حال از معادله (۵) داریم

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\int_a^b(\vec{F}\cdot\vec{n})\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$
$$=\int_a^b\left[\frac{P(x(t),y(t))\,y'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}-\frac{Q(x(t),y(t))\,x'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\right]\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$
$$=\int_a^b P(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt-Q(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$$
$$=\int_a^b P\,dy-Q\,dx$$
$$=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA$$

انتگرالده در این عبارت برای انتگرال دوگانه همان $\operatorname{div}\vec{F}$ است، پس

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_D \operatorname{div}\vec{F}(x,y)\,dA \qquad (۵۵)$$

معادله (۵۵) بیان می‌کند که مولفه قائم $\vec{F}$ در امتداد C برابر با انتگرال دوگانه از دیورژانس $\vec{F}$ روی ناحیه D محصور به C است.

انتگرال رویه‌ای

در ریاضی عمومی ۱، مساحت نوعی خاص از رویه‌ها یعنی رویه‌های دوران یافته را با استفاده از روش‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال تک متغیره به دست آورده‌ایم. در کاربردهای انتگرال دوگانه مساحت یک رویه را با استفاده از انتگرال‌های دوگانه تعیین کردیم و در آنجا مساحت رویه داده شده توسط معادلاتی به فرم $z=f(x,y)$ (نمودار یک تابع از دو متغیر) یا $F(x,y,z)=c$ (رویه تراز تابع F از سه متغیر) را به دست آوردیم.

در این بخش ابتدا سعی در یافتن مساحت رویه‌های کلی‌تر که آنها را رویه‌های پارامتری می‌نامیم داشته و سپس به مسئله مهم انتگرال‌های رویه‌ای خواهیم پرداخت.

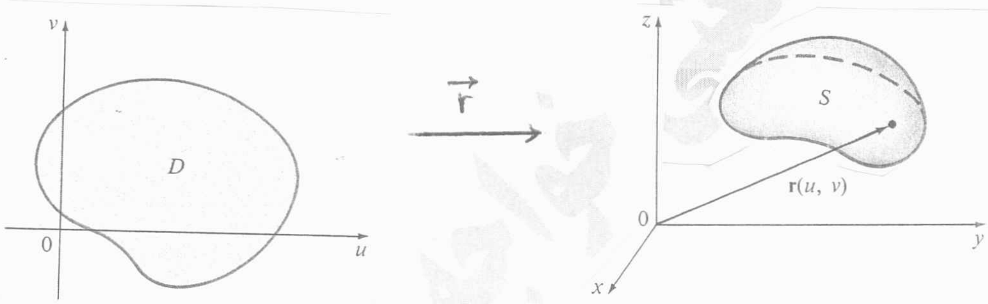
دیدیم که یک منحنی فضایی توسط تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ از یک پارامتر t نمایش داده می‌شود. می‌توانیم یک رویه را توسط تابع برداری $\vec{r}(u,v)$ از دو پارامتر u و v نمایش دهیم. فرض کنید

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\,\vec{i}+y(u,v)\,\vec{j}+z(u,v)\,\vec{k} \qquad (۵۶)$$

تابعی با مقادیر برداری تعریف شده بر ناحیه D در صفحه uv است و مشتقات جزئی x، y و z نسبت به u و v پیوسته‌اند. مجموعه تمام نقاط (x,y,z) در $\mathbb{R}^3$ که

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v),\qquad z=z(u,v) \tag{۵۶}$$

و (u,v) در D تغییر می‌کند را یک رویه پارامتری S نامیده و معادلات (۵۶) را معادلات پارامتری S نامند. به عبارت دیگر، رویه S توسط انتهای بردار $\vec{r}(u,v)$ وقتی (u,v) در ناحیه D تغییر می‌کند، به دست می‌آید. (شکل ۴۰)



شکل ۴۰

مثال ۴۵. نمایش پارامتری کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را به دست آورید.

حل. کره دارای نمایش ساده $\rho=a$ در مختصات کروی است، پس با انتخاب زوایای θ، φ در مختصات کروی به عنوان پارامتر و با قرار دادن $\rho=a$ در معادلات تبدیل مختصات کروی به دکارتی داریم

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=a\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=a\cos\varphi$$

پس

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=a\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i}+a\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j}+a\cos\varphi\,\vec{k}$$

معادله برداری کره است. چون $0\le\varphi\le\pi$، $0\le\theta\le 2\pi$، پس دامنه پارامتر مستطیل زیر است

$$D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

مثال ۴۶. نمایش پارامتری استوانه

$$x^2+y^2=4 \qquad 0\le z\le 1$$

را به دست آورید.

حل. استوانه دارای نمایش ساده $r=2$ در مختصات استوانه‌ای است. پس با انتخاب θ و z در مختصات استوانه‌ای به عنوان پارامتر، معادله پارامتری استوانه به صورت

$$x=2\cos\theta,\quad y=2\sin\theta,\quad z=z$$

است که در آن $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le z\le 1$.

مثال ۴۷. نمایش پارامتری سهمی‌گون بیضوی وار $z=x^2+2y^2$ را به دست آورید.

حل. اگر x و y به عنوان پارامتر انتخاب شوند، آن گاه معادلات پارامتری عبارتند از

$$x=x,\quad y=y,\quad z=x^2+2y^2$$

و معادله برداری به صورت

$$\vec r(x,y)=x\vec i+y\vec j+(x^2+2y^2)\vec k$$

است.

