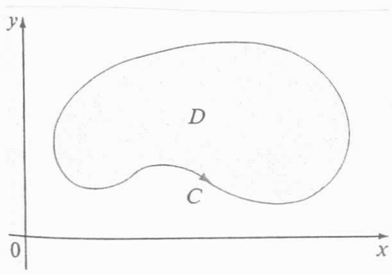
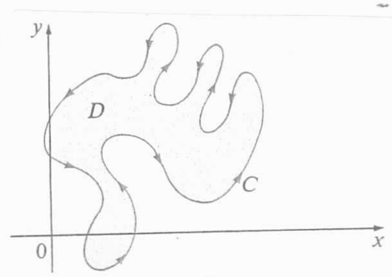
قضیه گرین

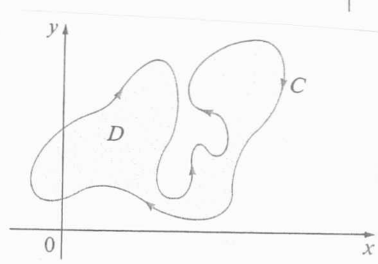
قضیه گرین ارتباط بین انتگرال خطی روی یک منحنی ساده C و انتگرال دوگانه روی ناحیه مسطح D محصور به منحنی C را نمایش می‌دهد. فرض می‌کنیم D شامل تمام نقاط داخل C و نقاط روی C است (شکل ۳۰) در بیان قضیه گرین از جهت مثبت یک منحنی ساده بسته C صحبت می‌کنیم که جهت حرکت روی C در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است. بنابراین اگر C توسط تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برای $a\le t\le b$ داده شده باشد، در این صورت ناحیه D همواره در سمت چپ نقاط پیموده شده روی C می‌باشد. (شکل ۳۱).



شکل ۳۰



الف) جهت مثبت



ب) جهت منفی

شکل ۳۱

قضیه ۲۸. گرین. فرض کنید منحنی C جهت‌دار شده مثبت، هموار تکه‌ای و ساده بسته در صفحه است و D ناحیه محصور توسط C باشد. اگر P و Q توابعی با مشتقات جزئی پیوسته روی یک ناحیه باز شامل D باشند، آنگاه

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \qquad (۴۲)$$

نمادگذاری ۲۹. از نماد $\oint_C P\,dx+Q\,dy$ یا $\oint_C P\,dx+Q\,dy$ گاهی اوقات برای مشخص کردن اینکه انتگرال منحنی الخط با استفاده از جهت مثبت روی منحنی بسته C محاسبه می‌شود، استفاده می‌کنیم. نماد دیگر برای منحنی مرز جهت‌دار شده مثبت از ناحیه D، ∂D است. پس قضیه گرین را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int_{\partial D} P\,dx+Q\,dy \qquad (۴۳)$$

قضیه گرین را باید به عنوان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرال‌های دوگانه در نظر گرفت. مشابه معادله (۴۳) با قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

انجام می‌شود، در هر دو حالت یک انتگرال برحسب مشتقات (F'، $\frac{\partial Q}{\partial x}$ و $\frac{\partial P}{\partial y}$) در طرف چپ معادله قرار دارد و در هر دو حالت طرف راست شامل مقادیر توابع اولیه (F، Q و P) است که تنها روی مرز دامنه مورد نظرند (در حالت یک بعدی دامنه فاصله $[a,b]$ است درحالی که مرزها تنها شامل دو نقطه a و b می‌باشند)

اثبات قضیه گرین در حالت کلی ساده نیست، اما در اینجا اثباتی برای حالت خاصی که در آن ناحیه هم از نوع ۱ و هم از نوع ۲ می‌باشد، ارائه می‌شود. چنین نواحی را نواحی ساده نامیم.

