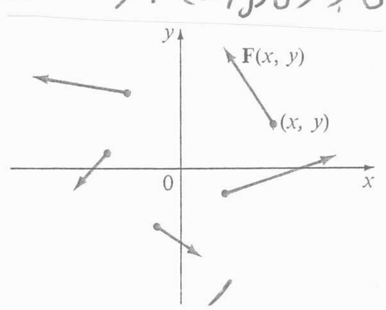
فصل ششم . آنالیز برداری

میدان های برداری و انتگرال های منحنی الخط

در فصل چهارم، توابع برداری با دامنه‌های حقیقی و برد برداری را مورد بررسی قرار دادیم. در آن فصل، نوعی توابع نیز مورد بررسی قرار گرفتند که دامنه تعریف آنها مجموعه‌ای از نقاط در $\mathbb{R}^2$ (یا $\mathbb{R}^3$) بود و برد این توابع نیز مجموعه‌ای از بردارها در E_2 (یا E_3) بود و این گونه توابع را میدان برداری نامیدیم. در اینجا به دلیل اهمیت این توابع، مجدداً آنها را تعریف کرده و خواص این توابع را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱ . فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ است (D یک ناحیه مسطح). یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ تابع $\vec{F}$ تعریف شده روی D است که به هر نقطه (x,y) در D یک بردار دوبعدی $\vec{F}(x,y)$ را متناظر می‌کند.

بهترین روش برای نمایش یک میدان برداری رسم بردارهای نمایش موقعیت $\vec{F}(x,y)$ با نقطه شروع از (x,y) است. البته، رسم تمام بردارهای $\vec{F}(x,y)$ غیرممکن است، اما می‌توان با رسم تعدادی از چنین بردارهایی تا حدودی میدان برداری $\vec{F}(x,y)$ را شناخت (شکل ۱).



شکل ۱

چون $\vec{F}(x,y)$ یک بردار دوبعدی است، می‌توان آن را برحسب توابع مولفه‌ای P و Q به صورت زیر شرح داد

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\,\vec{i}+Q(x,y)\,\vec{j}=\langle P(x,y),Q(x,y)\rangle$$

یا به اختصار $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$. توجه داریم که P و Q توابع اسکالر از دو متغیرند و گاهی اوقات میدان‌های اسکالری برای تمایز با میدان های برداری، نامیده می‌شوند.

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

تعریف ۲. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ است. یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ تابع $\vec{F}$ است که به هر نقطه (x,y,z) در E یک بردار سه‌بعدی $\vec{F}(x,y,z)$ در E_3 (یا $\mathbb{R}^3$) را متناظر می‌کند.

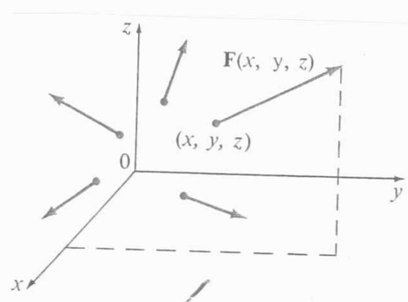
یک میدان برداری $\vec{F}$ روی $\mathbb{R}^3$ در شکل ۲ نمایش داده شده است. می‌توانیم این میدان برداری را برحسب توابع مولفه‌ای P، Q و R به صورت

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

نمایش دهیم.

به عنوان یک تابع برداری، که در فصل ۴ مورد بررسی قرار گرفت، می‌توانیم پیوستگی میدان‌های برداری را تعریف کرده و نشان دهیم که میدان برداری $\vec{F}$ (در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$) پیوسته است اگر و تنها اگر توابع مولفه‌ای آن پیوسته باشند.

گاهی اوقات نقطه (x,y,z) در E (یا نقطه (x,y) در D) را با بردار موقعیت آن به صورت $\vec{r}=\langle x,y,z\rangle$ (یا $\vec{r}=\langle x,y\rangle$) نمایش می‌دهیم و از $\vec{F}(\vec{r})$ بجای $\vec{F}(x,y,z)$ (یا در $\mathbb{R}^2$ بجای $\vec{F}(x,y)$) استفاده می‌کنیم. بنابراین $\vec{F}$ تابعی است که بردار $\vec{F}(\vec{r})$ را به بردار $\vec{r}$ متناظر کرده است.



شکل ۲

مثال ۱. یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ توسط

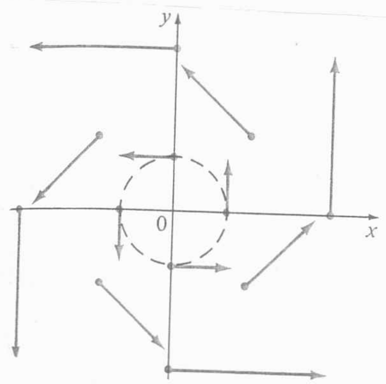
$$\vec{F}(x,y)=-y\vec{i}+x\vec{j}$$

تعریف شده است. میدان برداری $\vec{F}$ را با رسم برخی از بردارهای $\vec{F}(x,y)$ توصیف کنید.

حل. مقدار در شکل ۳ نمایش داده شده است. مشاهده می‌کنیم که بردارها به یک دایره با مرکزی در مبدا مماس‌اند. برای رسیدن به این نتیجه، بردار موقعیت $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ را در بردار $\vec{F}(r)=\vec{F}(x,y)$

ضرب نقطه‌ای می‌کنیم، داریم

$$\vec r \cdot \vec F(\vec r) = (x\vec i + y\vec j)\cdot(-y\vec i + x\vec j) = -xy + xy = 0$$



شکل ۳

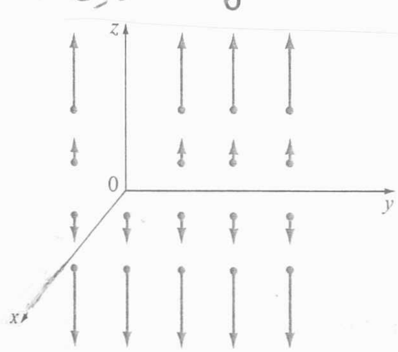
که نشان می‌دهد $\vec F(x,y)$ بر بردار موقعیت $\langle x,y\rangle$ عمود است. و بنابراین مماس بر دایره‌ای با مرکز مبدا و شعاع $\|\vec r\| = \sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد. علاوه بر آن توجه داریم که

$$\|\vec F(x,y)\| = \sqrt{(-y)^2+x^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \|\vec r\|$$

پس اندازه بردار $\vec F(\vec r)$ برابر با شعاع دایره مورد نظر است.

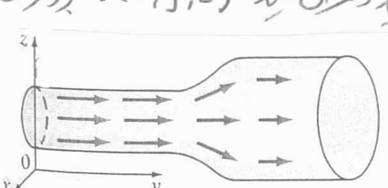
مثال ۲. میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ داده شده توسط $\vec F(x,y,z) = z\vec k$ را رسم کنید.

حل: نمودار $\vec F$ در شکل ۴ نمایش داده شده است. توجه کنید تمام بردارها قائم بوده و به طرف بالای صفحه xy و به طرف پایین صفحه xy می‌باشند، برحسب اینکه z مثبت یا منفی باشد، اندازه این بردارها با افزایش فاصله آنها از صفحه xy، افزایش می‌یابد.



شکل ۴

مثال ۳. جریان یک سیال را در امتداد یک لوله تصور کنید. فرض کنید $\vec V(x,y,z)$ بردار سرعت سیال در نقطه (x,y,z) است. در این صورت $\vec V$ یک بردار را به هر نقطه (x,y,z) در دامنه معین E (درون لوله) متناظر می‌کند. پس $\vec V$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ است



شکل ۵

که به میدان سرعت معروف می‌باشد. تندی در هر نقطه داده شده برابر با طول بردار سرعت در آن نقطه است (شکل ۵)

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

مثال ۴. قانون جاذبه نیوتن بیان می‌کند که اندازه نیروی جاذبه بین دو شیئی با جرم‌های m و M برابر است با

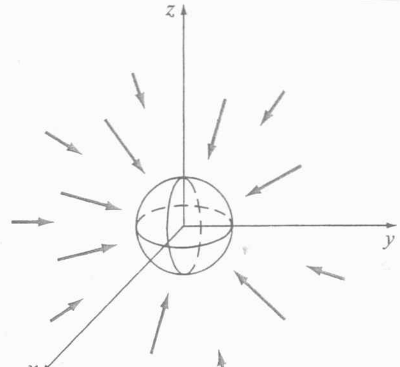
$$\|\vec{F}\| = \frac{mMG}{r^2}$$

که در آن r فاصله بین اشیاء و G ثابت جاذبه است. فرض کنید شیئی با جرم M در مکان مبداء در $\mathbb{R}^3$ قرار دارد (به عنوان مثال M می‌تواند جرم زمین باشد که در مبداء $\mathbb{R}^3$ قرار دارد و مبداء مرکز زمین است) بردار موقعیت شیئی با جرم m را با $\vec{r}=\langle x,y,z\rangle$ نشان می‌دهیم. در این صورت $r=\|\vec{r}\|$، پس $r^2=\|\vec{r}\|^2$. نیروی جاذبه روی شیئی دوم به طرف مبداء اثر می‌کند و بردار یکه در این جهت $-\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ است. بنابراین نیروی جاذبه روی شیئی در مکان $\vec{r}=\langle x,y,z\rangle$ برابر

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{mMG}{\|\vec{r}\|^3}\,\vec{r} \qquad (1)$$

است (شکل ۶). تابع داده شده توسط معادله (۱) مثالی از یک میدان برداری است که آن را میدان جاذبه نامند، زیرا به هر نقطه $\vec{r}$ در فضا یک بردار (یعنی نیروی $\vec{F}(\vec{r})$) را متناظر می‌کند. فرمول (۱) روشی برای نوشتن میدان جاذبه است، اما می‌توان آن را برحسب توابع مولفه‌ای با توجه به $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ نوشت.

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{i} + \frac{-mMGy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{j} + \frac{-mMGz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$



شکل ۶

مثال ۵. فرض کنید شارژ الکتریکی Q در مبدأ مشخص است. طبق قانون کلمب، نیروی الکتریکی $\vec{F}(\vec{r})$ ساطع شده از این شارژ روی شارژ q در مکان (x,y,z) با بردار موقعیت $\vec{r}=\langle x,y,z\rangle$ عبارت است از:

$$\vec{F}(\vec{r})=\frac{\varepsilon q Q}{\|\vec{r}\|^3}\,\vec{r} \qquad (۲)$$

که در آن ε ثابت است (و وابسته به واحدهای مورد استفاده می‌باشد). برای شارژهای مشابه داریم $qQ>0$ و نیرو repulsive است. برای شارژهای غیرمشابه داریم $qQ<0$ و نیرو attractive است.

به تشابه فرمولهای (۱) و (۲) توجه کنید. هر دو میدانهای برداری مثالهایی از میدانهای نیرو می‌باشند.
بجای نیروی الکتریکی $\vec{F}$، معمولاً نیرو بر واحد شارژ را در نظر می‌گیرند

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{q}\vec{F}(\vec{r})=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}$$

پس $\vec{E}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ است که آن را میدان الکتریکی Q نامیم.

مثال ۶. اگر f تابعی اسکالر از دو متغیر باشد، گرادیان f که با $\vec{\nabla} f$ (یا $\operatorname{grad} f$) نمایش داده می‌شود، توسط

$$\vec{\nabla} f(x,y)=f_x(x,y)\,\vec{i}+f_y(x,y)\,\vec{j}$$

تعریف می‌شود. بنابراین $\vec{\nabla} f$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ است و آن را میدان برداری گرادیان نامیم. به عنوان مثال، اگر $f(x,y)=x^2y-y^3$ باشد آنگاه میدان برداری گرادیان توسط

$$\vec{\nabla} f(x,y)=2xy\,\vec{i}+(x^2-3y^2)\,\vec{j}$$

داده می‌شود. به طور مشابه اگر f تابعی از سه متغیر باشد، گرادیان آن یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ است که توسط

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=f_x(x,y,z)\,\vec{i}+f_y(x,y,z)\,\vec{j}+f_z(x,y,z)\,\vec{k}$$

داده می‌شود.