به طور کلی، یک رویه به عنوان نمودار تابعی از x و y است. یعنی با معادله‌ای به فرم $z=f(x,y)$ همواره می‌توان رویه را به عنوان یک رویه پارامتری با فرض x و y به عنوان پارامتر می‌توان اختیار کرد و معادلات پارامتری

$$x=x,\quad y=y,\quad z=f(x,y)$$

را در نظر گرفت.

حال می‌خواهیم صفحه مماس به یک رویه پارامتری S داده شده توسط تابع برداری $\vec r(u,v)$ در نقطه P_0 با بردار موقعیت $\vec r(u_0,v_0)$ را به دست آوریم. اگر u با انتخاب $u=u_0$ ثابت در نظر گرفته شود، آن گاه $\vec r(u_0,v)$ تابعی برداری از یک پارامتر v است و یک منحنی C_1 که بر S واقع است را تعریف می‌کند، بردار مماس به C_1 در P_0 عبارت است از

$$\vec r_v=\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\vec i+\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\vec j+\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\vec k \qquad (۵۷)$$

به طور مشابه با ثابت نگه داشتن v یعنی $v=v_0$، منحنی C_2 تعریف شده توسط $\vec r=\vec r(u,v_0)$ روی S به دست می‌آید و بردار مماس در P_0 عبارت است از

$$\vec{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\vec{k} \qquad (۵۸)$$

اگر بردار قائم $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ ناصفر باشد آنگاه رویه S را رویه هموار می‌گوییم (گوشه ندارد). در این حالت صفحه مماس بر S در P_0 موجود است و به عنوان صفحه گذرنده از P_0 با بردار قائم $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ است. (شکل ۴۱)

مثال ۴۷. صفحه مماس بر رویه با معادلات پارامتری

$$x = u^2,\quad y = v^2,\quad z = u + 2v$$

در نقطه $(1,1,3)$ را به دست آورید.

حل. ابتدا بردارهای مماس

$$\vec{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} = 2u\vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k} = 2v\vec{j} + 2\vec{k}$$

را به دست می‌آوریم. بنابراین بردار قائم عبارت است از

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = -2v\vec{i} - 4u\vec{j} + 4uv\vec{k}$$

توجه داریم که نقطه $(1,1,3)$ متناظر به مقادیر پارامتر $u=1$ و $v=1$ است. پس بردار قائم به صفحه مورد نظر عبارت است از

$$-2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

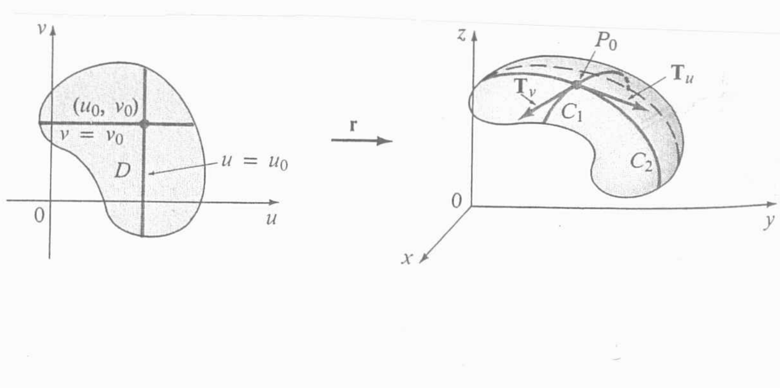
بنابراین صفحه مماس در $(1,1,3)$ به صورت

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$$

یا

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

است.



شکل ۴۱

اکنون مساحت رویه تولید شده توسط معادله پارامتری (۵۶) را تعیین می‌کنیم. برای سادگی کار، رویه را در حالتی که ناحیه D یک مستطیل است و به زیرمستطیل‌های R_{ij} افراز شده، در نظر می‌گیریم. نقطه (u_i^*, v_j^*) را در گوشه سمت چپ پایین R_{ij} اختیار می‌کنیم. (شکل ۴۲). زیرقسمت S_{ij} از رویه S متناظر به زیرمستطیل R_{ij} دارای نقطه P_{ij} با بردار موقعیت $\vec{r}(u_i^*, v_j^*)$ به عنوان یکی از گوشه‌ها می‌باشد. فرض کنید

$$\vec{T}_{u_i} = \vec{T}_u(u_i^*, v_j^*), \qquad \vec{T}_{v_j} = \vec{T}_v(u_i^*, v_j^*)$$

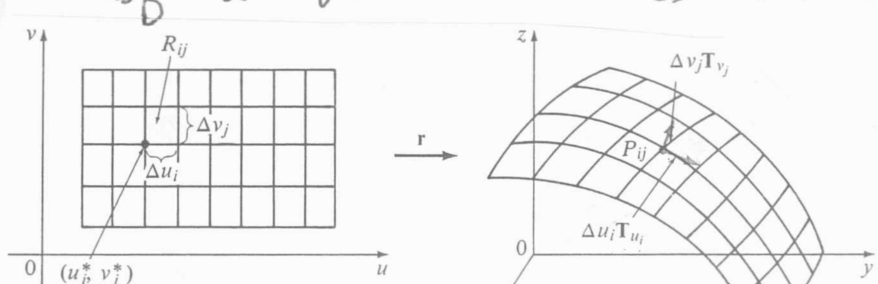
بردارهای مماس در P_{ij} داده شده توسط معادلات (۵۷) و (۵۸) است. S_{ij} را توسط متوازی‌الاضلاع تعیین شده با بردارهای $\Delta u_i \vec{T}_{u_i}$ و $\Delta v_j \vec{T}_{v_j}$ تقریب می‌زنیم (این متوازی‌الاضلاع‌ها در شکل ۴۲ نمایش داده شده‌اند و در صفحه مماس به S در P_{ij} قرار دارند). مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر

$$\|(\Delta u_i)\vec{T}_{u_i} \times (\Delta v_j)\vec{T}_{v_j}\| = \|\vec{T}_{u_i} \times \vec{T}_{v_j}\| \Delta u_i \Delta v_j$$