اثبات قضیه گرین برای حالتی که D یک ناحیه ساده است. توجه می‌کنیم که قضیه گرین ثابت خواهد شد، هرگاه نشان دهیم

$$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \qquad (۴۴)$$

و

$$\int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \qquad (۴۵)$$

رابطه (۴۴) را با بیان D به عنوان ناحیه نوع ۱ ثابت می‌کنیم. فرض کنید

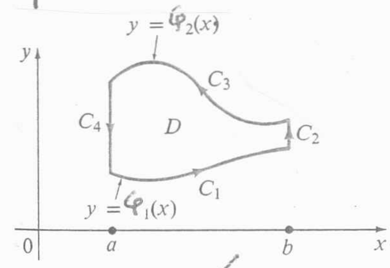
$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$$

که در آن φ_1 و φ_2 توابع پیوسته‌اند. پس انتگرال دوگانه طرف چپ را محاسبه می‌کنیم

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b[P(x,\varphi_2(x))-P(x,\varphi_1(x))]\,dx \qquad (۴۶)$$

که در آن، تساوی آخر از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال حاصل شده است. حال طرف چپ (۴۴) را با شکستن C به عنوان اجتماع چهار منحنی C_1، C_2، C_3 و C_4 در شکل ۳۲ محاسبه می‌کنیم. روی C_1، x را به عنوان پارامتر گرفته و معادلات پارامتری $x=x$، $y=\varphi_1(x)$ برای $a\le x\le b$ را داریم. بنابراین

$$\int_{C_1} P(x,y)\,dx=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx$$



شکل ۳۲

مشاهده می‌کنیم که C_3 از راست به چپ پیموده می‌شود اما $-C_3$ از چپ به راست، پس می‌توان معادلات پارامتری $-C_3$ را به صورت $x=x$ ، $y=\varphi_2(x)$ برای $a\le x\le b$ در نظر گرفت. بنابراین

$$\int_{C_3} P(x,y)\,dx=-\int_{-C_3} P(x,y)\,dx=-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx$$

روی C_2 یا C_4 ، x ثابت است پس $dx=0$ و

$$\int_{C_2} P(x,y)\,dx=0=\int_{C_4} P(x,y)\,dx$$

بنابراین

$$\int_C P(x,y)\,dx=\int_{C_1} P(x,y)\,dx+\int_{C_2} P(x,y)\,dx+\int_{C_3} P(x,y)\,dx+\int_{C_4} P(x,y)\,dx$$
$$=\int_a^b P(x,g_1(x))\,dx-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx$$

با مقایسه این عبارات و معادله (۴۴) داریم

$$\int_C P(x,y)\,dx=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

معادله (۴۵) به طریق مشابه با در نظر D به عنوان یک ناحیه نوع ۲ معادله (۴۵) حاصل می‌شود. بدین ترتیب قضیه گرین ثابت می‌شود.

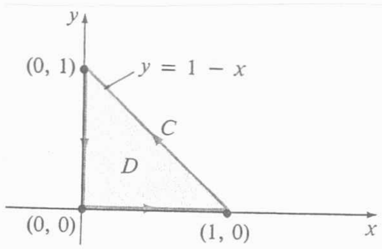
مثال ۳۵. مطلوب است $\int_C x^4dx+xy\,dy$ که در آن C منحنی مثلثی شامل پاره خط از $(0,0)$ تا $(1,0)$ ، پاره خط از $(1,0)$ تا $(0,1)$ و پاره خط از $(0,1)$ تا $(0,0)$ است.

حل. گرچه این انتگرال را می‌توان با روش معمولی محاسبه انتگرال منحنی الخط محاسبه کرد که شامل سه انتگرال مجزا روی سه ضلع مثلث می‌باشد، در اینجا از قضیه گرین استفاده می‌کنیم. توجه

داریم که ناحیه D محصور شده توسط C ساده است و C دارای جهت مثبت است (شکل ۳۳).

اگر فرض کنیم $P(x,y)=x^4$ و $Q(x,y)=xy$

در این صورت داریم



شکل ۳۳

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

و

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y$$

پس

$$\begin{aligned}
\int_C x^4dx+xydy &= \iint_D (Q_x-P_y)\,dA \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}(y-0)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

مثال ۳۶. مطلوب است $\oint_C (3y-e^{\sin x})dx+(7x+\sqrt{y^4+1})dy$ که در آن C دایره به مرکز مبدا و شعاع 3 است.