تعریف ۳. میدان برداری $\vec{F}$ را یک میدان برداری نگهدار (پایا یا کنسرواتیو) نامیم هرگاه تابع اسکالری مانند f وجود داشته باشد به طوری که $\vec{F}=\vec{\nabla} f$. در این حالت تابع f

را تابع پتانسیل برای $\vec{F}$ نامیم.

توجه کنید که تمام میدان‌های برداری، لزوماً نگهدار نیستند، اما میدان‌های برداری نگهدار در فیزیک جایگاه ویژه‌ای برخوردارند. برای مثال، میدان جاذبه $\vec{F}$ نگهدار است زیرا اگر تعریف کنیم

$$f(x,y,z)=\frac{mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

آنگاه،

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\\ &= \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{i}+\frac{-mMGy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{j}+\frac{-mMGz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}\\ &= \vec{F}(x,y,z).\end{aligned}$$

در بخش‌های بعد، محک‌هایی لازم برای تعیین نگهدار بودن یک میدان برداری بیان خواهیم کرد.

انتگرال‌های منحنی‌الخط

در این بخش، انتگرالی مشابه با انتگرال توابع از یک متغیر را تعریف می‌کنیم که بجای انتگرال‌گیری روی $[a,b]$، محدوده انتگرال‌گیری منحنی C است. چنین انتگرال‌هایی را انتگرال‌های منحنی‌الخط نامیم.

منحنی مسطح C با معادلات پارامتری

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad a\leq t\leq b \tag{۳}$$

را در نظر بگیرید. به طور معادل، می‌توان منحنی C را با معادله برداری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ در نظر گرفت. فرض کنید C یک منحنی هموار است (یعنی $\vec{r}'$ پیوسته بوده و $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$). فاصله $[a,b]$ را با انتخاب نقاط t_i افراز می‌کنیم

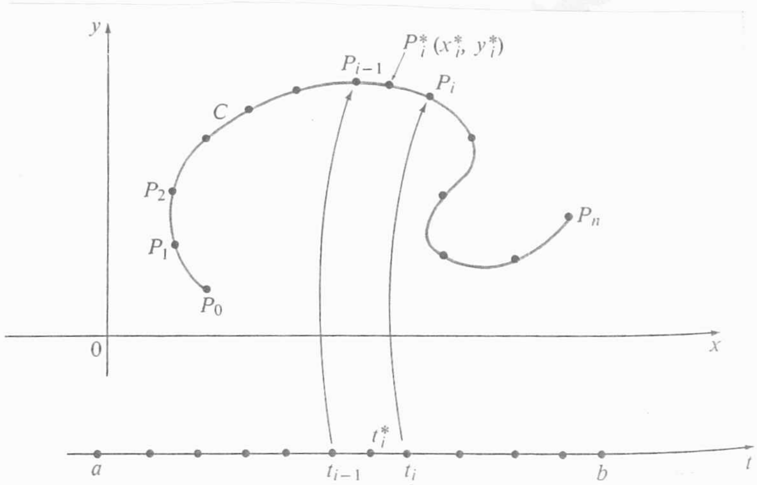
$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$$

متناظر با این افراز، روی منحنی نقاط $P_i(x_i,y_i)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $x_i=x(t_i)$ و $y_i=y(t_i)$. (شکل ۷). نقاط P_i منحنی C را به n زیرقوس به طول‌های $\Delta s_1,\dots,\Delta s_n$ تقسیم می‌کنند. نرم افراز $\|P\|$ بزرگترین طول زیرقوس‌ها را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه $P_i^*(x_i^*,y_i^*)$

را در i امین زیرقوس انتخاب می‌کنیم. این نقطه متناظر به نقطه t_i^* در $[t_{i-1}, t_i]$ است. حال اگر f تابعی از دو متغیر با دامنه تعریف D شامل منحنی C باشد، f را در نقطه (x_i^*, y_i^*) محاسبه کرده و در طول Δs_i از زیرقوس ضرب کرده و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

که شبیه به یک جمع ریمانی است. بنابراین حد این مجموعها را طبق ساختار آنها که شبیه به تعریف انتگرال یک متغیره است را بدست می‌آوریم.



شکل ۷

تعریف ۴. فرض کنید تابع f روی منحنی هموار C داده شده که توسط معادلات (۳) تعریف شده است. انتگرال منحنی‌الخط f در امتداد C عبارت است از

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i \qquad (۴)$$

مشروط به اینکه حد موجود باشد.

می‌توان نشان داد که اگر f تابعی پیوسته باشد آنگاه حد در (۴) موجود است و فرمول زیر را برای محاسبه انتگرال منحنی‌الخط داریم

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (۵)$$

روش بخاطر سپردن رابطه (۵) این است که تمام عبارات برحسب پارامتر t شرح داده شده‌اند. از معادلات پارامتری برای x و y برحسب t استفاده می‌کنیم و از فرمول طول قوس داریم

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

در حالت خاص، اگر C پاره خط واصل بین نقاط $(a,0)$ و $(b,0)$ باشد آن گاه
با استفاده از x به عنوان پارامتر داریم

$$C:\quad x=x,\ y=0 \qquad a\le x\le b$$

و از فرمول (۵) نتیجه می‌شود که

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x,0)\,dx$$

که به انتگرال معمولی تبدیل شد.

مثال ۹. مطلوب است محاسبه $\int_C (2+x^2y)\,ds$ که در آن C نیم دایره بالایی واحد $x^2+y^2=1$ است. (شکل ۸)

حل. دایره واحد را می‌توان به صورت

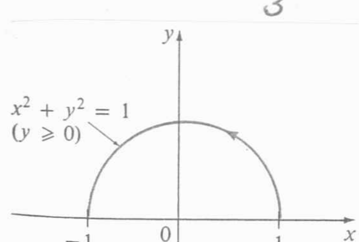
$$x=\cos t,\quad y=\sin t \qquad 0\le t\le 2\pi$$

پارامتری کرد و نیم دایره بالایی دارای معادلات پارامتری

$$x=\cos t,\quad y=\sin t \qquad 0\le t\le \pi$$

است. پس

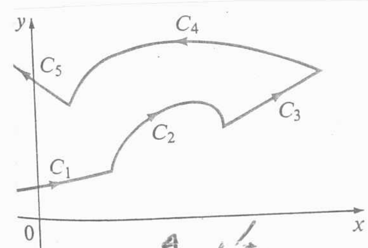
$$\begin{aligned}\int_C (2+x^2y)\,ds&=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt\\&=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\,dt\\&=2\pi+\frac{2}{3}.\end{aligned}$$



شکل ۸

تعریف ۵. منحنی C را یک منحنی هموار تکه‌ای نامیم، هرگاه C اجتماع تعدادی متناهی منحنی‌های هموار $C_1, C_2, \dots, C_n$ باشد، که در آن نقطه انتهایی C_i همان نقطه ابتدایی C_{i+1}

است. (شکل ۹)



شکل ۹

حال فرض کنید C یک منحنی هموار تکه‌ای است، $C=C_1\cup C_2\cup\dots\cup C_n$ که در آن C_i ها هموارند. آنگاه می‌توان انتگرال f در امتداد C را به عنوان مجموع انتگرال های f در امتداد منحنی های هموار C_i تعریف کرد.

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_{C_1} f(x,y)\,ds+\int_{C_2} f(x,y)\,ds+\dots+\int_{C_n} f(x,y)\,ds \qquad (۶)$$

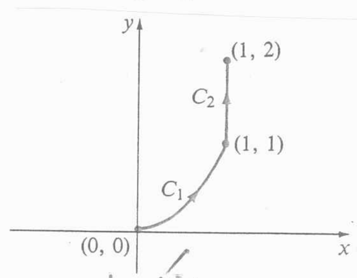
مثال ۷. مطلوب است $\int_C 2x\,ds$ که در آن C شامل قوس C_1 از سهمی $y=x^2$ بین نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ و پاره خط C_2 از $(1,1)$ تا $(1,2)$ است.

حل. منحنی C در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. C_1 نمودار تابعی از x است، پس x را به عنوان پارامتر انتخاب کرده و داریم

$$C_1:\quad x=x,\quad y=x^2 \qquad 0\le x\le 1$$

روی C_2، y را به عنوان پارامتر انتخاب می‌کنیم، پس

$$C_2:\quad x=1,\quad y=y \qquad 1\le y\le 2$$



شکل ۱۰

بنابراین

$$\int_{C_1} 2x\,ds=\int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

و

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy = \int_1^2 2\,dy = 2$$

پس

$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}+2$$

تعبیر فیزیکی ۶. هر تعبیر فیزیکی از انتگرال خطی $\int_C f(x,y)\,ds$ وابسته به تعبیر فیزیکی تابع f است. فرض کنید $\rho(x,y)$ چگالی خطی در نقطهٔ (x,y) از یک سیم نازک که به شکل منحنی C درآمده، باشد. در این صورت جرم قسمتی از سیم از P_{i-1} تا P_i در شکل (۷) تقریباً برابر $\rho(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i$ است و بنابراین جرم کل سیم تقریباً برابر $\sum \rho(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i$ خواهد بود. با ظریف‌تر کردن افرازهای منحنی، جرم m سیم به عنوان مقدار حدی این تقریبها حاصل می‌شود.

$$m=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i^*,y_i^*)\Delta s_i=\int_C \rho(x,y)\,ds$$

به عنوان مثال، اگر $f(x,y)=2+x^2y$ نمایش دهندهٔ چگالی سیم نیم‌دایره‌ای در مثال (۴) باشد، آن‌گاه انتگرال در مثال (۴) جرم سیم را نتیجه می‌دهد.

مرکز جرم سیمی با تابع چگالی ρ در نقطهٔ $(\bar{x},\bar{y})$ است، که در آن

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)\,ds,\qquad \bar{y}=\frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)\,ds \qquad (۷)$$

دیگر تعبیرهای فیزیکی انتگرال‌های خطی در قسمتهای بعدی این فصل به مرور بیان خواهند شد.

با جایگزینی Δs_i با $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ یا $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ در تعریف (۴)، دو نوع دیگر از انتگرال‌های منحنی الخط می‌توان به دست آورد. این انتگرال‌ها را انتگرال‌های خطی تابع f در امتداد منحنی C نسبت به x و y نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\int_C f(x,y)\,dx=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\Delta x_i \qquad (۸)$$

و

$$\int_C f(x,y)\,dy=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*)\Delta y_i \qquad (۹)$$

و انتگرال منحنی الخط $\int_C f(x,y)\,ds$ را انتگرال منحنی الخط در امتداد C نسبت به طول قوس نامیم.