است و بنابراین تقریبی برای مساحت رویه S عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|\vec{T}_{u_i} \times \vec{T}_{v_j}\| \Delta u_i \Delta v_j$$

حال وقتی $\|P\| \to 0$، این تقریب بهتر خواهد شد و به عنوان حد جمع دوگانه به صورت یک جمع ریمانی برای انتگرال دوگانه $\iint_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\, dv$ است. پس تعریف زیر را داریم.



شکل ۴۲

تعریف ۳۸. مساحت رویه که با رویه پارامتری S توسط (۵۶) داده شده است، به صورت

$$A(S) = \iint_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, dA \qquad (۵۹)$$

تعریف می‌شود که در آن $\vec{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$ ، $\vec{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$.

با محاسبه ضرب خارجی بردارهای مماس، داریم

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\vec{j}$$
$$+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\vec{k}$$
$$= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}$$

که در آن از نماد ژاکوبین استفاده کرده‌ایم. بنابراین فرمول مساحت رویه از تعریف (۳۸) عبارت است از

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, dA \qquad (۴۵)$$

مثال ۴۸. مساحت رویه کروی به شعاع a را به دست آورید.

حل. در مثال (۴۵) نمایش پارامتری یک کره به صورت زیر به دست آمد

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, \quad y = a\sin\varphi\sin\theta, \quad z = a\cos\varphi$$

که در آن دامنه پارامتری به صورت زیر است

$$D = \{(\varphi,\theta) \mid 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

ابتدا ضرب خارجی بردارهای مماس را به دست می‌آوریم

$$\vec{T}_\varphi \times \vec{T}_\theta = a^2\sin^2\varphi\cos\theta\,\vec{i} + a^2\sin^2\varphi\sin\theta\,\vec{j} + a^2\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{k}$$

بنابراین

$$\|\vec{T}_\varphi \times \vec{T}_\theta\| = \sqrt{a^4\sin^4\varphi\cos^2\theta + a^4\sin^4\varphi\sin^2\theta + a^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$
$$= \sqrt{a^4\sin^4\varphi + a^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$
$$= a^2\sqrt{\sin^2\varphi} = a^2\sin\varphi$$

چون $\sin\varphi \ge 0$ برای $0 \le \varphi \le \pi$، بنابراین مساحت کره عبارت است از

$$A = \iint_D \|\vec{T}_\varphi - \vec{T}_\theta\|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$

توضیح ۳۹. برای حالت خاصی که رویه S با معادله $z=f(x,y)$ داده شده است که در آن (x,y) در D است و f دارای مشتقات جزئی پیوسته می‌باشد، x و y را به عنوان پارامتر اختیار می‌کنیم. معادلات پارامتری عبارتند از

$$x=x, \quad y=y, \quad z=f(x,y)$$

پس

$$\vec{T}_x=\vec{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{k}, \qquad \vec{T}_y=\vec{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}$$

و

$$\vec{T}_x\times\vec{T}_y=-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\vec{k} \qquad (۴۱)$$

بنابراین فرمول مساحت رویه در تعریف (۳۸) حاصل می‌شود.

$$A(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA \qquad (۴۲)$$

می‌توان این فرمول را با فرمول طول قوس مقایسه کرد.

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

مثال ۴۹. مساحت قسمتی از سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ که زیر صفحه $z=9$ قرار دارد را به دست آورید.

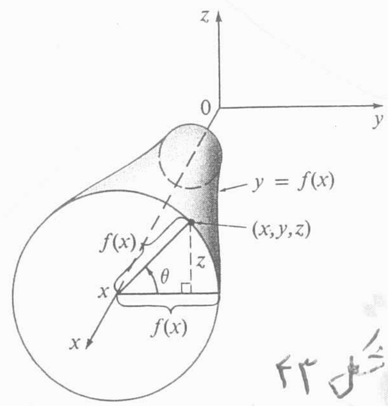
حل. تلاقی صفحه با سهمی‌گون، دایره $x^2+y^2=9$ و $z=9$ است. بنابراین رویه بالای قرص D با مرکز مبدأ و شعاع 3 قرار دارد. با استفاده از فرمول (۴۲) داریم

$$\begin{aligned}A&=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA=\iint_D\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dA\\&=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^3\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta\\&=\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)\end{aligned}$$

توضیح ۴۰. تعریف مساحت یک رویه داده شده توسط رابطه (۵۹) با فرمول مساحت یک رویه دوران یافته سازگار است. فرض کنید رویه S از دوران منحنی $y=f(x)$ برای $a\le x\le b$ حول محور xها حاصل شده است، که در آن $f(x)\ge 0$ و f' پیوسته است. فرض کنید θ زاویه دوران نشان داده شده در شکل (۴۳) است. اگر (x,y,z) نقطه‌ای روی S باشد