حل: ناحیه محصور به منحنی C قرص $D: x^2+y^2\le 9$ است. با تغییر به مختصات قطبی بعد از بکارگیری قضیه گرین داریم

$$\begin{aligned}
&\oint_C (3y-e^{\sin x})dx+(7x+\sqrt{y^4+1})dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(7x+\sqrt{y^4+1})-\frac{\partial}{\partial y}(3y-e^{\sin x})\right]dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (7-3)\,r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r\,dr = 36\pi
\end{aligned}$$

در مثال‌های ۳۵ و ۳۶ دیده می‌شود که محاسبه انتگرال دوگانه ساده‌تر از محاسبه انتگرال منحنی الخط است. اما گاهی اوقات محاسبه انتگرال منحنی الخط و قضیه گرین در جهت عکس انجام می‌گیرد.

برای مثال، اگر بدانیم $P(x,y)=Q(x,y)=0$ روی منحنی C، آن گاه قضیه گرین نتیجه می‌دهد که

$$\iint_D (Q_x-P_y)\,dA=\int_C P\,dx+Q\,dy=0$$

که هیچ فرضی روی مقادیر P و Q در ناحیه D ندارد.

از کاربردهای دیگر قضیه گرین محاسبه مساحت است. می‌دانیم که مساحت ناحیه D برابر $\iint_D 1\,dA$ است، پس با انتخاب P و Q مناسب، به طوری که $Q_x-P_y=1$ باشد، می‌توان مساحت D را به دست آورد. داریم

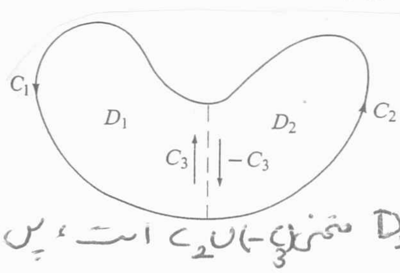
$$A=\oint_C x\,dy=-\oint_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx \qquad (۴۷)$$

مثال ۳۷. مساحت ناحیه محصور به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را به دست آورید.

حل. بیضی دارای معادلات پارامتری $x=a\cos t$ و $y=b\sin t$ برای $0\le t\le 2\pi$ است. با استفاده از فرمول سوم در (۴۷) داریم

$$\begin{aligned} A&=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t)(b\cos t)\,dt-(b\sin t)(-a\sin t)\,dt\\ &=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab \end{aligned}$$

نکته ۲۹. گرچه، قضیه گرین را تنها برای حالتی که D ساده است، ثابت کردیم، می‌توانیم برای حالتی که D اجتماع تعدادی متناهی ناحیه ساده است، قضیه را گسترش دهیم. برای مثال، اگر D ناحیه نشان داده شده در شکل ۳۴ باشد، آن گاه می‌توان D را به صورت $D=D_1\cup D_2$ نوشت که در آن D_1 و D_2 هر دو ساده‌اند.



شکل ۳۴

مرز D_1 منحنی $C_1\cup C_3$ و مرز D_2 منحنی $C_2\cup(-C_3)$ است، پس با توجه به قضیه گرین برای D_1 و D_2 به طور مجزا داریم

$$\int_{C_1\cup C_3} P\,dx+Q\,dy=\iint_{D_1}(Q_x-P_y)\,dA$$

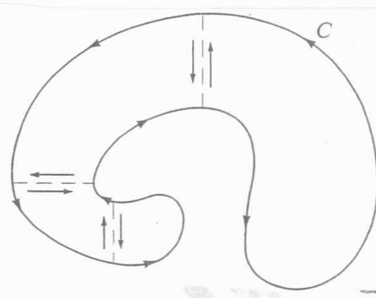
$$\int_{C_2\cup(-C_3)} P\,dx+Q\,dy=\iint_{D_2}(Q_x-P_y)\,dA$$

اگر این دو رابطه را جمع کنیم، انتگرال در امتداد C_3 و $-C_3$ حذف می‌شوند و داریم

$$\int_{C_1\cup C_2} P\,dx+Q\,dy=\iint_{D}(Q_x-P_y)\,dA$$

که قضیه گرین برای $D=D_1\cup D_2$ است زیرا مرز آن $C=C_1\cup C_2$ است.