فرمول‌های (۸) و (۹) بیان می‌کنند که انتگرال‌ها نسبت به x و y را نیز می‌توان با شرح جملات برحسب t یعنی $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ ، $dx=x'(t)dt$ ، $dy=y'(t)dt$ محاسبه کرد.

$$\int_C f(x,y)\,dx=\int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt \qquad (۱۰)$$

$$\int_C f(x,y)\,dy=\int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt \qquad (۱۱)$$

گاهی اوقات انتگرال‌های خطی نسبت به x و y باهم اتفاق می‌افتند. در چنین حالاتی، به طور اختصار می‌نویسیم

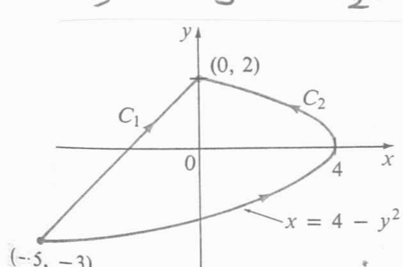
$$\int_C P(x,y)\,dx+\int_C Q(x,y)\,dy=\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \qquad (۱۲)$$

مثال ۸. مطلوب است $\int_C y^2dx+x\,dy$ که در آن

الف) $C=C_1$ پاره خط از $(-5,-3)$ تا $(0,2)$ است و

ب) $C=C_2$ قوس سهمی $x=4-y^2$ از $(-5,-3)$ تا $(0,2)$ است. (شکل ۱۱).

حل. نمودار منحنی‌های C_1 و C_2 در شکل (۱۱) نمایش داده شده‌اند.



شکل (۱۱)

الف) نمایش پارامتری پاره خط به صورت زیر است

$$x=5t-5,\quad y=5t-3,\quad 0\le t\le 1$$

پس $dx=5dt$ ، $dy=5dt$ و از فرمول (۱۲) داریم

$$\int_{C_1} y^2dx+x\,dy=\int_0^1 (5t-3)^2(5dt)+(5t-5)(5dt)$$

$$=5\int_0^1 (25t^2-25t+4)\,dt=-\frac{5}{6}$$

ب) چون سهمی به عنوان تابعی از y داده شده است، y را پارامتر گرفته داریم

$$C_2:\quad x=4-y^2,\qquad y=y\qquad -3\le y\le 2$$

پس $dx=-2y\,dy$ و از فرمول (۱۲) داریم

$$\int_{C_2} y^2dx+x\,dy=\int_{-3}^{2} y^2(-2y)\,dy+(4-y^2)\,dy$$
$$=\int_{-3}^{2}(-2y^3-y^2+4)\,dy=40\tfrac{5}{6}$$

توضیح ۷. توجه داریم که در مثال ۸ جواب‌های متفاوتی به دست آمد، حتی با آنکه دو منحنی دارای نقاط ابتدا و انتهای یکسانی بودند. پس در حالت کلی، مقدار یک انتگرال منحنی الخط نه فقط به نقاط انتهایی منحنی بلکه به مسیر نیز وابسته است. اما در بخش بعد شرایطی را بررسی خواهیم کرد که تحت آن شرایط انتگرال منحنی الخط مستقل از مسیر باشد.

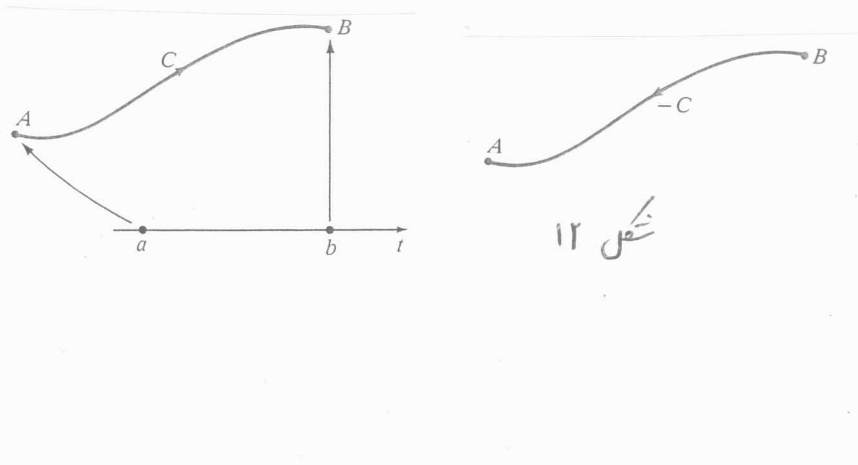
علاوه بر آن، پاسخ‌ها در مثال ۳ وابسته به جهت حرکت روی منحنی نیز می‌باشد. به عنوان مثال، اگر $-C_1$ نشان دهنده پاره خط از $(0,2)$ تا $(-5,-3)$ باشد، با استفاده از پارامتری شده خط داریم

$$x=-5t,\quad y=2-5t,\qquad 0\le t\le 1$$

و

$$\int_{-C_1} y^2dx+x\,dy=\frac{5}{6}$$

در حالت کلی، یک پارامتری شده $x=x(t)$، $y=y(t)$ برای $a\le t\le b$ تعیین کننده جهتی برای منحنی C است، که آن را جهت مثبت گرفته شده، با افزایش مقادیر پارامتر t همراه است.
در شکل ۱۲ نقطه ابتدایی A متناظر به مقدار پارامتر $t=a$ و نقطه انتهایی B متناظر به مقدار پارامتر $t=b$ است.



شکل ۱۲

اگر $-C$ نشان دهنده منحنی شامل همان نقاط C بوده اما جهت حرکت مخالف باشد (از نقطه ابتدایی B تا نقطه انتهایی A در شکل ۱۲) آن گاه

$$\int_{-C} f(x,y)\,dx = -\int_C f(x,y)\,dx, \qquad \int_{-C} f(x,y)\,dy = -\int_C f(x,y)\,dy$$

اما اگر انتگرال نسبت به پارامتر طول قوس را محاسبه کنیم، مقدار انتگرال منحنی الخط با تغییر جهت منحنی C، تغییر نخواهد کرد. یعنی

$$\int_{-C} f(x,y)\,ds = \int_C f(x,y)\,ds$$

زیرا Δs_i همواره مثبت است حتی اگر Δx_i و Δy_i در اثر تغییر جهت حرکت روی C تغییر علامت دهند.

انتگرال های منحنی الخط در فضا ۸. فرض کنید C یک منحنی هموار در فضا داده شده توسط معادلات پارامتری

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\qquad a\le t\le b \qquad (۱۳)$$

است، یا توسط معادله برداری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ داده شده است. اگر f تابعی از سه متغیر بوده و روی ناحیه‌ای شامل C پیوسته باشد آن گاه انتگرال منحنی الخط f در امتداد C (نسبت به پارامتر طول قوس) به طریق مشابه برای منحنی های مسطح تعریف می‌شود:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)\,\Delta s_i$$

مشابه با فرمول (۵) داریم

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (۱۴)$$

انتگرال های بیان شده در فرمولهای (۵) و (۱۴) را می‌توان به فرم برداری زیر نوشت

$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \qquad (۱۵)$$

در حالت خاص اگر $f(x,y,z)\equiv 1$ داریم

$$\int_C ds = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = L$$

که در آن L طول قوس منحنی C است.

انتگرال های منحنی الخط در امتداد C نسبت به x ، y و z را می‌توان تعریف نمود. برای مثال

$$\int_C f(x,y,z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta z_i$$
$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\; z'(t)\,dt$$

بنابراین مشابه انتگرال های منحنی الخط در صفحه، انتگرال هایی از فرم

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \qquad (16)$$

را با شرح تمام عبارت‌های x ، y ، z ، dx ، dy و dz برحسب پارامتر t می‌توان محاسبه کرد.

مثال ۹. مطلوب است محاسبه $\int_C y\sin z\,ds$ ، که در آن C مارپیچ مستدیر داده شده توسط $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$ برای $0\le t\le 2\pi$ است.

حل. از فرمول (۱۴) داریم

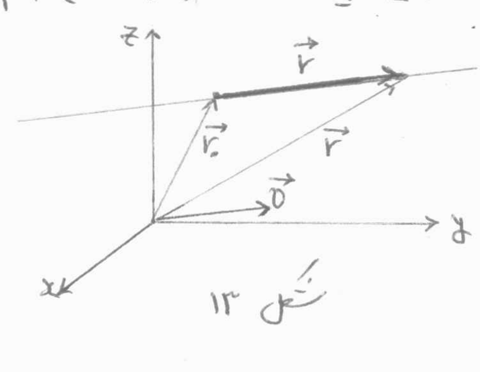
$$\int_C y\sin z\,ds = \int_0^{2\pi} (\sin t)(\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

نکته ۹. نمایش برداری پاره خطی با ابتدای $\vec{r}_0$ و انتهای $\vec{r}_1$ توسط

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1 \qquad 0\le t\le 1 \qquad (17)$$

داده می‌شود (شکل ۱۳). زیرا با فرض $\vec{v} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ از معادله برداری خط یعنی $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ داریم

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = t\vec{r}_1 + (1-t)\vec{r}_0 \qquad 0\le t\le 1$$



شکل ۱۳

مثال ۱۵. انتگرال $\int_C ydx+zdy+xdz$ را محاسبه کنید که در آن C شامل پاره خط C_1 از نقطه $(2,0,0)$ تا نقطه $(3,4,5)$ و پاره خط قائم C_2 از $(3,4,5)$ تا $(3,4,0)$ است.

حل. منحنی C در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. از معادله (۱۷)، C_1 را به صورت زیر داریم

$$C_1: \quad \vec{r}(t)=(1-t)\langle 2,0,0\rangle+t\langle 3,4,5\rangle=\langle 2+t, 4t, 5t\rangle$$

یا به فرم پارامتری

$$x=2+t, \quad y=4t, \quad z=5t \quad 0\le t\le 1$$

بنابراین

$$\int_{C_1} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 (4t)\,dt+(5t)(4dt)+(2+t)(5dt)$$
$$=\int_0^1 (10+29t)\,dt=10t+29\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=24.5$$

به طور مشابه، C_2 دارای فرم برداری

$$\vec{r}(t)=(1-t)\langle 3,4,5\rangle+t\langle 3,4,0\rangle=\langle 3,4,5-5t\rangle$$

یا فرم پارامتری

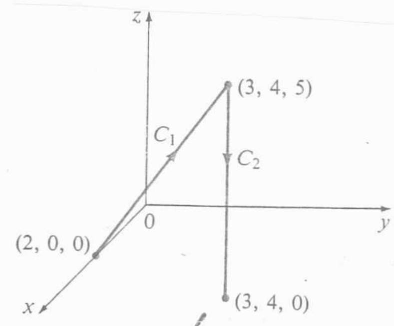
$$x=3, \quad y=4, \quad z=5-5t, \quad 0\le t\le 1$$

بنابراین $dx=0=dy$، پس

$$\int_{C_2} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 3(-5)\,dt=-15$$

با جمع دو انتگرال، داریم

$$\int_C ydx+zdy+xdz=24.5-15=9.5$$



شکل ۱۴

انتگرال های منحنی الخط میدان های برداری

انتگرال گیری از میدان های برداری در امتداد منحنی ها از مباحث بسیار مهم در ریاضی و فیزیک است. برای بیان انتگرال منحنی الخط یک میدان برداری در امتداد منحنی، از مفهوم کار شروع می کنیم. در بخش های بعد قضایای گرین، استوکس و دیورژانس گاوس که وابستگی انتگرال های خطی، مشتقات جزئی و انتگرال های دوگانه را نشان می دهند، مورد بحث قرار می گیرند.

حرکت یک شیئی یا ذره متحرک توسط یک منحنی پارامتری، یعنی توسط تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ توصیف می شود. با مشتق گیری از این تابع، داریم

سرعت در زمان t: $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t)$$

تندی در زمان t: $$v = \|\vec{v}\| = \|\vec{r}\,'(t)\|$$

شتاب در زمان t: $$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\,''(t)$$

طبق قانون دوم نیوتن داریم

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{r}\,''(t)$$

که در آن $\vec{F}$ نیروی کل موثر بر ذره یا شیئی است. اگر جرم شیئی برابر m باشد، انرژی جنبشی K توسط

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,\vec{v}\cdot\vec{v}$$

تعریف می شود. برای رسیدن به رابطه بین نیرو و انرژی جنبشی، از K نسبت به t مشتق می گیریم

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = m\,\vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

تغییر کل انرژی جنبشی از زمان t_1 تا t_2 برابر انتگرال $\frac{dK}{dt}$ است، پس

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dK}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

انتگرال $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$ را با W نشان داده و کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در امتداد مسیر $\vec{r}=\vec{r}(t)$ است. پس

$$W = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt \qquad (۱۸)$$

اگر $\vec{F}$ نمایش دهنده نیرویی از یک نوع خاص باشد، آنگاه انتگرال (۱) را کار انجام شده

توسط این نیروی خاص نامیم.