آن گاه

$$x=x,\quad y=f(x)\cos\theta,\quad z=f(x)\sin\theta \qquad (۴۳)$$



شکل ۴۳

بنابراین x و θ پارامترند و معادلات (۴۳) معادلات پارامتری رویه S می‌باشند، و دامنه پارامتر توسط $a\le x\le b$ و $0\le\theta\le 2\pi$ داده می‌شود. برای محاسبه مساحت رویه S بردارهای مماس را به دست می‌آوریم

$$\vec{T}_x=\vec{i}+f'(x)\cos\theta\,\vec{j}+f'(x)\sin\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{T}_\theta=-f(x)\sin\theta\,\vec{j}+f(x)\cos\theta\,\vec{k}$$

بنابراین

$$\vec{T}_x\times\vec{T}_\theta=f(x)f'(x)\,\vec{i}-f(x)\cos\theta\,\vec{j}-f(x)\sin\theta\,\vec{k}$$

و چون $f(x)\ge 0$ داریم

$$\|\vec{T}_x\times\vec{T}_\theta\|=\sqrt{[f(x)]^2[1+(f'(x))^2]}=f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

بنابراین

$$A=\iint_D\|\vec{T}_x\times\vec{T}_\theta\|\,dA=\int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,d\theta$$
$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

که همان فرمول مساحت رویه دوران یافته است.

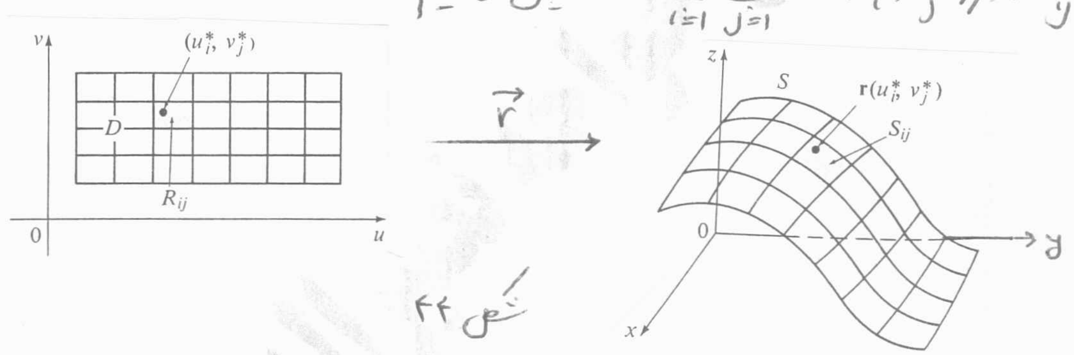
حال انتگرال های توابع تعریف شده بر رویه S مورد نظر ما است. رابطه بین انتگرال های رویه‌ای و مساحت رویه مشابه رابطه بین انتگرال های خطی و طول قوس است. فرض کنید

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

f تابعی از سه متغیر با دامنه توصیف شامل رویه‌ای هموار با معادله برداری

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\,\vec{i}+y(u,v)\,\vec{j}+z(u,v)\,\vec{k} \qquad (u,v)\in D \qquad (۶۴)$$

است. ابتدا فرض کنید دامنه پارامتر D یک مستطیل است. افراز D به زیرمستطیل‌های R_{ij} با ابعاد Δu_i و Δv_j را در نظر بگیرید. این افراز D متناظراً رویه S را به نواحی S_{ij} که روی S قرار دارند، افراز می‌کند (شکل ۴۴). نقطه (u_i^*, v_j^*) در R_{ij} نقطه‌ای روی S_{ij} با بردار موقعیت $\vec{r}(u_i^*, v_j^*)$ را مشخص می‌کند. با توجه به استدلالی مشابه با انتگرال منحنی الخط نسبت به طول قوس، f را در $\vec{r}(u_i^*, v_j^*)$ تعیین کرده و در مساحت $A(S_{ij})$ ضرب می‌کنیم و مجموع $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\vec{r}(u_i^*, v_j^*))\,A(S_{ij})$ را تشکیل می‌دهیم.



شکل ۴۴

حال وقتی $\|P\|\to 0$، این مجموع انتگرال رویه‌ای f روی رویه S را به صورت زیر تشکیل می‌دهد.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\vec{r}(u_i^*, v_j^*))\,A(S_{ij}) \qquad (۶۵)$$

توجه داریم که نه تنها تعریف انتگرال خطی (۴) بلکه تعریف انتگرال دوگانه نیز شبیه است. با تقریب S_{ij} توسط قسمتی از صفحه مماس که در مساحت رویه بیان شد، می‌توان نشان داد که حد در طرف راست معادله (۶۵) برابر با انتگرال دوگانه زیر است

$$\iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{T}_u\times\vec{T}_v\|\,dA$$

که در آن $\vec{T}_u=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}$ ، $\vec{T}_v=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$.

این روش، در حالتی که D یک مستطیل نیست اما از نوع ۱ یا 2 باشد، نیز برقرار است.

بنابراین فرمول زیر را برای انتگرال رویه‌ای f روی رویه S داریم.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{T}_u\times\vec{T}_v\|\,dA \qquad (۶۶)$$

که می‌توان آن را با فرمول انتگرال منحنی الخط

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$

مقایسه کرد.