همین استدلال را می‌توان برای اجتماع تعدادی متناهی ناحیه ساده بکار برد (شکل ۳۵)



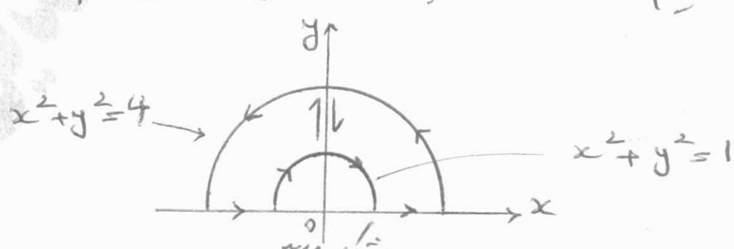
شکل ۳۵

مثال ۳۸. مطلوب است

$$\oint_C y^2\,dx+3xy\,dy$$

که در آن C مرز نیم حلقه ناحیه D در نیم صفحه بالایی محصور به دوایر $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است.

حل. توجه داریم که D ساده نیست، محور yها آن را به دو ناحیه ساده تقسیم می‌کند (شکل ۳۶)



شکل ۳۶

در مختصات قطبی داریم

$$D=\{(r,\theta)\mid 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

بنابراین قضیه گرین نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\int_C y^2\,dx+3xy\,dy&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right]dA\\&=\iint_D y\,dA=\int_0^{\pi}\int_1^2(r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_1^2 r^2\,dr=[-\cos\theta]_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2\\&=\frac{14}{3}.\end{aligned}$$

نکته:

همبند ساده نیز ...

منحنی ساده بسته ...

ناحیه D همبند است چون ...

شامل برای منحنی بیرونی C_1 ...

اگر D را به دو ناحیه D' و D'' ...

کنیم و سپس قضیه گرین را برای هر ...

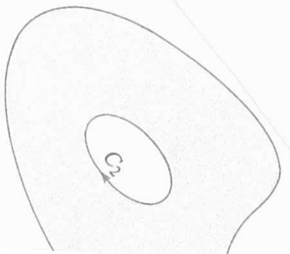
$$\iint_{D'} (Q_x - P_y)\,dA + \iint_{D''} (Q_x - P_y)\,dA$$

$$\int_{\partial D'} Pdx + Qdy + \int_{\partial D''} Pdx + Qdy$$

... در امتداد مرزهای مشترک ... های منحنی الخط ... و در ...

$$\iint (Q_x - P_y)\,dA = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qd\ldots$$

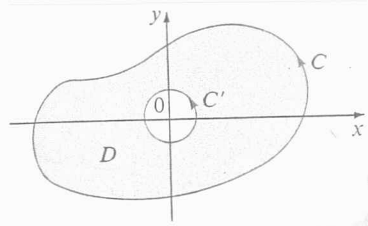
$$= \int_C Pdx + Qdy$$



$\ldots \cdot d\vec{r} = 2\pi$ رصید ...

خواجه نصیرالدین طوسی

مستقیم مشخص است. بنابراین دایره C' جهت دار شده در خلاف حرکت عقربه های ساعت با مرکز مبدا و شعاع a را در نظر می گیریم که در آن a به اندازه کافی کوچک است، به طوری که C' داخل C قرار گیرد (شکل ۳۸)



شکل ۳۸

فرض کنید D ناحیه کراندار توسط C و C' است. در این صورت جهت مثبت مرز $C\cup(-C')$ است و بنابراین قضیه گرین با شرح بیان شده در نکته ۳۰ را می توان بکار برد. داریم

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+\int_{-C'} P\,dx+Q\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dA$$

$$=\iint_D\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dA=0$$

پس

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_{C'} P\,dx+Q\,dy$$

یعنی

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r=\int_{C'}\vec F\cdot d\vec r$$

حال به سادگی می توان انتگرال روی C' را با پارامتری شده C' یعنی $\vec r(t)=a\cos t\,\vec i+a\sin t\,\vec j$ برای $0\le t\le 2\pi$ محاسبه کرد. بنابراین

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r=\int_{C'}\vec F\cdot d\vec r=\int_0^{2\pi}\vec F(\vec r(t))\cdot\vec r'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(-a\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

اثبات قضیه ۲۶. فرض داریم $\vec F=P\vec i+Q\vec j$ میدان نیرو روی ناحیه همبند ساده باز D است، P و Q دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته اند و روی ناحیه D

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

است. اگر C هر مسیر ساده بسته در D باشد و R ناحیه‌ای در D محصور به C باشد، آن‌گاه قضیه گرین داریم

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

بنابراین $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر در D است، در نتیجه $\vec{F}$ یک میدان برداری نگهدار است.