حال فرض کنید نیروی $\vec{F}$ در زمان t تنها وابسته به موقعیت $\vec{r}=\vec{r}(t)$ است. یعنی فرض کنید میدان برداری $\vec{\Phi}(\vec{r})$ وجود دارد به طوری که $\vec{F}=\vec{\Phi}(\vec{r}(t))$ که گاهی اوقات برای سادگی با $\vec{F}(\vec{r})$ نمایش داده می‌شود. در این صورت انتگرال در (۱۸) عبارت است از

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\vec{\Phi}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt \qquad (۱۹)$$

در حالت یک بعدی، (۱۹) با تغییر متغیر از زمان به مکان به انتگرال ساده زیر

$$W=\int_a^b F(x)\,dx \qquad (۲۰)$$

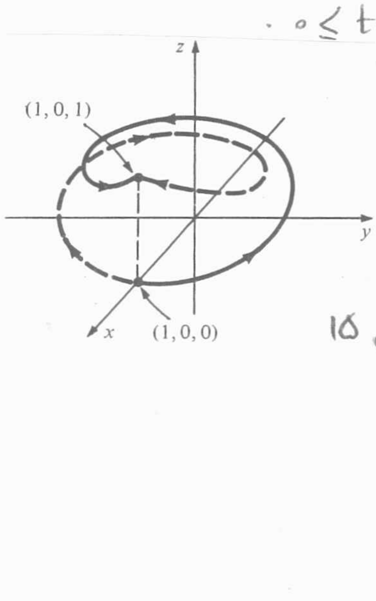
تبدیل می‌شود که در آن a و b نقاط ابتدائی و انتهائی است. توجه داریم که کار انجام شده در حالت یک بعدی، رابطه (۲۰)، تنها به F، a و b وابسته است و به جزئیات حرکت وابسته نمی‌باشد. در این بخش ثابت خواهیم کرد که برای توسیع‌های معینی، این وضعیت برای حرکت در فضا نیز معتبر است؛ کار انجام شده توسط یک میدان نیرو وقتی که ذره متحرکی در امتداد یک مسیر حرکت می‌کند وابسته به چگونگی حرکت ذره در امتداد مسیر نیست. به هر حال اگر مسیرهای متفاوتی بین نقاط انتهائی داده شده، در نظر گرفته شود، کار ممکن است متفاوت باشد.

مثال ۱۱. کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-x\vec{j}+\vec{k}$ برای حرکت ذره‌ای از نقطه $(1,0,0)$ تا $(1,0,1)$ در امتداد هر یک از مسیرهای زیر را به دست آورید.

الف) $0\le t\le 2\pi$ ؛ $(x,y,z)=(\cos t,\sin t,\frac{t}{2\pi})$ ،

ب) $0\le t\le \sqrt[3]{2\pi}$ ؛ $(x,y,z)=(\cos t^3,\sin t^3,\frac{t^3}{2\pi})$ ،

ج) $0\le t\le 2\pi$ ؛ $(x,y,z)=(\cos t,-\sin t,\frac{t}{2\pi})$.



شکل ۱۵

حل. مسیرها در شکل ۱۵ رسم شده‌اند.

الف) طبق فرمول (۱۹) با $t_1=0$ ، $t_2=2\pi$ داریم

$$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\left(\frac{t}{2\pi}\right)\vec{k}$$

$$\vec{r}\,'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\frac{1}{2\pi}\vec{k}$$

و

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

پس کار انجام شده توسط نیروی فوق در امتداد مسیر (الف) برابر است با

$$W_1=\int_0^{2\pi}(\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}+\vec{k})\cdot(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\tfrac{1}{2\pi}\vec{k})\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t+\tfrac{1}{2\pi})\,dt$$
$$=2\pi\left(-1+\tfrac{1}{2\pi}\right)=-2\pi+1\simeq -5.28$$

ب) برای مسیر (ب) داریم

$$\vec{r}\,'(t)=-(\sin t^3)(3t^2)\vec{i}+(\cos t^3)(3t^2)\vec{j}+\frac{3t^2}{2\pi}\vec{k}$$
$$=3t^2\left[-\sin t^3\,\vec{i}+\cos t^3\,\vec{j}+\tfrac{1}{2\pi}\vec{k}\right]$$

و

$$W_2=\int_0^{\sqrt[3]{2\pi}}(\sin t^3\,\vec{i}-\cos t^3\,\vec{j}+\vec{k})\cdot(3t^2)(-\sin t^3\,\vec{i}+\cos t^3\,\vec{j}+\tfrac{1}{2\pi}\vec{k})\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt[3]{2\pi}}(-\sin^2 t^3-\cos^2 t^3+\tfrac{1}{2\pi})(3t^2)\,dt$$
$$=\int_0^{\sqrt[3]{2\pi}}(-1+\tfrac{1}{2\pi})(3t^2)\,dt=(-1+\tfrac{1}{2\pi})\,t^3\Big|_0^{\sqrt[3]{2\pi}}$$
$$=(-1+\tfrac{1}{2\pi})(2\pi)=1-2\pi.$$

که همان W_1 است.

ج) داریم

$$\vec{r}\,'(t)=-\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}+\tfrac{1}{2\pi}\vec{k}$$

پس

$$W_3=\int_0^{2\pi}(-\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}+\vec{k})\cdot(-\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}+\tfrac{1}{2\pi}\vec{k})\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t+\tfrac{1}{2\pi})\,dt$$
$$=2\pi\left(1+\tfrac{1}{2\pi}\right)=2\pi+1\simeq 7.28$$

در حالت (ج)، حرکت با نیرو موافق است پس کار مثبت می‌باشد. برای مسیرهای (الف) و (ب) حرکت و نیرو در یک جهت نیستند و کار انجام شده منفی است. در حالت‌های (الف) و (ب) هیچ گونه تغییری در مسیر نداریم، مسیرها یکسان هستند و تنها با دو نوع پارامتر بیان شده‌اند. ثابت خواهیم کرد که کار در امتداد یک مسیر همیشه مستقل از پارامتری شده منحنی است.

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

می‌توان کار انجام شده در اثر میدان نیروی $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را در امتداد منحنی C بر حسب طول قوس پیموده شده نیز به دست آورد. فرض کنید میدان نیروی $\vec{F}$ روی $\mathbb{R}^3$ پیوسته است. منحنی C را به زیرقوس‌های $P_{i-1}P_i$ با طول‌های Δs_i افراز می‌کنیم (شکل ۱۶). نقطه دلخواه $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ را روی iامین زیرقوس متناظر به مقدار پارامتر t_i^* انتخاب می‌کنیم. اگر Δs_i کوچک باشد، آنگاه وقتی ذره متحرک از P_{i-1} تا P_i در امتداد منحنی حرکت می‌کند، بردار سرعت آن تقریباً در جهت $\vec{T}(t_i^*)$، بردار یکه مماس در P_i^* است. بنابراین کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در حرکت ذره از P_{i-1} تا P_i تقریباً برابر

$$\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \vec{T}(t_i^*)] = [\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*)]\Delta s_i$$

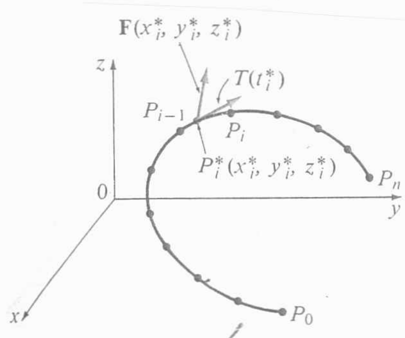
است و کار کل انجام شده در حرکت ذره در امتداد C تقریباً برابر

$$\sum_{i=1}^{n} [\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\Delta s_i \qquad (۲۱)$$

است، که در آن $\vec{T}(x, y, z)$ بردار یکه مماس در نقطه (x, y, z) به منحنی C است. حال وقتی $\|P\|$ کوچک و کوچکتر می‌شود، این تقریب به مقدار واقعی نزدیکتر خواهد شد. بنابراین کار W انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در حد یک مجموع ریمانی در (۲۱) است، یعنی

$$W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \qquad (۲۲)$$

معادله (۲۲) بیان می‌کند: کار انجام شده برابر با انتگرال نسبت به طول قوس از مولفه مماسی نیرو است.



شکل ۱۶

اگر منحنی C توسط معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ داده شده باشد آنگاه $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$. پس

$$W = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\right] \|\vec{r}(t)\|\, dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

که همان رابطه (۱۹) است. بنابراین تعریف رسمی زیر را داریم

تعریف ۱۰. فرض کنید $\vec{F}$ میدان برداری پیوسته تعریف شده بر منحنی هموار C داده شده با تابع برداری $\vec{r}(t)$ برای $a \le t \le b$ است. آنگاه انتگرال منحنی الخط $\vec{F}$ در امتداد C توسط

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \qquad ۲۳$$

داده می‌شود.

مثال ۱۲. کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y) = -y^2\vec{i} + xy\vec{j}$ در حرکت یک ذره در امتداد نیم دایره $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ ، $0 \le t \le \pi$ را بدست آورید.

حل. چون $x = \cos t$ و $y = \sin t$ ، داریم

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = -\sin^2 t\,\vec{i} + \cos t\,\sin t\,\vec{j}$$

و

$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

پس

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^\pi (\sin^3 t + \cos^2 t\,\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \sin t\,dt = -\cos t\Big]_0^\pi = 2$$

نکته ۱۱. با توجه به $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ و انتگرال نسبت به طول قوس، وقتی جهت حرکت روی C تغییر کند، عبارت زیر مجدداً برقرار است

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

زیرا بردار یکه مماس $\vec{T}$ با $-\vec{T}$ وقتی C با $-C$ عوض شود، جابجا می‌شود.

مثال ۱۳. مطلوب است $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ و C تابع درجه سوم $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ برای $0 \le t \le 1$ است.

حل. داریم

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$$

$$\vec r\,'(t) = \vec i + 2t\vec j + 3t^2\vec k$$

$$\vec F(\vec r(t)) = t^3\vec i + t^5\vec j + t^7\vec k$$

بنابراین

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r = \int_0^1 \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{27}{28}$$

نهایتاً به ارتباط بین انتگرال منحنی الخط میدانهای برداری و انتگرال منحنی الخط میدانهای اسکالری توجه می‌کنیم. فرض کنید میدان برداری $\vec F$ روی R^3 برحسب مولفه ها توسط $\vec F = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$ داده شده است. در این صورت

$$\begin{aligned}\int_C \vec F\cdot d\vec r &= \int_a^b \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (P\vec i + Q\vec j + R\vec k)\cdot(x'(t)\vec i + y'(t)\vec j + z'(t)\vec k)\,dt \\ &= \int_a^b \big[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) \\ &\quad + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\big]\,dt\end{aligned}$$

یا به طور ساده‌تر داریم

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

که در آن $\vec F = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$.