فرمول (۴۹) به ما اجازه محاسبه انتگرال رویه‌ای را با تبدیل آن به انتگرال دوگانه روی دامنه پارامتری یعنی D می‌دهد. وقتی از این فرمول استفاده می‌کنیم، $f(\vec{r}(u,v))$ را با گذاشتن $x=x(u,v)$، $y=y(u,v)$ و $z=z(u,v)$ در فرمول برای $f(x,y,z)$ محاسبه می‌کنیم.
در واقع با همان محاسبه که منجر به معادله (۴۰) شده، می‌توان طرف راست معادله (۴۹) را به فرم

$$\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\,dA$$

که همان معادله   را به دست می‌دهد.
مشاهده می‌شود که $\iint_S 1\,dS = A(S)$.

انتگرال‌های رویه‌ای دارای کاربردهایی مشابه با انتگرال‌های چندگانه‌اند. برای مثال اگر یک ورقه نازک (مثلاً ورقه آلومینیومی) به شکل رویه S بوده و چگالی (جرم بر واحد سطح) در نقطه (x,y,z) برابر $\rho(x,y,z)$ باشد، آنگاه جرم کل ورقه عبارت است از

$$m=\iint_S \rho(x,y,z)\,dS$$

و مختصات مرکز جرم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ عبارت است از

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x,y,z)\,dS,\quad \bar{y}=\frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x,y,z)\,dS,\quad \bar{z}=\frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x,y,z)\,dS$$

گشتاورهای اینرسی را می‌توان به طریق مشابه تعریف کرد.

مثال ۵۰. مطلوب است محاسبه $\iint_S x^2\,dS$ که در آن S کره واحد $x^2+y^2+z^2=1$ است.

حل. کره دارای نمایش پارامتری

$$x=\sin\phi\cos\theta,\quad y=\sin\phi\sin\theta,\quad z=\cos\phi,\quad 0\le\phi\le\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

است، یعنی

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i}+\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j}+\cos\varphi\,\vec{k}$$

داریم $\|\vec{T}_\varphi\times\vec{T}_\theta\|=\sin\varphi$ و بنابراین

$$\iint_S x^2\,dS=\iint_D(\sin\varphi\cos\theta)^2\,\|\vec{T}_\varphi\times\vec{T}_\theta\|\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi=\frac{4\pi}{3}.$$

دیدیم که هر رویه نمودار تابع دو متغیره از x و y است، و می‌توان آن را به عنوان یک رویه پارامتری با پارامترهای x و y در نظر گرفت. فرض کنید S دارای معادله $z=g(x,y)$ برای $(x,y)\in D$ است که در آن g دارای مشتقات جزئی پیوسته است، در این صورت معادلات پارامتری S به صورت

$$x=x,\quad y=y,\quad z=g(x,y)$$

است و از معادله داریم

$$\|\vec{T}_x\times\vec{T}_y\|=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

بنابراین از فرمول داریم

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \qquad (۴۷)$$

مثال ۵۱. مطلوب است $\iint_S y\,dS$ که در آن S رویه $z=x+y^2$ برای $0\le x\le 1$، $0\le y\le 2$ است.

حل. چون $\frac{\partial z}{\partial x}=1$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=2y$، از فرمول (۴۷) داریم

$$\iint_S y\,dS=\iint_D y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\int_0^2 y\sqrt{1+1+4y^2}\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}\,dy$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(1+2y^2)^{3/2}\Big]_0^2=\frac{13\sqrt{2}}{3}$$

اگر S یک رویه هموار تکه‌ای باشد، یعنی اجتماع تعدادی متناهی رویه‌های هموار $S_1, \dots, S_n$ که تنها اشتراک آنها در مرزهایشان است، آنگاه انتگرال رویه‌ای f روی S توسط

$$\iint_S f(x,y)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x,y,z)\,dS$$

تعریف می‌شود.

مثال ۵۲. مطلوب است $\iint_S z\,dS$ که در آن S رویه‌ای است که سطح جانبی آن رویه S_1 داده شده توسط استوانه $x^2+y^2=1$ است و قاعده آن S_2 قرص $x^2+y^2\le 1$ در صفحه $z=0$ است و بالای آن S_3 قسمتی از صفحه $z=x+1$ است که بالای S_2 قرار دارد.

حل. رویه S در شکل (۴۵) نشان داده شده است. برای S_1 از θ و z به عنوان پارامتر استفاده کرده و معادلات پارامتری آن

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad z=z$$

است که در آن $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le z\le 1+x=1+\cos\theta$. بنابراین

$$\vec{T}_\theta\times\vec{T}_z=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

و

$$\|\vec{T}_\theta\times\vec{T}_z\|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

بنابراین انتگرال رویه‌ای روی S_1 عبارت است از

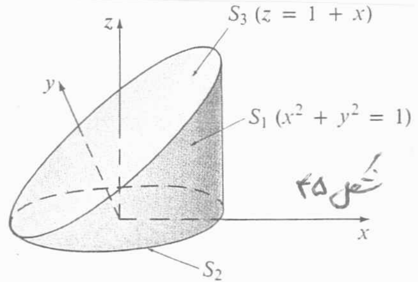
$$\iint_{S_1} z\,dS=\iint_D z\,\|\vec{T}_\theta\times\vec{T}_z\|\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

چون S_2 در صفحه $z=0$ قرار دارد پس

$$\iint_{S_2} z\,dS=\iint_{S_2} 0\,dS=0$$

رویه بالایی S_3 بالای قرص واحد D قرار دارد و قسمتی از صفحه $z=1+x$ است. پس با قرار دادن $g(x,y)=1+x$ و با توجه به مختصات قطبی داریم

$$\iint_{S_3} z\,dS=\iint_D (1+x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1+r\cos\theta)\sqrt{1+1+0}\;r\,dr\,d\theta$$



