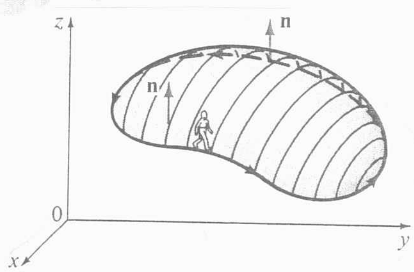
قضیه استوکس

قضیه استوکس را می‌توان به عنوان تعمیم قضیه گرین در ابعاد بیشتر از دو در نظر گرفت. قضیه گرین ارتباط بین یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای مسطح مانند D با انتگرال خطی اطراف منحنی مرز مسطح D را بیان می‌کند، درحالی که قضیه استوکس ارتباط یک انتگرال رویه‌ای روی رویه S را با انتگرال خطی اطراف منحنی مرز S را (که یک منحنی فضایی است) بیان می‌کند. شکل (۵۱) رویه‌ای جهت‌دار شده با بردار یکه قائم $\vec{n}$ را نمایش می‌دهد. جهت S جهت مثبت منحنی مرز C است که در شکل نشان داده شده است. یعنی اگر روی منحنی C در جهت مثبت به طریقی که در شکل نمایش داده شده حرکت کنیم و در جهت بردار $\vec{n}$ باشیم آنگاه رویه همواره در سمت چپ قرار دارد. قضیه استوکس را می‌توان در حالت کلی برای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ بیان نمود که در اینجا تنها به حالت $n=3$ یعنی فضای سه‌بعدی اکتفا می‌کنیم.



شکل ۵۱

قضیه ۴۲. استوکس. فرض کنید S یک رویه هموار تکه‌ای جهت‌دار شده است، یعنی توسط یک منحنی مرز هموار تکه‌ای بسته ساده با جهت مثبت، کراندار است. فرض کنید $\vec{F}$ میدان برداری با توابع مولفه‌ای پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته در ناحیه بازی در $\mathbb{R}^3$ شامل S باشد آنگاه

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad (۷۴)$$

با توجه به اینکه

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \quad , \quad \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

قضیه استوکس بیان می‌کند که انتگرال خطی اطراف منحنی مرز S از مولفه مماسی $\vec{F}$ برابر با انتگرال

رویه‌ای مولفه قائم کرل $\vec{F}$ است،

منحنی مرزی جهت‌دار شده مثبت برای رویه جهت‌دار S را اغلب با ∂S نمایش می‌دهیم. پس قضیه استوکس را می‌توان بصورت

$$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (۷۵)$$

شرح می‌دهیم. تشابهاتی بین قضیه استوکس، قضیه گرین و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود دارد. همانند قبل، یک انتگرال برحسب مشتقات در طرف چپ (۷۵) قرار دارد و طرف راست شامل مقادیر $\vec{F}$ تنها روی مرز S است.

در واقع، برای حالت خاص که در آن رویه S مسطح است و در صفحه xy با جهت به طرف خارج است بردار یکه قائم $\vec{k}$ است و انتگرال رویه‌ای به انتگرال دوگانه تبدیل می‌شود و قضیه استوکس بصورت زیر خواهد بود

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S (\operatorname{curl}\vec{F})\cdot\vec{k}\,dA$$

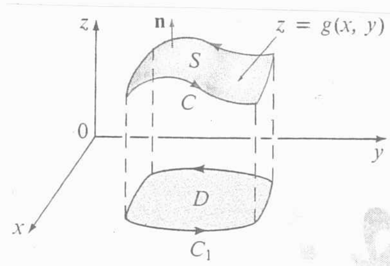
که فرم برداری قضیه گرین است که در معادله (۵۴) ارائه شده است. بنابراین قضیه گرین حالت خاصی از قضیه استوکس است.

اثبات قضیه استوکس در فرم کلی، مشکل است و نیاز به اطلاعاتی از ریاضیات پیشرفته است و در اینجا آن را اثبات نمی‌کنیم، اما در حالتی که S یک نمودار است و $\vec{F}$، S و C خوش تعریف هستند، اثباتی برای حالت خاص در زیر ارائه می‌شود.

اثبات. (اثبات قضیه استوکس در حالت خاص) فرض کنید معادله S بصورت $z=g(x,y)$ برای $(x,y)\in D$ است که در آن g دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته است و D ناحیه مسطح ساده است که مرز آن منحنی C_1 متناظر به C می‌باشد. اگر جهت S به طرف خارج باشد آنگاه جهت مثبت C متناظر به جهت مثبت C_1 است (شکل ۵۲). فرض کنید $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ که در آن مشتقات جزئی P، Q و R پیوسته‌اند. چون S یک نمودار است، فرمول (۷۴) با $\vec{F}$ به جای $\operatorname{curl}\vec{F}$ را بکار می‌بریم. پس

$$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D\left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dA \qquad (۷۶)$$

که در آن مشتقات جزئی P، Q و R در $(x,y,f(x,y))$ محاسبه شده است.