مثال ۱۴. فرض کنید در میدان نیروی مثال ۱۱، شما به عنوان جرم واحد در $(0,0,1)$ قرار دارید و در امتداد مسیر (الف) حرکت کرده و به نقطه $(1,0,1)$ بروید. کار انجام شده توسط شما چیست؟

حل. چون انرژی جنبشی در شروع و در انتهای مسیر صفر است، پس تغییر انرژی صفر می‌باشد و کل کار انجام شده صفر خواهد بود. دو منبع برای کار داریم، شما و میدان نیرو، چون کار انجام شده توسط میدان نیرو برابر -5.28 است (طبق قسمت (الف) مثال ۱۱) پس کار انجام شده توسط شما برابر 5.28 می‌باشد.

مثال ۱۵. میدان نیروی جاذبه تولید شده توسط

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

برای $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید کار انجام شده توسط نیروی جاذبه وقتی که ذره‌ای از (x_1,y_1,z_1) تا (x_2,y_2,z_2) حرکت کند تنها وابسته به شعاع‌های $R_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ و $R_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$ است.

حل. فرض کنید مسیر توسط $\vec{r}(t)=\langle x,y,z\rangle$ داده شده‌است که در آن $\vec{r}(t_1)=\langle x_1,y_1,z_1\rangle$ و $\vec{r}(t_2)=\langle x_2,y_2,z_2\rangle$ است. x، y و z را به عنوان توابعی از t در نظر بگیرید. در این صورت $\vec{r}'(t)=(\frac{dx}{dt})\vec{i}+(\frac{dy}{dt})\vec{j}+(\frac{dz}{dt})\vec{k}$ و بنابراین

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)dt$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{x(dx/dt)+y(dy/dt)+z(dz/dt)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}-\frac{(\frac{1}{2})\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}dt=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\Big|_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)}$$

$$=(x_2^2+y_2^2+z_2^2)^{-1/2}-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)^{-1/2}=\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}$$

بنابراین کار انجام شده توسط میدان جاذبه وقتی ذره متحرک از (x_1,y_1,z_1) به (x_2,y_2,z_2) حرکت می‌کند برابر $\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}$ است. پس کار انجام شده در این حالت مستقل از مسیر انتخابی بین دو نقطه است.

مثال ۱۶. انتگرال میدان برداری $e^y\vec{i}+e^x\vec{j}+e^z\vec{k}$ را در امتداد منحنی $(0,t,t^2)$، برای $0\le t\le \ln 2$ را به دست آورید.

حل. بردار سرعت عبارت است از $\vec{r}'(t)=\vec{j}+2t\vec{k}$ پس

$$\int_0^{\ln 2}(e^t\vec{i}+e^0\vec{j}+e^{t^2}\vec{k})\cdot(\vec{j}+2\vec{k})dt=\int_0^{\ln 2}(1+e^{t^2}(2t))dt=\ln 2-2^{\ln 2}-1$$

قضیه بعد نشان می‌دهد که انتگرال منحنی الخط وابسته به چگونگی پارامتری شده مسیر انتگرال نیست.

قضیه ۱۲. استقلال از پارامتری شدن. میدان برداری $\vec{F}$ و منحنی $\vec{r}$ مفروض اند، فرض کنید $t=f(u)$ تابعی مشتق‌پذیر تعریف شده بر فاصله $[u_1,u_2]$ است به طوری که $f(u_1)=t_1$ و $f(u_2)=t_2$. فرض کنید $\vec{r}_1(u)$ پارامتری شده مجدد منحنی $\vec{r}(t)$ توسط $\vec{r}_1(u)=\vec{r}(f(u))$ است. آنگاه

$$\int_{u_1}^{u_2}\vec{F}(\vec{r}_1(u))\cdot\vec{r}_1'(u)\,du=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$$

اثبات. با توجه به قانون زنجیره‌ای داریم

$$\vec{r}_1'(u)=\vec{r}'(f(u))\,f'(u)$$

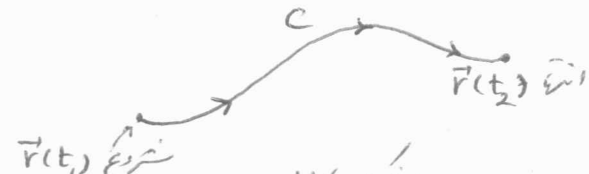
پس

$$\int_{u_1}^{u_2}\vec{F}(\vec{r}_1(u))\cdot\vec{r}_1'(u)\,du=\int_{u_1}^{u_2}\vec{F}(\vec{r}(f(u)))\cdot\vec{r}'(f(u))\,f'(u)\,du$$

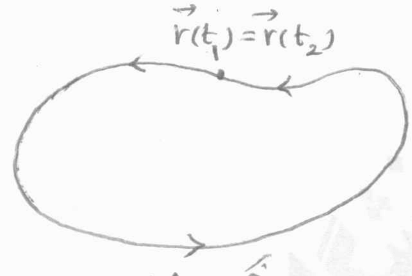
چون $dt=f'(u)\,du$ پس انتگرال برابر با $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$ و حکم تمام است.

تعریف ۱۳. یک منحنی هندسی C مجموعه‌ای از نقاط در صفحه است که تمام آن‌ها را توسط یک منحنی پارامتری شده بپیماید. جهت حرکت در امتداد C مشخص است، اما نه لزوماً یک پارامتری شده مشخص (شکل ۱۷). قضیه ۱۲ نشان می‌دهد که انتگرال خطی یک میدان برداری در امتداد یک منحنی هندسی خوش تعریف است.

یک منحنی پارامتری $\vec{r}(t)$ تعریف شده روی $[t_1,t_2]$ را بسته نامیم هرگاه نقاط انتهایی آن بر هم منطبق باشند یعنی اگر $\vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)$ باشد. یک منحنی هندسی را بسته نامیم هرگاه دارای فرم پارامتری باشد که بسته است. وقتی C یک منحنی بسته است، هر نقطه C را می‌توان به عنوان نقطه شروع برای پارامتری کردن منحنی اختیار کرد اما باید دقت کنیم که اطراف C فقط یک بار پیموده می‌شود (شکل ۱۸). به طور کلی دو نکته مهم را در مورد پارامتری کردن یک منحنی هندسی باید رعایت کرد: پارامتری شده باید در جهت صحیح باشد و از هر نقطه فقط یک بار عبور کنیم.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

مثال ۱۷. فرض کنید C پاره خط واصل بین نقاط $(0,0,0)$ تا $(1,0,0)$ است و فرض کنید $\vec r_1(t)=\langle t,0,0\rangle$ برای $0\le t\le 1$ باشد. انتگرال خطی $\vec F(x,y,z)=\vec i$ را در امتداد این منحنی بدست آورید. اگر C با پارامتری شده توسط $\vec r_2(t)=\langle 1-t,0,0\rangle$ برای $0\le t\le 1$ باشد این انتگرال را بدست آورید.

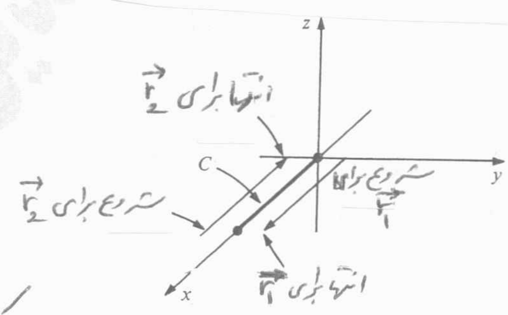
حل. داریم $\vec r_1'(t)=\vec i$ ، $t_1=0$ و $t_2=1$ ، $\vec F(\vec r_1(t))=\vec i$ پس

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec F(\vec r_1(t))\cdot\vec r_1'(t)\,dt=\int_0^1\vec i\cdot\vec i\,dt=\int_0^1 dt=1$$

برای $\vec r_2$ به طور مشابه $t_1=0$ ، $t_2=1$ ، $\vec r_2'(t)=-\vec i$ و $\vec F(\vec r_2(t))=\vec i$ پس

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec F(\vec r_2(t))\cdot\vec r_2'(t)\,dt=\int_0^1-\vec i\cdot\vec i\,dt=-\int_0^1 dt=-1$$

در اینجا منحنی هندسی C یکسان است اما دو پارامتری شده $\vec r_1$ و $\vec r_2$ منحنی C را در دو جهت متضاد می پیمایند. (شکل ۱۹)



مثال ۱۸. فرض کنید C دایره $x^2+y^2=1$ ، $z=0$ است. فرض کنید $\vec r_1(t)=\langle\cos t,\sin t,0\rangle$ برای $0\le t\le 2\pi$. انتگرال خطی $\vec F(x,y,z)=-y\vec i+x\vec j$ در امتداد این منحنی را بدست آورید. اگر C توسط $\vec r_2(t)=\langle\cos t,\sin t,0\rangle$ برای $0\le t\le 4\pi$ پارامتری شود، انتگرال خطی فوق را بدست آورید.

حل. انتگرال برای $\vec r_1$ با توجه به $t_1=0$ ، $t_2=2\pi$ ، $\vec r(t)=\langle\cos t,\sin t,0\rangle$ بدست می آید:

$$\vec F(\vec r_1(t))=-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j$$

$$\vec r_1(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j$$
$$\vec r_1'(t)=-\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j$$

پس

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec F(\vec r_1(t))\cdot\vec r_1'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi$$

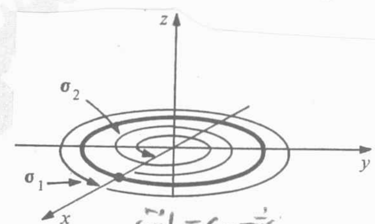
توجه کنید که می‌توان همین نتیجه را برای پارامتر θ و پارامتری شده C توسط معادله

$$\vec r(t)=\langle\cos(t+\theta),\sin(t+\theta),0\rangle \qquad 0\le t\le 2\pi$$

می‌توان به دست آورد که از یک نقطهٔ مشترک شروع می‌کند و در $(\cos\theta,\sin\theta,0)$ ختم می‌یابد.
اگر روی C توسط $\vec r(t)=\langle\cos(-t),\sin(-t),0\rangle$ برگردیم، حاصل منفی جواب بالا خواهد بود. اگر $\vec r_2(t)$ را مورد استفاده قرار دهیم، تنها t_2 به 4π تغییر یافته است پس

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec F(\vec r_2(t))\cdot\vec r_2'(t)\,dt=4\pi$$

و این دو برابر جواب اولیه است زیرا $\vec r_2$ منحنی C را دوبار می‌پیماید. (شکل ۲۰)



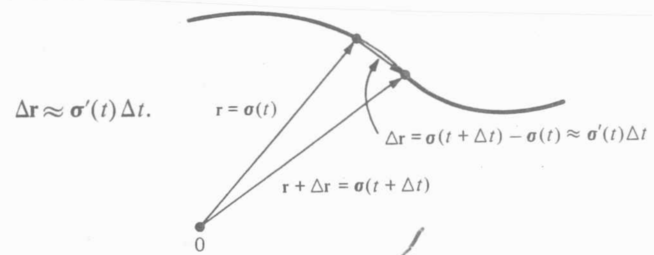
شکل ۲۰

نمادگذاری ۱۴. نمادی مفید برای انتگرال منحنی الخط استفاده از نماد لایب‌نیتز است.
فرض کنید $\vec r=\vec r(t)$ پس $\vec r'=\frac{d\vec r}{dt}$ و در نتیجه $\int_{t_1}^{t_2}\vec F(\vec r(t))\cdot\vec r'(t)\,dt$ را می‌توان به صورت $\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r$ نوشت که در آن $\vec r_1=\vec r(t_1)$ و $\vec r_2=\vec r(t_2)$. اما این نماد مشخص نمی‌کند که منحنی چگونه پیموده شده است و تنها نقاط انتهایی را نمایش می‌دهد. اگر از C برای نمایش مسیر انتگرال‌گیری استفاده کنیم، داریم

$$\int_C \vec F(\vec r)\cdot d\vec r=\int_{t_1}^{t_2}\vec F(\vec r(t))\cdot\vec r'(t)\,dt \qquad (۲۴)$$

که در آن $\vec r(t)$ هر نمایش پارامتری شدهٔ C است. نماد $d\vec r$ برای $\vec r'(t)\,dt$ با نمادهای انتگرال سازگار است. تغییر در $\vec r$ در زمان کوچک Δt عبارت است از $\Delta\vec r\simeq\vec r'(t)\Delta t$

(شکل ۲۱). وقتی Δt بسیار کوچک dt باشد، $\overrightarrow{\Delta r}$ به $\overrightarrow{dr}$ تبدیل می‌شود و تقریب به تساوی می‌انجامد.



