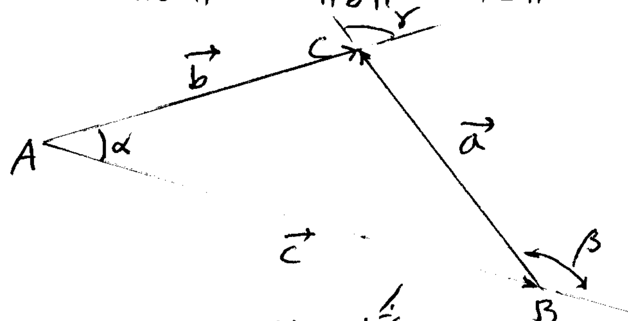
$$\|\vec{c}\times\vec{b}\|=\|\vec{c}\times\vec{a}\|=\|\vec{b}\times\vec{a}\|$$

یعنی

$$\|\vec{c}\|\,\|\vec{b}\|\sin\alpha=\|\vec{c}\|\,\|\vec{a}\|\sin\beta=\|\vec{b}\|\,\|\vec{a}\|\sin\gamma$$

که قانون سینوسها را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\sin\alpha}{\|\vec{a}\|}=\frac{\sin\beta}{\|\vec{b}\|}=\frac{\sin\gamma}{\|\vec{c}\|}$$



شکل ۱۵

ضربهای سه‌تایی و اتحادهای برداری

تعریف ۱۰. حاصل‌ضرب $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$ را حاصل‌ضرب سه‌تایی اسکالر یا مخلوط نامیم.

توجه کنید که نوشتن پرانتز لزومی ندارد، به این دلیل که $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ حاصل‌ضرب اسکالر بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ است. درضمن می‌توان این حاصل‌ضرب را برحسب دترمینان نیز

به دست آورد. فرض کنید $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ ، $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ و $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$
آن‌گاه

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot \det\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & b_1 & c_1 \\ \vec{e}_2 & b_2 & c_2 \\ \vec{e}_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(c_3b_1 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

با توجه به خواص دترمینان داریم

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} = -(\vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{c}) = -(\vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{a}) = -(\vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b}) \qquad (۲۳)$$

بالاخص می‌توان دید که $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.

بنابراین می‌توان نقطه و ضرب را در نمادگذاری حاصل‌ضرب سه‌تایی اسکالر حذف نمود و از نماد

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$$

برای راحتی در محاسبات استفاده کرد.

قضیه ۱۲. $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$ اگر و تنها اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ وابسته خطی باشند.

قضیه ۱۳. الف) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

ب) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

ج) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$

اثبات. الف) فرض کنید $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ و $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ است.
آن‌گاه

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\times[(b_2c_3-b_3c_2)\vec{e}_1+(b_3c_1-c_3b_1)\vec{e}_2+(b_1c_2-b_2c_1)\vec{e}_3]$$

$$=(a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3)\vec{e}_1$$

$$+(a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1)\vec{e}_2$$

$$+(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_2b_3c_2)\vec{e}_3$$

و

$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)$$

$$-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3)$$

$$=(a_2b_1c_2-a_3b_1c_3-a_2c_1b_2-a_3c_1b_3)\vec{e}_1$$

$$+(b_2a_1c_1+b_2a_3c_3-c_2a_1b_1-c_2a_3b_3)\vec{e}_2$$

$$+(b_3a_1c_1+b_3a_2c_2-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2)\vec{e}_3$$

$$=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

ب) فرض کنید $\vec{u}=\vec{c}\times\vec{d}$ ، در این صورت

$$\vec{a}\times\vec{b}.\vec{u}=\vec{a}.\vec{b}\times\vec{u}=\vec{a}.[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]$$

$$=\vec{a}.[(\vec{b}.\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{d}]$$

$$=(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$$

ج) فرض کنید $\vec{u}=\vec{a}\times\vec{b}$ ، در این صورت

$$\vec{u}\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{u}.\vec{d})\vec{c}-(\vec{u}.\vec{c})\vec{d}$$

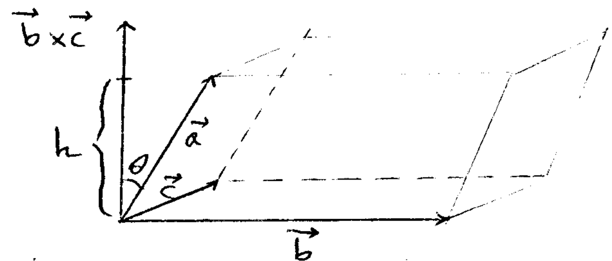
$$=(\vec{a}\times\vec{b}.\vec{d})\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c})\vec{d}$$

$$=[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$$

قضیه ۱۴. حجم متوازی السطوح تعیین شده توسط بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر با اندازه حاصل ضرب سه تایی اسکالر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، به عبارت دیگر

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

اثبات. متوازی السطوح ساخته شده بر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در شکل ۱۶ را در نظر بگیرید.



شکل ۱۶

مساحت قاعده متوازی السطوح برابر با $A=\|\vec{b}\times\vec{c}\|$ است. اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ باشد آنگاه ارتفاع h متوازی السطوح برابر $h=\|\vec{a}\|\,|\cos\theta|$ است. (برای $\theta>\frac{\pi}{2}$ از $|\cos\theta|$ بجای $\cos\theta$ استفاده می‌کنیم). بنابراین حجم متوازی السطوح برابر

$$V=Ah=\|\vec{b}\times\vec{c}\|\,\|\vec{a}\|\,|\cos\theta|=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

است.

مثال ۲۵. نشان دهید بردارهای $\vec{a}=\langle 1,4,-7\rangle$، $\vec{b}=\langle 2,-1,4\rangle$ و $\vec{c}=\langle 0,-9,18\rangle$ در یک صفحه قرار دارند.

حل. حاصلضرب مختلط اسکالر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بدست می‌آوریم.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$=1(18)-4(36)-7(-18)=0$$

بنابراین حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ صفر است. بعبارت دیگر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم صفحه‌اند (در یک صفحه قرار دارند).