شکل ۴۵

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta = \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

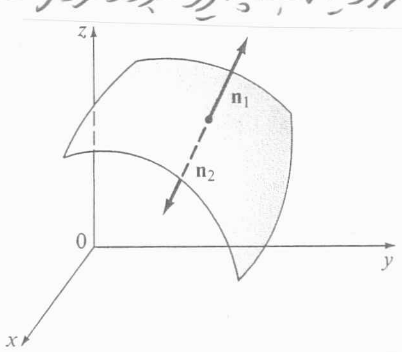
بنابراین

$$\iint_S z\,dS = \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS$$

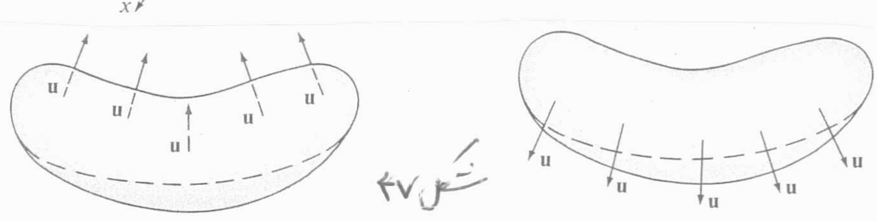
$$= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi.$$

رویه‌های جهت‌دار

برای تعریف انتگرال‌های رویه‌ای از میدان‌های برداری نیاز به قانونی برای رویه‌های غیرجهت‌دار داریم. برای این منظور، ابتدا جهت‌هایی برای رویه‌ها در نظر می‌گیریم و در کل کتاب تنها رویه‌های جهت‌دار را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با یک رویه دوطرفه S شروع می‌کنیم که در هر نقطه (x,y,z) روی S دارای یک صفحه مماس است، بجز در نقاط مرزی که امکان دارد صفحه مماس نداشته باشیم. دو بردار قائم یکه $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$ در (x,y,z) وجود دارد (شکل ۴۶). امکان انتخاب یک بردار قائم یکه $\vec{n}$ در هر نقطه (x,y,z) وجود دارد به طوری که $\vec{n}$ به طور پیوسته روی S تغییر می‌کند. در این صورت گوییم S یک رویه جهت‌دار شده است و $\vec{n}$ را به عنوان یک جهت برای S در نظر می‌گیریم. دو امکان برای انتخاب جهت روی هر رویه جهت‌پذیر وجود دارد (شکل ۴۷).



شکل ۴۶



شکل ۴۷

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

اگر S یک رویه جهت‌دار هموار که توسط تابع برداری $\vec r=\vec r(u,v)$ پارامتری شده باشد آنگاه آن را با جهت بردار یکه قائم به صورت

$$\vec n=\frac{\vec T_u\times\vec T_v}{\|\vec T_u\times\vec T_v\|}\qquad (۴۸)$$

در نظر می‌گیریم و جهت مخالف آن توسط $-\vec n$ نمایش داده می‌شود. برای مثال، در مثال (۴۵) نمایش پارامتری

$$\vec r(\varphi,\theta)=a\sin\varphi\cos\theta\,\vec i+a\sin\varphi\sin\theta\,\vec j+a\cos\varphi\,\vec k$$

برای کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ حاصل شد، در مثال ۴۸ دیدیم که

$$\vec T_\varphi\times\vec T_\theta=a^2\sin^2\varphi\cos\theta\,\vec i+a^2\sin^2\varphi\sin\theta\,\vec j+a^2\sin\varphi\cos\varphi\,\vec k$$

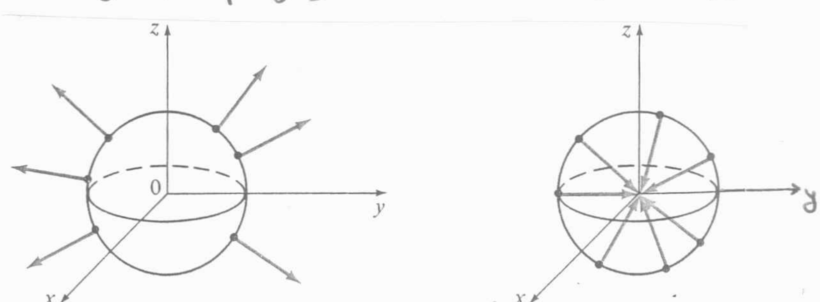
و

$$\|\vec T_\varphi\times\vec T_\theta\|=a^2\sin\varphi$$

حاصل شد، بنابراین جهت تولید شده به وسیله $\vec r(\varphi,\theta)$ توسط بردار یکه قائم

$$\vec n=\frac{\vec T_\varphi\times\vec T_\theta}{\|\vec T_\varphi\times\vec T_\theta\|}=\sin\varphi\cos\theta\,\vec i+\sin\varphi\sin\theta\,\vec j+\cos\varphi\,\vec k=\frac{1}{a}\vec r(\varphi,\theta)$$

مشخص می‌شود. مشاهده می‌شود که $\vec n$ هم جهت با بردار موقعیت است، یعنی به طرف خارج کره می‌باشد. جهت متضاد (به طرف داخل) نیز در شکل ۴۸ (ب) مشاهده می‌شود که با جابجا کردن ترتیب پارامترها حاصل می‌شود زیرا $\vec T_\theta\times\vec T_\varphi=-\vec T_\varphi\times\vec T_\theta$.