شکل ۲۱

مثال ۱۹. فرض کنید C پاره‌خط مستقیم از $(2,1,3)$ تا $(-4,6,8)$ است. مطلوب است $\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - y\vec{j} + xy\vec{k}$ است.

حل. یک پارامتری ساده‌ای برای C انتخاب می‌کنیم. ساده‌ترین امکان به صورت

$$\vec{r}(t) = (1-t)\langle 2,1,3\rangle + t\langle -4,6,8\rangle$$

$$= \langle 2-6t,\ 1+5t,\ 3+5t\rangle \qquad 0 < t \le 1$$

وقتی t از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، $\vec{r}(t)$ امتداد C را از $(2,1,3)$ تا $(-4,6,8)$ می‌پیماید. پس

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(2-6t)\vec{i} - (1+5t)\vec{j} + (2-6t)(1+5t)\vec{k}]\cdot(-6\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k})dt$$

$$= \int_0^1 (-7 + 31t - 150t^2)dt = -\frac{83}{2}$$

مثال ۲۰. فرض کنید $\vec{F}(\vec{r})$ بر $\vec{r}\,'(t)$ در هر نقطه از منحنی $\vec{r}(t)$ عمود است. در رابطه با $\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ چه می‌توان گفت؟

حل. چون $\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)dt$، این انتگرال صفر است زیرا $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t) = 0$ پس انتگرال صفر است.

فرمولهای

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad (۲۵)$$

و

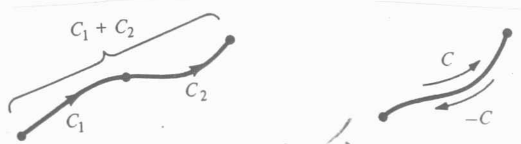
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (۲۶)$$

برای انتگرالهای مقدماتی دارای تعبیرهای مشابهی در انتگرال‌گیری خطی است. اگر نقطه‌ای روی

منحنی c انتخاب کنیم، c به دو منحنی c_1 و c_2 تقسیم می‌شود (شکل ۲۲). می‌نویسیم $c=c_1+c_2$ و داریم

$$\int_{c_1+c_2}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r=\int_{c_1}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r+\int_{c_2}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r \qquad (۲۷)$$

فرض کنید $-c$ منحنی c باشد که در جهت مخالف c پیموده شده است (شکل ۲۲ (ب)) بنابراین



(الف) شکل ۲۲ (ب)

$$\int_{-c}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r=-\int_{c}\vec F(\vec r)\cdot d\vec r \qquad (۲۸)$$

قضیه اساسی برای انتگرال‌های منحنی الخط

از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره می‌دانیم که اگر F' روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a) \qquad (۲۹)$$

حال اگر $\vec\nabla f$ (بردار گرادیان) تابع دو یا سه متغیره f را به عنوان نوعی مشتق f در نظر بگیریم، انتظار داریم که قضیه اساسی برای این تابع نیز برقرار باشد.

قضیه ۱۵. فرض کنید c یک منحنی هموار تعریف شده توسط تابع برداری $\vec r=\vec r(t)$ برای $a\le t\le b$ است. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر از دو یا سه متغیر است که بردار گرادیان آن $\vec\nabla f$ روی c پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_c \vec\nabla f\cdot d\vec r=f(\vec r(b))-f(\vec r(a)) \qquad (۳۰)$$

اثبات. با استفاده از تعریف ۱۵ و قانون زنجیره‌ای داریم

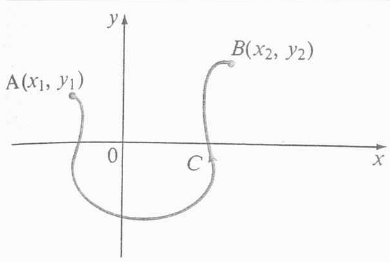
$$\begin{aligned}\int_c \vec\nabla f\cdot d\vec r&=\int_a^b \vec\nabla f(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt\\&=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt\\&=\int_a^b\frac{d}{dt}f(\vec r(t))\,dt\\&=f(\vec r(b))-f(\vec r(a)).\end{aligned}$$

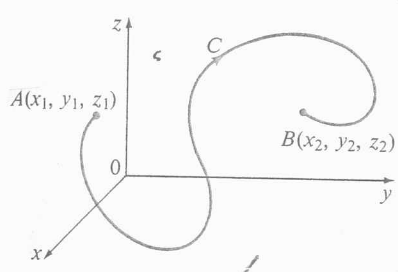
توضیح ۱۶. قضیه ۱۵ بیان می‌کند که می‌توانیم انتگرال خطی میدان برداری گرادیان یک تابع پتانسیل f را به سادگی با دانستن مقدار f در نقاط انتهایی C به دست آوریم. اگر f تابعی از دو متغیر و C یک منحنی مسطح با نقطه ابتدایی $A(x_1,y_1)$ و نقطه انتهایی $B(x_2,y_2)$ باشد (شکل ۲۳) آن‌گاه از قضیه ۱۵ داریم

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)$$

و اگر f تابعی از سه متغیر و C یک منحنی فضایی واصل بین نقاط $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ باشد، آن‌گاه

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_2,y_2,z_2) - f(x_1,y_1,z_1)$$





شکل ۲۳

گرچه قضیه ۱۵ را برای منحنی‌های هموار ثابت کردیم، این قضیه برای منحنی‌های هموار تکه‌ای نیز برقرار است. می‌توانیم منحنی هموار تکه‌ای C را به تعدادی متناهی منحنی هموار تقسیم کرده و برای هر یک قضیه را بکار برده و نهایتاً حاصل به دست آمده را با هم جمع کنیم.

مثال ۲۱. کار انجام شده توسط میدان جاذبه

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{mMG}{\|\vec{r}\|^3}\,\vec{r}$$

در حرکت ذره‌ای به جرم m از نقطه $(3,4,12)$ تا نقطه $(2,2,0)$ در امتداد منحنی هموار تکه‌ای C را به دست آورید.

حل. می‌دانیم که میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان برداری گرادیان است، که در آن

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

و $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. طبق قضیه ۱۵

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(2,2,0) - f(3,4,12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2+2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right).$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

استقلال از مسیر ۱۷. فرض کنید C_1 و C_2 دو منحنی هموار تکه‌ای اند که آنها را مسیر نامیم. فرض کنید C_1 و C_2 هر دو دارای نقطه ابتدایی A و نقطه انتهایی B باشند. در حالت کلی می‌دانیم که

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

اما اگر برای $\vec{F}$ قضیه ۱۵ برقرار باشد یعنی تابع اسکالر f موجود باشد به طوری که $\vec{F}=\vec{\nabla} f$ آن گاه

$$\int_{C_1} \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r}$$

که در آن $\vec{\nabla} f$ پیوسته است. به عبارت دیگر، انتگرال منحنی الخط یک میدان برداری گرادیان تنها وابسته به نقطه ابتدایی و نقطه انتهایی منحنی است.

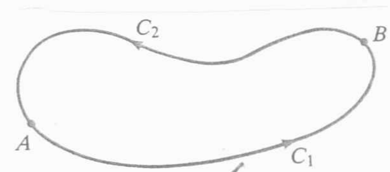
تعریف ۱۸. اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته با دامنه D باشد، گوییم $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر است، هرگاه برای هر دو مسیر C_1 و C_2 در D با نقاط ابتدایی یکسان و نقاط انتهایی یکسان

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

در این حالت گوییم انتگرال‌های خطی میدان‌های برداری گرادیان مستقل از مسیر هستند.

تعریف ۱۹. گوییم یک منحنی بسته است، هرگاه نقاط انتهایی آن بر هم منطبق باشند یعنی $\vec{r}(b)=\vec{r}(a)$. (شکل ۲۴)

شکل ۲۴



شکل ۲۵

اگر $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر در D باشد و C هر مسیر بسته‌ای در D، آن گاه می‌توانیم دو نقطه A و B روی C را به دلخواه اختیار کنیم و C را به صورت ترکیب مسیر C_1 از A به B و مسیر C_2 از B به A در نظر بگیریم (شکل ۲۵). در این صورت

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{-C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

زیرا C_1 و $-C_2$ دارای نقاط اولیه یکسان و نقاط انتهایی یکسان هستند. برعکس اگر $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

که در آن C مسیر بسته ای در D است، آن می‌توانیم نتیجه بگیریم که انتگرال خطی مستقل از مسیر است. زیرا، دو مسیر C_1 و C_2 از A تا B در D را انتخاب کرده و C را منحنی شامل C_1 و $-C_2$ درنظر می‌گیریم. در نتیجه

$$0=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{-C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

پس $\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$. بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم

قضیه ۲۰. $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ در D مستقل از مسیر است اگروتنها اگر $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ برای هر مسیر بسته C در D.

توضیح و تعریف ۲۱. چون انتگرال منحنی الخط هر میدان برداری نگهدار $\vec{F}$ مستقل از مسیر است، پس برای هر مسیر بسته داریم $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$. تعبیر فیزیکی این نتیجه چنین است که کار انجام شده توسط یک میدان نیروی نگهدار (مانند میدان جاذبه یا میدان الکتریکی) در حرکت یک شیئی اطراف یک مسیر بسته صفر است. قضیه ۲۰ بیان می‌کند که تنها میدانهای برداری مستقل از مسیر میدانهای نگهدارند. این قضیه برای منحنی های سطح بیان و اثبات شد اما برای حالت منحنی های فضایی به صورت دیگری بیان می‌شود.

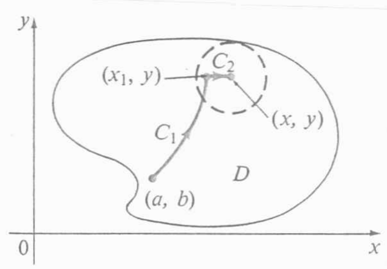
فرض کنید D باز است، یعنی برای هر نقطه P در D قرصی با مرکز P وجود دارد به طوریکه داخل D قرار می‌گیرد (بنابراین هر نقطه D یک نقطه درونی D است) علاوه برآن فرض کنید D همبند است، یعنی هر دو نقطه D را می‌توان توسط مسیری که در D قرار دارد بهم وصل کرد.

قضیه ۲۲. فرض کنید میدان برداری $\vec{F}$ روی ناحیه همبند باز D پیوسته است. اگر $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ در D مستقل از مسیر باشد، آن گاه $\vec{F}$ یک میدان برداری نگهدار روی D است یعنی تابع f وجود دارد به طوریکه $\vec{\nabla} f=\vec{F}$.