شکل ۵۲

اگر

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad a\le t\le b$$

نمایش پارامتری C_1 باشد آنگاه نمایش پارامتری C عبارت است از

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=g(x(t),y(t))\quad a\le t\le b$$

با توجه به قانون زنجیره‌ای انتگرال منحنی‌الخط را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}&=\int_a^b\left(P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\frac{dz}{dt}\right)dt\\&=\int_a^b\left[P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}+R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right]dt\\&=\int_a^b\left[\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt}+\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right]dt\\&=\int_{C_1}\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\\&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q+R\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]dA\end{aligned}$$

که در آن از قضیه گرین در آخرین تساوی استفاده شده است. در این صورت، با استفاده از قانون زنجیره‌ای و با در نظر گرفتن اینکه P، Q و R توابعی از x، y و z اند و z خود تابعی از x و y است، داریم

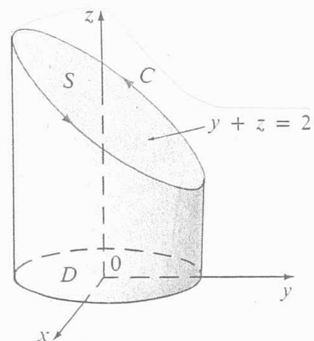
$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\Big[&\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big)\\&-\Big(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big)\Big]dA\end{aligned}$$

چهار جمله در این انتگرال دوگانه حذف می‌شوند و شش جمله باقیمانده را می‌توان مجدداً مرتب کرد تا به طرف راست معادله (۷۶) برسیم. بنابراین

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad (۷۷)$$

مثال ۵۶. مطلوب است $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ که در آن $\vec{F}(x,y,z)=-y^2\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{k}$ و C منحنی فصل مشترک صفحه $y+z=2$ و استوانه $x^2+y^2=1$ است (جهت C در خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است).

حل. منحنی C (که بیضی) در شکل ۵۳ نمایش داده شده است.



شکل ۵۳

گرچه $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را می‌توان به طور مستقیم محاسبه کرد، اما پارامتری کردن C سخت است. پس از قضیه استوکس استفاده می‌کنیم. نخست $\operatorname{curl}\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم

$$\operatorname{curl}\vec{F}=(1+2y)\vec{k}$$

رویه S ناحیه بیضی شکل در صفحه $y+z=2$ است که توسط C کراندار شده است. اگر جهت بطرف خارج برای S انتخاب شود آن گاه C دارای جهت مثبت است. تصویر S روی صفحه xy ناحیه D است که قرص $x^2+y^2\le 1$ می‌باشد. پس با استفاده از معادله (۷۳) داریم $z=g(x,y)=2-y$ پس

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D (1+2y)\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+2\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1 d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sin\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}(2\pi)+0=\pi$$

مثال ۵۷. با استفاده از قضیه استوکس $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ را محاسبه کنید که در آن $\vec{F}(x,y,z)=\langle yz, xz, xy\rangle$ و S قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ داخل استوانه $x^2+y^2=1$ و بالای صفحه xy است (شکل ۵۴).

حل. برای یافتن منحنی مرز C معادلات $x^2+y^2+z^2=4$ و $x^2+y^2=1$ را باهم حل می‌کنیم. با تفاضل این دو، داریم $z^2=3$ پس $z=\sqrt{3}$ (زیرا $z>0$). بنابراین C دایره داده شده

توسط معادلات $x^2+y^2=1$ و $z=\sqrt{3}$ است. معادله برداری C عبارت است از

$$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

پس

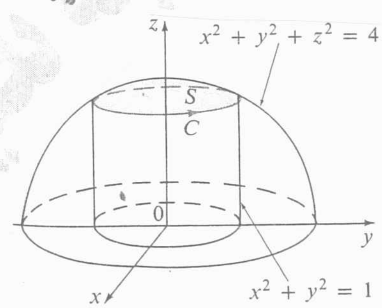
$$\vec{r}\,'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$$

همچنین

$$\vec{F}(\vec{r}(t))=\sqrt{3}\sin t\,\vec{i}+\sqrt{3}\cos t\,\vec{j}+\cos t\sin t\,\vec{k}$$

بنابراین با توجه به قضیه استوکس داریم

$$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(-\sqrt{3}\sin^2 t+\sqrt{3}\cos^2 t)\,dt$$
$$=\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt=0$$



شکل ۵۴

در مثال ۵۷ انتگرال رویه‌ای با داشتن مقادیر $\vec{F}$ روی منحنی مرز C به طور ساده‌تری بدست می‌آمد. این بدان معناست که اگر رویه جهت‌دار شده دیگری با منحنی مرز C داشته باشیم آنگاه دقیقاً همین مقدار برای انتگرال رویه‌ای بدست می‌آید.