کرل و دیورژانس

تعریف ۳۱. فرض کنید $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ است و مشتقات جزئی P، Q و R تماماً موجود باشند، در این صورت کرل $\vec{F}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ تعریف شده توسط

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (۴۸)$$

است.

به عنوان یک ایده برای به خاطر سپاری فرمول کرل $\vec{F}$، از عملگر نابلا $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ استفاده می‌کنیم. قبلاً دیدیم که اثر این عملگر روی تابع اسکالر f، منجر به یافتن گرادیان f می‌شود.

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

حال اگر عملگر $\vec{\nabla}$ را به صورت ضرب خارجی روی میدان برداری $\vec{F}$ اثر کنیم، داریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \operatorname{curl}\vec{F}$$

بنابراین

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{۴۹}$$

مثال ۴۰. اگر $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}+xyz\vec{j}-y^2\vec{k}$، مطلوب است $\operatorname{curl}\vec{F}$.

حل. با استفاده از فرمول (۴۹) داریم

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = -y(2+x)\vec{i}+x\vec{j}+yz\vec{k}$$

یادآوری می‌کنیم که گرادیان تابع f از سه متغیر، یک میدان برداری است، بنابراین می‌توان کرل آن را محاسبه نمود. قضیه ۳۲ بیان می‌کند که کرل یک میدان برداری گرادیان صفر است.

قضیه ۳۲. اگر f تابعی از سه متغیر دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد آنگاه

$$\operatorname{curl}(\vec{\nabla} f)=\vec{0}$$

اثبات. داریم

$$\operatorname{curl}(\vec{\nabla} f)=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\vec{j}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}$$
$$=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$$

حال چون یک میدان برداری نگهدار، یک میدان گرادیان است یعنی $\vec{F}=\vec{\nabla} f$، این قضیه ۳۲ بیان می‌کند که اگر $\vec{F}$ نگهدار باشد آنگاه $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$. این روشی برای تعیین نگهدار نبودن یک میدان برداری است.

مثال ۴۱. نشان دهید میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}+xyz\vec{j}-y^2\vec{k}$ نگهدار نیست.

حل. در مثال ۴۰ دیدیم که

$$\operatorname{curl}\vec{F}=-y(2+x)\,\vec{i}+x\,\vec{j}+yz\,\vec{k}$$

پس $\operatorname{curl}\vec{F}\neq\vec{0}$ و در نتیجه میدان برداری $\vec{F}$ نگهدار نیست.

توضیح ۳۳. عکس قضیه ۳۲ در حالت کلی درست نیست، اما اگر $\vec{F}$ در همه جا تعریف شده باشد، عکس قضیه ۳۲ برقرار می‌شود.

قضیه ۳۴. اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری تعریف شده روی تمام $\mathbb{R}^3$ باشد که توابع مولفه‌ای آن دارای مشتقات جزئی پیوسته‌اند و $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$ آنگاه $\vec{F}$ یک میدان برداری نگهدار است.

مثال ۴۲. الف) نشان دهید $\vec{F}(x,y,z)=y^2z^3\vec{i}+2xyz^3\vec{j}+3xy^2z^2\vec{k}$ یک میدان برداری نگهدار است.

ب) تابع f را بیابید به طوری که $\vec{F}=\vec{\nabla}f$.

حل. الف) کرل $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=(6xyz^2-6xyz^2)\vec{i}-(3y^2z^2-3y^2z^2)\vec{j}+(2yz^3-2yz^3)\vec{k}=$$
$$=\vec{0}$$

چون $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$ و دامنه $\vec{F}$ فضای $\mathbb{R}^3$ است، پس $\vec{F}$ یک میدان برداری نگهدار می‌باشد.