اثبات. فرض کنید $A(a,b)$ یک نقطه ثابت در D است. تابع پتانسیل f را با تعریف

$$f(x,y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

برای هر (x,y) در D می‌سازیم. چون $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر است، پس مهم نیست که مسیر C از (a,b) تا (x,y) چگونه مسیری است بلکه در محاسبه $f(x,y)$ دلخواه است. چون D باز است پس قرصی مشمول در D با مرکز (x,y) وجود دارد. نقطه دلخواه (x_1,y) را در این قرص با $x_1<x$ انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم C مسیر C_1 از (a,b) تا (x_1,y) و پاره‌خط افقی C_2 از (x_1,y) تا (x,y) باشد. (شکل ۲۶)



شکل ۲۶ (الف)

بنابراین

$$f(x,y)=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$=\int_{(a,b)}^{(x_1,y)}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

توجه داریم که انتگرال اول در سمت راست وابسته به x نیست، پس

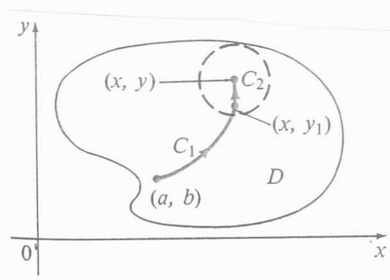
$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0+\frac{\partial}{\partial x}\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

حال اگر $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ آنگاه $\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_2}P\,dx+Q\,dy$. روی C_2، y ثابت است پس $dy=0$. با استفاده از t به عنوان پارامتر داریم $x_1\le t\le x$ و بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{C_2}P\,dx+Q\,dy$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x}P(t,y)\,dt$$
$$=P(x,y)$$

با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_{C_2}P\,dx+Q\,dy$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\int_{y_1}^{y}Q(x,t)\,dt$$
$$=Q(x,y)$$



شکل ۲۶ (ب)

بنابراین

$$\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=\vec{\nabla}f$$

یعنی $\vec{F}$ پایا و نگهدار است و قضیه تمام است.

پس تاکنون دیدیم که یک میدان برداری $\vec{F}$ تعریف شده روی ناحیه همبند باز D و پیوسته، نگهدار است اگر و تنها اگر انتگرال منحنی الخط $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ روی هر منحنی هموار تکه‌ای در D مستقل از مسیر است و اگر و تنها اگر میدان برداری $\vec{F}$ گرادیان تابع اسکالر f تعریف شده روی D باشد. سؤالی که باقی می‌ماند این است که چگونه تشخیص دهیم میدان برداری $\vec{F}$ نگهدار است و محکی برای این سؤال نیاز است.

فرض کنید $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ نگهدار است، که در آن P و Q دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند. آنگاه تابع f وجود دارد به طوری که $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ یعنی

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

بنابراین طبق قضیه کلرو

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

پس قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲۳. اگر $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ یک میدان برداری نگهدار باشد که در آن P و Q دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی دامنه D هستند آنگاه روی D داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (۳۱)$$

عکس قضیه ۲۳ تنها برای حالت خاصی از نواحی برقرار است. برای شرح عکس قضیه، نیاز به برخی مفاهیم اولیه است.

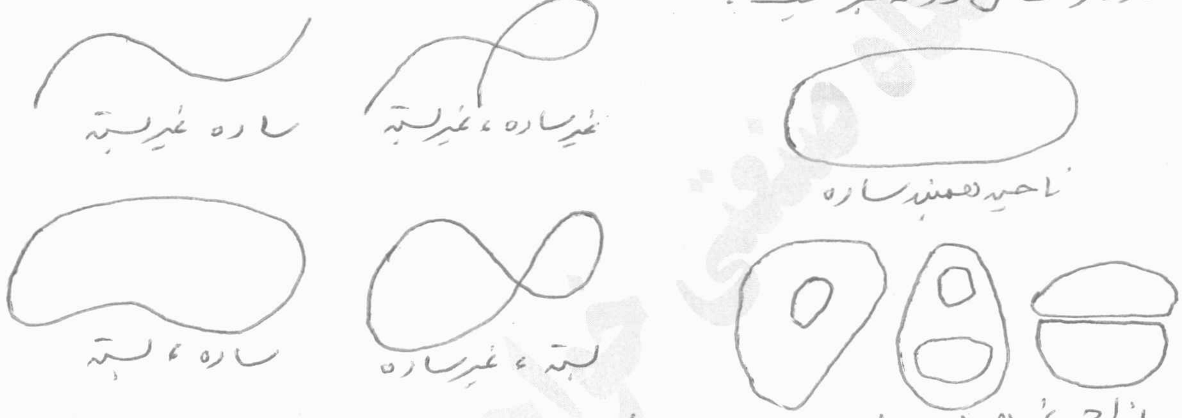
تعریف ۲۴. منحنی C را یک منحنی ساده نامیم هرگاه خود را بجز احتمالاً در نقاط انتهایی، در نقطه دیگری قطع نکند، یعنی اگر نمایش پارامتری منحنی C به صورت $\vec{r} = \vec{r}(t)$ برای $a \le t \le b$ باشد، C ساده است اگر برای هر $a < t_1 < t_2 < b$ داشته باشیم $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$.

منحنی C را بسته نامیم هرگاه در نمایش پارامتری C به صورت $\vec{r} = \vec{r}(t)$ برای $a \le t \le b$ داشته باشیم $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ به عبارت دیگر ابتدا و انتهای منحنی بر هم منطبق باشند. (شکل ۲۷ (الف))

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

تعریف ۲۵. یک ناحیه همبند ساده در صفحه، ناحیهٔ همبند D است که هر منحنی ساده بسته در D تنها نقاط D را دربرداشته باشد.

از شکل ۲۷(ب) دیده می‌شود که یک ناحیه همبند ساده، ناحیه‌ای است که هیچ گونه سوراخی ندارد و شامل دو تکه مجزا نیست.



(الف) شکل ۲۷ (ب)

حال می‌توانیم در نواحی همبند ساده، عکس جزئی برای قضیه ۲۳ بیان کنیم، که در ضمن روشی برای یافتن خاصیت نگهدار بودن یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ است. اثبات این قضیه در بخش بعد به عنوان نتیجه‌ای از قضیه گرین ارائه خواهد شد.

قضیه ۲۶. فرض کنید $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ یک میدان برداری تعریف شده روی ناحیه باز همبند ساده D است و توابع P و Q دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته روی D باشند و فرض کنید روی D

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

آن‌گاه $\vec{F}$ یک میدان برداری نگهدار است.

مثال ۲۲. آیا میدان برداری $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{i} + xy^3\vec{j}$ نگهدار است؟

حل. داریم $P(x,y) = 2xy$ و $Q(x,y) = xy^3$. در نتیجه

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^3$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

چون $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ پس $\vec{F}$ نگهدار نیست.

مثال ۲۳. آیا میدان برداری $\vec{F}(x,y)=(3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}$ نگهدار است؟

حل. داریم $P(x,y)=3+2xy$ و $Q(x,y)=x^2-3y^2$. پس

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

همچنین دامنه $\vec{F}$ درون صفحه xy است که باز و همبند ساده می‌باشد. پس $\vec{F}$ نگهدار است.

مثال ۲۴. برای میدان برداری مثال ۲۳،

الف) تابع f را بیابید به طوری که $\vec{\nabla} f=\vec{F}$.

ب) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی داده شده توسط $\vec{r}(t)=e^t\sin t\,\vec{i}+e^t\cos t\,\vec{j}$ برای $0\le t\le \pi$ است.

حل. الف) از مثال ۲۳ دیدیم که $\vec{F}$ میدان برداری نگهدار است پس تابع f وجود دارد به طوری که $\vec{\nabla} f=\vec{F}$ یعنی

$$f_x(x,y)=3+2xy \qquad (۳۲)$$

$$f_y(x,y)=x^2-3y^2 \qquad (۳۳)$$

با انتگرال گیری از (۳۲) نسبت به x داریم

$$f(x,y)=3x+x^2y+g(y) \qquad (۳۴)$$

توجه کنید که ثابت انتگرال گیری، ثابت نسبت به x است پس می‌تواند تابعی از y باشد که آن را $g(y)$ نامیدیم. حال با مشتق گیری از طرفین (۳۴) نسبت به y داریم

$$f_y(x,y)=x^2+g'(y) \qquad (۳۵)$$

از مقایسه (۳۵) با (۳۳) نتیجه می‌شود که $g'(y)=-3y^2$ پس $g(y)=-y^3+k$ که در آن k یک ثابت است. با قرار دادن $g(y)$ در (۳۴) تابع f به عنوان تابع پتانسیل مطلوب به صورت

$$f(x,y)=3x+x^2y-y^3+k$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

ب) با استفاده از قضیه (۱۵) و فرمول (۳۰) داریم

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(\pi)) - f(\vec{r}(0))$$
$$= f(0,-e^{\pi}) - f(0,1)$$
$$= e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi}+1$$

این روش بسیار کوتاه‌تر از روش محاسبه انتگرال منحنی الخط به طور مستقیم است.

محک لازم برای تعیین پایستار بودن میدان برداری $\vec{F}$ روی $\mathbb{R}^3$ در بخش‌های بعد آورده می‌شود، در هر صورت ایده اصلی آن مشابه محک شامل مشتقات مخلوط است و روش یافتن تابع پتانسیل f که در شرط $\vec{\nabla} f=\vec{F}$ صدق کند مشابه روش بیان شده در مثال (۲۴) می‌باشد. در مثال بعد با فرض پایستار بودن $\vec{F}$ روی $\mathbb{R}^3$، تابع پتانسیل f را می‌یابیم.

مثال ۲۵. اگر $\vec{F}(x,y,z)=y^2\vec{i}+(2xy+e^{3z})\vec{j}+3ye^{3z}\vec{k}$ باشد، تابع f را بیابید به طوری که $\vec{\nabla} f=\vec{F}$ باشد.

حل. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، باید در روابط زیر صدق کند

$$f_x(x,y,z) = y^2 \qquad (۳۶)$$
$$f_y(x,y,z) = 2xy + e^{3z} \qquad (۳۷)$$
$$f_z(x,y,z) = 3ye^{3z} \qquad (۳۸)$$

با انتگرال‌گیری از (۳۶) نسبت به x داریم

$$f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z) \qquad (۳۹)$$

که در آن $g(y,z)$ ثابتی نسبت به x است. با مشتق‌گیری نسبت به y از (۳۹) داریم

$$f_y(x,y,z) = 2xy + g_y(y,z)$$

از مقایسه با (۳۷) نتیجه می‌شود $g_y(y,z)=e^{3z}$ پس با انتگرال‌گیری نسبت به y داریم

$$g(y,z) = ye^{3z} + h(z)$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

که در آن $h(z)$ تابعی نسبت به y است، پس

$$f(x,y,z)=xy^2+ye^{3z}+h(z)$$

حال با مشتق گیری نسبت به z و مقایسه با (۳۸) داریم $h'(z)=0$ پس $h(z)=k$ یک ثابت است.

در نتیجه تابع مورد نظر عبارت است از

$$f(x,y,z)=xy^2+ye^{3z}+k$$

به سادگی دیده می‌شود که $\vec{\nabla} f=\vec{F}$.