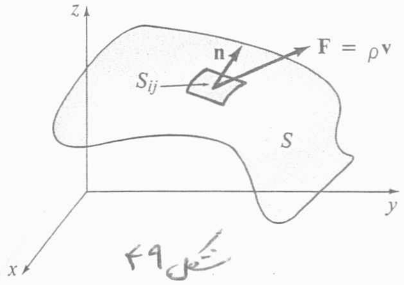


(الف) جهت مثبت   (ب) جهت منفی

شکل ۴۸

برای یک رویه بسته، یعنی رویه‌ای که مرز یک جسم در ناحیه E است، جهت مثبت را جهت بردار یکه قائم به طرف خارج E انتخاب می‌کنیم و قائم‌ها به طرف داخل جهت منفی را نمایش می‌دهند. (شکل ۴۹).

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II



شکل ۶۹

برای رویه داده شده توسط $z=g(x,y)$ از معادله (۶۱) دیده می‌شود که جهت مورد نظر توسط بردار یکه قائم

$$\vec{n}=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \qquad (۶۹)$$

حاصل می‌شود، چون مولفه $\vec{k}$ مثبت است، این جهت به طرف خارج رویه می‌باشد.

انتگرال‌های رویه‌ای از میدان‌های برداری

فرض کنید S یک رویه جهت‌دار با بردار یکه قائم $\vec{n}$ است و سیالی با چگالی $\rho(x,y,z)$ و میدان سرعت $\vec{V}(x,y,z)$ گذرنده از S را در نظر بگیرید. آنگاه نرخ سیال (جرم بر واحد زمان) بر واحد مساحت برابر $\rho\vec{V}$ است. اگر S را به قسمتهای کوچک افراز کنیم و در نتیجه جرم سیال گذرنده از S_{ij} تقریب بزنیم، می‌توان جرم سیال گذرنده را در جهت قائم $\vec{n}$ بر واحد زمان توسط

$$\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,A(S_{ij})$$

با تقریب زد، که در آن ρ، $\vec{V}$ و $\vec{n}$ در نقطه‌ای روی S_{ij} محاسبه می‌شوند. حد مجموع توسط انتگرال رویه‌ای تابع $\rho\vec{V}\cdot\vec{n}$ روی S به دست می‌آید

$$\iint_S \rho\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S \rho(x,y,z)\,\vec{V}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\,dS \qquad (۷۰)$$

که به طور فیزیکی به عنوان نرخ سیال گذرنده از S تعبیر می‌شود.

اگر قرار دهیم $\vec{F}=\rho\vec{V}$ آنگاه $\vec{F}$ نیز یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ است و انتگرال در معادله (۷۰) به صورت $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ خواهد بود. انتگرال رویه‌ای که به دفعات در مباحث فیزیک رخ می‌دهد، به صورت فوق است حتی وقتی $\vec{F}$ برابر $\rho\vec{V}$ نباشد. آن را انتگرال رویه‌ای $\vec{F}$ روی رویه S نامیم (در فیزیک آن را شار $\vec{F}$ روی S نامند).

تعریف ۴۱. اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته تعریف شده روی رویه جهت‌دار S با بردار یکه قائم آن $\vec{n}$ باشد، آنگاه انتگرال رویه‌ای $\vec{F}$ روی S عبارت است از

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}\cdot \vec{n}\, dS \qquad (۷۱)$$

به عبارت دیگر، تعریف ۴۱ بیان می‌کند که انتگرال رویه‌ای یک میدان برداری روی S برابر با انتگرال رویه‌ای مولفه قائم میدان برداری روی S است.

اگر S توسط تابع برداری $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ داده شده باشد، آنگاه $\vec{n}$ توسط معادله (۶۸) داده می‌شود و از تعریف ۴۱ و معادله (۶۹) داریم

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}\cdot \frac{\vec{T}_u\times\vec{T}_v}{\|\vec{T}_u\times\vec{T}_v\|}\, dS$$

$$=\iint_D \left[\vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot \frac{\vec{T}_u\times\vec{T}_v}{\|\vec{T}_u\times\vec{T}_v\|}\right]\|\vec{T}_u\times\vec{T}_v\|\, dA$$

که در آن D دامنه پارامتر است، بنابراین

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D \vec{F}\cdot(\vec{T}_u\times\vec{T}_v)\, dA \qquad (۷۲)$$

که با عبارت به دست آمده برای محاسبه انتگرال‌های میدان‌های برداری در تعریف (۱۵) قابل مقایسه است.

مثال ۴۳. شار میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=z\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k}$ روی کره واحد $x^2+y^2+z^2=1$ را به دست آورید.

حل. با توجه به نمایش پارامتری

$$r(\varphi,\theta)=\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i}+\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j}+\cos\varphi\,\vec{k},\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

داریم

$$\vec{F}(\vec{r}(\varphi,\theta))=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j}+\sin\varphi\cos\theta\,\vec{k}$$

،

$$\vec{T}_\varphi\times\vec{T}_\theta=\sin^2\varphi\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\sin^2\varphi\,\vec{j}+\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{k}$$

بنابراین

$$\vec{F}(\vec{r}(\varphi,\theta))\cdot(\vec{T}_\varphi\times\vec{T}_\theta)=\cos\varphi\sin^2\varphi\cos\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta$$

و از فرمول (۷۱)، شار برابر است با

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}&=\iint_D \vec{F}\cdot(\vec{T}_\varphi\times\vec{T}_\theta)\,dA\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(2\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta)\,d\varphi\,d\theta\\ &=2\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta+\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\\ &=0+\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