ب) داریم $f_x(x,y,z)=y^2z^3$ ، $f_y(x,y,z)=2xyz^3$ و $f_z(x,y,z)=3xy^2z^2$ پس

$$f(x,y,z)=xy^2z^3+g(y,z).$$

بنابراین $2xyz^3+g_y(x,y)=f_y(x,y,z)=2xyz^3$ در نتیجه $g_y(x,y)=0$ پس

$$g(x,y)=h(z)$$

و $3xy^2z^2=f_z(x,y,z)=3xy^2z^2+h'(z)$ بنابراین $h'(z)=0$ یعنی $h(z)=K$ و داریم

$$f(x,y,z)=xy^2z^3+K$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

دیورژانس

تعریف ۳۵. اگر $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ باشد و $\frac{\partial P}{\partial x}$ و $\frac{\partial Q}{\partial y}$ و $\frac{\partial R}{\partial z}$ موجود باشند، آنگاه دیورژانس $\vec{F}$ تابعی از سه متغیر تعریف شده توسط

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \qquad (۵۰)$$

است.

مشاهده می‌شود که $\operatorname{curl}\vec{F}$ یک میدان برداری است اما $\operatorname{div}\vec{F}$ یک میدان اسکالر است. برحسب عملگر نابلا $\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$، دیورژانس به طور نمادی به صورت ضرب نقطه‌ای $\vec{\nabla}$ و $\vec{F}$ نوشته می‌شود.

$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}.\vec{F} \qquad (۵۱)$$

مثال ۴۳. اگر $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}+xyz\vec{j}-y^2\vec{k}$ باشد، مطلوب است $\operatorname{div}\vec{F}$.

حل. طبق تعریف ۳۵ داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}.\vec{F}&=\frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}(xyz)+\frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\\&=z+xz\end{aligned}$$

توضیح ۳۶. اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ باشد، آنگاه $\operatorname{curl}\vec{F}$ نیز یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ است، پس می‌توان دیورژانس آن را تعیین کرد. قضیه بعد نشان می‌دهد حاصل ۰ است.

قضیه ۳۷. اگر $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ بوده و P، Q و R دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشند آنگاه

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{F})=\operatorname{div}\operatorname{curl}\vec{F}=0$$

اثبات. با استفاده از تعریف‌های دیورژانس و کرل داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{curl}\vec{F})&=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{F})\\&=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0\end{aligned}$$

مثال ۴۴. نشان دهید میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}+xyz\vec{j}-y^2\vec{k}$ را نمی‌توان به صورت کرل یک میدان برداری دیگر نوشت یعنی $\vec{F}\neq \operatorname{curl}\vec{G}$.

حل. در مثال ۴۳ دیدیم که

$$\operatorname{div}\vec{F}=z+xz$$

بنابراین $\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$. اگر برای میدان برداری مانند $\vec{G}$ داشته باشیم $\vec{F}=\operatorname{curl}\vec{G}$ آنگاه باید

$$\operatorname{div}\vec{F}=\operatorname{div}\operatorname{curl}\vec{G}=0$$

که با $\operatorname{div}\vec{F}\neq 0$ در تناقض است. بنابراین $\vec{F}$ نمی‌تواند کرل میدان برداری دیگری باشد.

از ترکیب عملگرهای دیفرانسیلی، می‌توان دیورژانس میدان برداری گرادیان $\vec{\nabla} f$ را محاسبه کرد. اگر f تابعی از سه متغیر باشد، داریم

$$\operatorname{div}(\vec{\nabla} f)=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (۵۲)$$

این عبارت را اغلب با نماد اختصاری $\vec{\nabla}^2 f$ نمایش می‌دهیم. پس

$$\vec{\nabla}^2=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$$

که آن را عملگر لاپلاس نامیم، زیرا رابطه‌ای برای معادله لاپلاس

$$\vec{\nabla}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

است. می‌توانیم عملگر لاپلاس $\vec{\nabla}^2$ را برای میدان برداری

$$\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$$

برحسب مولفه‌ها بکار برد.

$$\vec{\nabla}^2\vec{F}=\vec{\nabla}^2 P\,\vec{i}+\vec{\nabla}^2 Q\,\vec{j}+\vec{\nabla}^2 R\,\vec{k} \qquad (۵۳)$$

فرم برداری قضیه گرین.