پایستگی انرژی ۲۷. میدان نیروی پیوسته $\vec{F}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در اثر میدان نیروی $\vec{F}$ جسمی در امتداد مسیر C داده شده توسط $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برای $a\le t\le b$ حرکت می‌کند که در آن $\vec{r}(a)=A$ نقطه ابتدایی و $\vec{r}(b)=B$ نقطه انتهایی C است. طبق قانون دوم نیوتن، نیروی $\vec{F}(\vec{r}(t))$ در نقطه‌ای روی C وابسته به شتاب $\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)$ طبق معادله

$$\vec{F}(\vec{r}(t))=m\,\vec{r}''(t)$$

است. بنابراین کار انجام شده توسط این نیرو روی جسم برابر است با

$$\begin{aligned}
W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt\\
&=\int_a^b m\,\vec{r}''(t)\cdot\vec{r}'(t)\,dt\\
&=\frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)\right]dt\\
&=\frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\|\vec{r}'(t)\|^2\,dt\\
&=\frac{m}{2}\left[\|\vec{r}'(t)\|\ \right]_a^b\\
&=\frac{m}{2}\left(\|\vec{r}'(b)\|^2-\|\vec{r}'(a)\|^2\right)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$W=\frac{1}{2}m\|\vec{v}(b)\|^2-\frac{1}{2}m\|\vec{v}(a)\|^2 \qquad (۴۰)$$

که در آن $\vec{v}=\vec{r}'$ سرعت است. کمیت $\frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2$ انرژی جنبشی جسم نامیده می‌شود.
بنابراین از معادله (۴۰) داریم ($k(t)$ انرژی جنبشی در زمان t)

$$W = K(B) - K(A) \qquad (۴۱)$$

که بیان می‌کند کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}$ در امتداد منحنی C برابر با تغییر در انرژی جنبشی در نقاط انتهایی C است.

حال فرض کنید $\vec{F}$ میدان نیروی نگهدار است یعنی $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. انرژی پتانسیل یک جسم در نقطه (x, y, z) توسط $P(x,y,z) = -f(x,y,z)$ تعریف می‌شود، پس $\vec{F} = -\vec{\nabla} P$. در نتیجه از قضیه ۱۵ داریم

$$\begin{aligned} W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -\int_C \vec{\nabla} P \cdot d\vec{r} \\ &= -\left[P(\vec{r}(b)) - P(\vec{r}(a)) \right] \\ &= P(A) - P(B) \end{aligned}$$

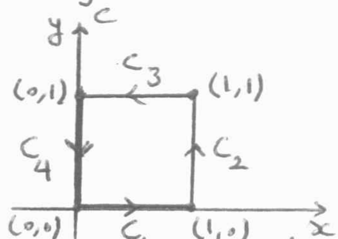
و از (۴۱) داریم

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

که بیان می‌کند: اگر جسمی از نقطه A به نقطه B تحت تأثیر یک میدان نیروی نگهدار حرکت کند آن‌گاه مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی ثابت باقی می‌ماند. این مطلب را قانون پایستگی (بقای) انرژی نامند و به این دلیل است که چنین میدان نیرویی را نگهدار نامند.

مثال ۲۶. فرض کنید C محیط مربع واحد $[0,1] \times [0,1]$ در صفحه پیموده شده در جهت مثبت است (شکل ۲۸). انتگرال منحنی الخط $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید، که در آن $\vec{F} = \langle x^2, xy \rangle$.

حل.



شکل ۲۸

برای حل این مسئله در امتداد هر یک از اضلاع c_1، c_2، c_3 و c_4 به طور مجزا انتگرال را محاسبه کرده و باهم جمع می‌کنیم. پارامتری شده اضلاع به صورت زیر است:

$$C_1: (t,0),\quad 0\le t\le 1,\quad \vec{r}_1(t)=t\vec{i}$$
$$C_2: (1,t),\quad 0\le t\le 1,\quad \vec{r}_2(t)=\vec{i}+t\vec{j}$$
$$C_3: (1-t,1),\quad 0\le t\le 1,\quad \vec{r}_3(t)=(1-t)\vec{i}+\vec{j}$$
$$C_4: (0,1-t),\quad 0\le t\le 1,\quad \vec{r}_4(t)=(1-t)\vec{j}$$

بنابراین

$$\int_{C_1}\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{dr}=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3},$$
$$\int_{C_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{dr}=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2},$$
$$\int_{C_3}\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{dr}=\int_0^1 (1-t)^2(-1)\,dr=-\frac{1}{3}$$
$$\int_{C_4}\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{dr}=\int_0^1 0\,dt=0$$

و

$$\int_C\vec{F}(r)\cdot\vec{dr}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+0=\frac{1}{2}.$$

مثال ۲۷. $\int_C \cos z\,dx+e^x dy+e^y dz$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی پارامتری شده توسط تابع برداری $\langle x,y,z\rangle=\langle 1,t,e^t\rangle$ برای $0\le t\le 2$ است.

حل. داریم $dx=0$ ، $dy=dt$ ، $dz=e^t dt$ پس

$$\int_C[\cos z\,dx+e^x dy+e^y dz]=\int_0^2(0+e^1+e^{2t})\,dt$$
$$=\left[et+\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^2=2e+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$$

مثال ۲۸. مطلوب است $\int_C \sin\pi x\,dy-\cos\pi y\,dz$ که در آن C مثلثی با رئوس $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ است.

حل. منحنی C را به صورت $C=C_1+C_2+C_3$ می‌نویسیم که در آن C_1 پاره‌خط از $(1,0,0)$ تا $(0,1,0)$ ، C_2 پاره‌خط از $(0,1,0)$ تا $(0,0,1)$ و C_3 پاره‌خط از $(0,0,1)$ تا $(1,0,0)$ است. پارامتری شده روی $[0,1]$ برای این پاره‌خط‌ها عبارتند از

$$C_1: (x,y,z)=(1-t,t,0)\ \Rightarrow dx=-dt,\ dy=dt,\ dz=0$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

$$C_2: (x,y,z)=(0,1-t,t) \Rightarrow dx=0,\ dy=-dt,\ dz=dt$$

$$C_3: (x,y,z)=(t,0,1-t) \Rightarrow dx=dt,\ dy=0,\ dz=-dt$$

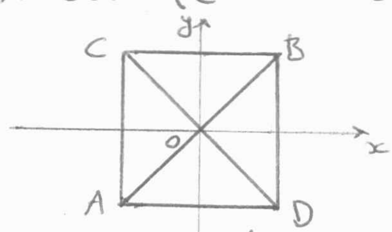
بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_C \sin(\pi x)dy-\cos(\pi y)dz &= \sum_{i=1}^{3}\int_{C_i}\sin(\pi x)dy-\cos(\pi y)dz \\
&= \int_0^1 \sin[\pi(1-t)]dt-\cos(\pi t)\times 0 \\
&\quad + \int_0^1 \sin(\pi\times 0)(-dt)-\cos[\pi(1-t)]dt \\
&\quad + \int_0^1 \sin\pi t\times 0-\cos(\pi\times 0)(-dt) \\
&= \int_0^1 \sin[\pi(1-t)]dt-\int_0^1\cos[\pi(1-t)]dt+\int_0^1 dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\{-\cos[\pi(1-t)]\}\Big|_0^1-\left(-\frac{1}{\pi}\right)\{\sin[\pi(1-t)]\}\Big|_0^1+1 \\
&= \frac{1}{\pi}(\cos 0-\cos\pi)+\frac{1}{\pi}(\sin 0-\sin\pi)+1 \\
&= \frac{1}{\pi}[1-(-1)]+\frac{1}{\pi}(0-0)+1=\frac{2}{\pi}+1
\end{aligned}$$

مثال ۲۹. فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری نگهدار در صفحه است. اگر انتگرال خطی $\vec{F}$ در امتداد منحنی AOB در شکل ۲۹ برابر 3.5 باشد. مطلوب است انتگرال $\vec{F}$ در امتداد خطوط شکسته

الف) ACB   ب) BDA   ج) ACBDA.

حل.



شکل ۲۹

الف) چون AOB و ACB دارای نقاط انتهایی یکسان هستند و $\vec{F}$ نگهدار است، پس انتگرال $\vec{F}$ در امتداد ACB برابر 3.5 است.

ب) BDA دارای همان نقاط انتهایی BOA است که برابر AOB- است پس انتگرال برابر 3.5- است.

ج) ACBDA یک منحنی بسته است، بنابراین انتگرال در امتداد آن صفر است.

مثال ۳۰. مطلوب است $\int_C y\,dx + x\,dy$ هرگاه C منحنی پارامتری $(t^9, \sin^9(\frac{\pi t}{2}))$ برای $0\le t\le 1$ باشد.

حل. توجه می‌کنیم که میدان برداری $\vec F = y\vec i + x\vec j$ گرادیان تابع $f(x,y)=xy$ است، زیرا $f_x=y$ ، $f_y=x$. مسیر انتگرال از $(0,0)$ در $t=0$ تا $(1,1)$ در $t=1$ است پس

$$\int_C \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = f(1,1)-f(0,0)=1-0=1$$

مثال ۳۱. کار انجام شده در حرکت جسمی به جرم m از فاصله r_1 تا فاصله r_2 در میدان جاذبه جسمی به جرم M تحت میدان نیروی $\vec F = -\frac{GMm}{r^3}\vec r$ که در آن $\vec r = x\vec i+y\vec j+z\vec k$ و جرم M در مبدأ قرار دارد، را بدست آورید.

حل. داریم $\vec F = -\vec\nabla V$ که در آن $V=-\frac{GMm}{r}$. فرض کنید C منحنی واصل بین نقاط A و B در فواصل r_1 و r_2 از مبدأ است. کار انجام شده توسط $\vec F$ برابر است با

$$W=\int_C \vec F\cdot d\vec r = -\int_C \vec\nabla V\cdot d\vec r = -(V(B)-V(A))$$
$$=V(A)-V(B)=GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

پس کار انجام شده در انجام این حرکت برابر $GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ است.

مثال ۳۲. نشان دهید میدان برداری $(2x+3y^2)\vec i+(9xy^2+2y)\vec j$ پایستار است. پاد را بدست آورید.

حل. با $P(x,y)=2x+3y^2$ و $Q(x,y)=9xy^2+2y$ داریم $P_y(x,y)=9y^2$ و $Q_x(x,y)=9y^2$ پس $P_y=Q_x$ یعنی میدان برداری پایستار است. برای یافتن پادیفرانسیل یعنی یافتن تابع f ، قرار می‌دهیم $f_x(x,y)=2x+3y^3$ و با انتگرال‌گیری نسبت به x به جواب اولیه x^2+3xy^3 می‌رسیم که باید تابع دلخواه $g(y)$ را به عنوان ثابت انتگرال‌گیری به آن اضافه کنیم، پس

$$f(x,y)=x^2+3xy^3+g(y)$$

حال با مشتق‌گیری نسبت به y از f و متحد قرار دادن با Q داریم

$$9xy^2+g'(y)=9xy^2+2y$$

$$g'(y)=2y$$

پس $g(y)=y^2+k$ که در آن k ثابت است. در نتیجه

$$f(x,y)=x^2+3xy^3+y^2+k$$

مثال ۳۳. نشان دهید میدان برداری $x^2\vec{i}+xy\vec{j}$ نگهدار نیست.

حل. با $P(x,y)=x^2$ و $Q(x,y)=xy$ داریم $P_y=0$ و $Q_x=y$. چون $P_y\neq Q_x$ پس میدان برداری نگهدار نیست.

مثال ۳۴. نشان دهید میدان برداری $\vec{F}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ نگهدار نیست (الف) با توجه به آزمون مشتق ضربدری (ب) با انتگرال گیری اطراف دایره $x^2+y^2=1$.

حل. الف) با $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$ و $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ داریم

$$P_y(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(-1)-(-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

و

$$Q_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(1)-(x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

با آن که $P_y=Q_x$، ولی میدان برداری نگهدار نیست زیرا $\vec{F}(x,y)$ در مبدا تعریف نشده است. پس آزمون مشتق ضربدری را نمی توان بکار برد.

ب) پارامتری شده دایره واحد C عبارت است از $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$. پس

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\vec{i}+\frac{\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\vec{j}\right)\cdot(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j})\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=2\pi$$

چون انتگرال اطراف یک مسیر بسته (دایره $x^2+y^2=1$) ناصفر است پس میدان برداری $\vec{F}$ نگهدار نیست.