در حالتی که رویه S توسط $z=g(x,y)$ داده شده باشد که به طرف خارج جهت دار است، معادله (۶۱) نتیجه می‌دهد

$$\vec{T}_x\times\vec{T}_y=-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}$$

و بنابراین

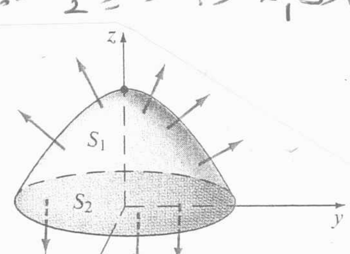
$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D \vec{F}\cdot(\vec{T}_x\times\vec{T}_y)\,dA$$

با توجه به $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ داریم

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D\left(-P\frac{\partial g}{\partial x}-Q\frac{\partial g}{\partial y}+R\right)dA \qquad (۷۳)$$

مثال ۵۴. مطلوب است $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ که در آن $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ و S مرز ناحیه E محصور شده توسط سهمی‌گون $z=1-x^2-y^2$ و صفحه $z=0$ است.

حل. S شامل رویه سهمی‌گون S_1 از بالا و دایره S_2 از پایین است (شکل ۵۰). چون که



شکل ۵۰

رویه بسته است، از جهت مثبت (به طرف خارج) آن را جهت دار می‌کنیم. یعنی S_1 جهت دار به طرف خارج است و D تصویر S_1 روی صفحه xy می‌باشد. پس $D:\ x^2+y^2\le 1$. حال با توجه به

$$P(x,y,z)=y, \qquad Q(x,y,z)=x, \qquad R(x,y,z)=z=1-x^2-y^2$$

روی S_1 و

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=-2y$$

داریم

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_D\left(-P\frac{\partial g}{\partial x}-Q\frac{\partial g}{\partial y}+R\right)dA$$
$$=\iint_D\left[-y(-2x)-x(-2y)+1-x^2-y^2\right]dA$$
$$=\iint_D(1+4xy-x^2-y^2)\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1+4r^2\cos\theta\sin\theta-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r-r^3+4r^3\cos\theta\sin\theta)\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\cos\theta\sin\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{4}(2\pi)+0=\frac{\pi}{2}.$$

قرص S_2 جهت دار به طرف پایین است، پس بردار یکه قائم $\vec{n}=-\vec{k}$ می باشد و داریم

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{S_2}\vec{F}\cdot(-\vec{k})\,dS=\iint_D(-z)\,dA=\iint_D 0\,dA=0$$

زیرا روی S_2، $z=0$ است. حال طبق تعریف داریم

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{dS}=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{dS}+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{dS}=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$$

گرچه انتگرال رویه‌ای یک میدان برداری را برای نمایش جریان سیال به کار بردیم، این مفهوم کاربردهای زیادی در فیزیک دارد. برای مثال، اگر $\vec{E}$ میدان الکتریکی باشد آنگاه انتگرال رویه‌ای

$$\iint_S\vec{E}\cdot\vec{dS}$$

شار الکتریکی $\vec{E}$ گذرنده از رویه S است. از قوانین مهم الکتروستاتیک، قانون گاوس است که بیان می‌کند: شار خالص گذرنده از رویه بسته S برابر

$$Q=\varepsilon_0\iint_S\vec{E}\cdot\vec{dS}$$

است که در آن ε_0 یک ثابت می‌باشد. بنابراین اگر میدان برداری E که میدان الکتریکی باشد، می‌توانیم

شار گرمای گذرنده از S را تعیین کنیم.

از دیگر کاربردهای انتگرال‌های رویه‌ای، در مطالعه جریان حرارتی رخ می‌دهد. فرض کنید دما در نقطه (x,y,z) در جسمی برابر $u(x,y,z)$ است. آن‌گاه جریان حرارتی توسط میدان برداری

$$\vec{F} = -k\vec{\nabla} u$$

تعریف می‌شود که در آن k ثابت تجربی است و هدایت ماده نامیده می‌شود. نرخ یا میزان جریان حرارتی روی رویه S جسم توسط

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = -k\iint_S \vec{\nabla} u\cdot d\vec{S}$$

به دست می‌آید.

مثال ۵۵. دمای u در یک گوی فلزی متناسب با مربع فاصله نقطه از مرکز گوی است. میزان جریان حرارتی گذرنده از کره S به شعاع a و مرکز مبدا را به دست آورید.

حل. داریم $u(x,y,z) = C(x^2+y^2+z^2)$ که در آن C ثابت تناسب است. در این صورت جریان حرارتی توسط

$$\vec{F}(x,y,z) = -k\vec{\nabla} u = -kC(2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k})$$

به دست می‌آید که در آن k ثابت هدایت فلز است. بردار یکه قائم به طرف خارج برای کره در نقطه (x,y,z) عبارت است از (کره $x^2+y^2+z^2=a^2$)

$$\vec{n} = \frac{1}{a}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

پس

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = -\frac{2kC}{a}(x^2+y^2+z^2)$$

اما روی S داریم $x^2+y^2+z^2=a^2$ پس $\vec{F}\cdot\vec{n} = -2akC$. بنابراین میزان (نرخ) جریان حرارتی گذرنده از S برابر است با

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS\\ &= -2akC\iint_S dS = -2akC\,(A(S))\\ &= -2akC(4\pi a^2) = -8kC\pi a^3\end{aligned}$$