عملگرهای کرل و دیورژانس به ما اجازه نوشتن قضیه گرین در فرمی که بعداً روی آن تمرکز

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

خواهیم شد را می دهند. ناحیه مسطح D ، مرز C آن و توابع P و Q برقرار در فرضیات قضیه گرین را در نظر بگیرید. میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ را انتخاب می کنیم ، انتگرال منحنی الخط آن عبارت است از

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

و کرل آن به صورت زیر است

$$\text{curl}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

بنابراین

$$(\text{curl}\ \vec{F})\cdot\vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

می توان قضیه گرین را به فرم زیر نمایش داد

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\text{curl}\ \vec{F})\cdot\vec{k}\,dA \qquad (۵۴)$$

معادله (۵۴) عبارت انتگرال خطی را برحسب مولفه مماسی $\vec{F}$ در امتداد C به عنوان انتگرال دوگانه $(\text{curl}\vec{F})\cdot\vec{k}$ روی ناحیه D محصور شده توسط C را نمایش می دهد. می توان فرمول مشابهی برحسب مولفه قائم $\vec{F}$ بدست آورد.

اگر C توسط معادله برداری

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \qquad a \le t \le b$$

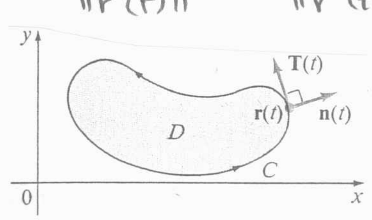
داده شده باشد، آنگاه بردار یکه مماس عبارت است از

$$\vec{T}(t) = \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\vec{i} + \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\vec{j}$$

می توان دید که بردار یکه قائم به طرف خارج برای C عبارت است از

$$\vec{n}(t) = \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\vec{i} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\vec{j}$$

شکل ۳۹ را ببینید



شکل ۳۹

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

حال از معادله (۵) داریم

$$\int_C \vec F\cdot\vec n\, ds=\int_a^b (\vec F\cdot\vec n)\,\|\vec r\,'(t)\|\,dt$$
$$=\int_a^b\left[\frac{P(x(t),y(t))\,y'(t)}{\|\vec r\,'(t)\|}-\frac{Q(x(t),y(t))\,x'(t)}{\|\vec r\,'(t)\|}\right]\|\vec r\,'(t)\|\,dt$$
$$=\int_a^b P(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt-Q(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$
$$=\int_a^b P\,dy-Q\,dx$$
$$=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA$$

انتگرالده در این عبارت برای انتگرال دوگانه همان $\operatorname{div}\vec F$ است، پس

$$\oint_C \vec F\cdot\vec n\, ds=\iint_D \operatorname{div}\vec F(x,y)\,dA \qquad (۵۵)$$

معادله (۵۵) بیان می‌کند که مولفه قائم $\vec F$ در امتداد C برابر با انتگرال دوگانه از دیورژانس $\vec F$ روی ناحیه D محصور به C است.

انتگرال رویه‌ای

در ریاضی عمومی ۱، مساحت نوعی خاص از رویه‌ها یعنی رویه‌های دوران یافته را با استفاده از روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره به دست آورده‌ایم. در کاربردهای انتگرال دوگانه مساحت یک رویه را با استفاده از انتگرال‌های دوگانه تعیین کردیم و در آنجا مساحت رویه داده شده توسط معادلاتی به فرم $z=f(x,y)$ (نمودار یک تابع از دو متغیر) یا $F(x,y,z)=c$ (رویه تراز تابع F از سه متغیر) را به دست آوردیم.

در این بخش ابتدا سعی در یافتن مساحت رویه‌های کلی‌تر که آنها را رویه‌های پارامتری می‌نامیم داشته و سپس به مسئله مهم انتگرال‌های رویه‌ای خواهیم پرداخت.

دیدیم که یک منحنی فضایی توسط تابع برداری $\vec r=\vec r(t)$ از یک پارامتر t نمایش داده می‌شود. می‌توانیم یک رویه را توسط تابع برداری $\vec r(u,v)$ از دو پارامتر u و v نمایش دهیم. فرض کنید

$$\vec r(u,v)=x(u,v)\,\vec i+y(u,v)\,\vec j+z(u,v)\,\vec k \qquad (۵۶)$$