در حالت کلی، اگر S_1 و S_2 رویه‌های جهت‌دار شده با یک منحنی مرز C کراندار شده باشند و هر دو در فرضیات قضیه استوکس صدق کنند، آنگاه

$$\iint_{S_1}\operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_2}\operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad (۷۸)$$

از این واقعیت وقتی که انتگرال روی یک رویه سخت باشد اما روی رویه دیگر برای انتگرال‌گیری ساده باشد، استفاده می‌کنیم.

حال از قضیه استوکس برای روشن کردن مفهوم کرل یک بردار استفاده می‌کنیم. فرض کنید C یک منحنی

بسته جهت دار شده و $\vec{v}$ میدان سرعت در جریان سیال است. انتگرال خطی

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{v}\cdot\vec{T}\,ds$$

را در نظر بگیرید و یادآوری می‌کنیم که $\vec{v}\cdot\vec{T}$ مولفه $\vec{v}$ در جهت بردار یکه مماس $\vec{T}$ است. یعنی نزدیکترین جهت $\vec{v}$ با جهت $\vec{T}$ بزرگترین مقدار $\vec{v}\cdot\vec{T}$ است. بنابراین $\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$ اندازه tendency سیال برای حرکت اطراف C است و چرخش $\vec{v}$ اطراف C نامیده می‌شود. (شکل ۵۵)

حال فرض کنید $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای در سیال است و فرض کنید S_a قرص کوچکی به شعاع a و مرکز P_0 است. در این صورت برای تمام نقاط P روی S_a داریم

$$(\operatorname{curl}\vec{F})(P) \simeq (\operatorname{curl}\vec{F})(P_0)$$

زیرا $\operatorname{curl}\vec{F}$ پیوسته است. بنابراین از قضیه استوکس، نتیجه می‌گیریم که تقریب برای چرخش حول دایره مرز C_a عبارت است از

$$\begin{aligned}\int_{C_a} \vec{v}\cdot d\vec{r} &= \iint_{S_a} \operatorname{curl}\vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_a} \operatorname{curl}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS\\ &\simeq \iint_{S_a} \operatorname{curl}\vec{v}(P_0)\cdot\vec{n}(P_0)\,dS\\ &= \operatorname{curl}\vec{v}(P_0)\cdot\vec{n}(P_0)\,\pi a^2\end{aligned}$$

این تقریب وقتی $a \to 0$ بهتر خواهد شد و داریم

$$\operatorname{curl}\vec{v}(P_0)\cdot\vec{n}(P_0) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\pi a^2}\int_{C_a}\vec{v}\cdot d\vec{r} \qquad (۷۹)$$

معادله (۷۹) رابطه بین کرل و چرخش را نشان می‌دهد. این معادله نشان می‌دهد که $\operatorname{curl}\vec{v}\cdot\vec{n}$ اندازه تاثیر دوران سیال حول محور $\vec{n}$ است. این اثر وقتی که محور موازی $\operatorname{curl}\vec{v}$ باشد بیشترین است.

ب) $\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} < 0$ ، چرخش منفی   شکل ۵۵   الف) $\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} > 0$ ، چرخش مثبت

نکته ۴۳. با توجه به قضیه استوکس، اگر $\operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0}$ برای هر نقطه در $\mathbb{R}^3$، آنگاه $\vec{F}$ نگهدار است زیرا

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{0}\cdot d\vec{S} = 0$$

قضیه دیورژانس ـ گاوس

در بخش ... دیدیم قضیه گرین به فرم برداری، به صورت

$$\int_C \vec F\cdot\vec n\,ds = \iint_D \operatorname{div}\vec F(x,y)\,dA$$

است، که در آن C منحنی مرز جهت دار شده مثبت در صفحه برای ناحیه سطح D است. اگر این قضیه را به میدانهای برداری روی $\mathbb{R}^3$ توسیع دهیم، قضیه حاصل را گاوس نامیم

$$\iint_S \vec F\cdot\vec n\,dS = \iiint_E \operatorname{div}\vec F(x,y,z)\,dV \qquad (۸۰)$$

که در آن S رویه مرز جسم E است. واضح است که معادله (۸۰) تحت فرضیات مناسبی برقرار است و این قضیه را قضیه دیورژانس یا قضیه گاوس نامیم. توجه داریم که مشابه با قضیه گرین و قضیه استوکس، این قضیه رابطه انتگرال مشتق یک تابع (در این حالت $\operatorname{div}\vec F$) روی یک ناحیه با انتگرال تابع اولیه $\vec F$ روی مرز ناحیه را بیان می‌کند.

تعریف ۴۳. یک ناحیه E در فضا را ناحیه ساده در فضا نامیم هرگاه به طور همزمان از نوع I و II و III باشد.

مرز E رویه بسته است و جهت دار شده به طرف خارج رویه می‌باشد یعنی بردار قائم یکه $\vec n$ جهت به طرف خارج E دارد.

قضیه ۴۴. فرض کنید E یک جسم ساده بسته با رویه مرز S است که دارای جهت مثبت (به طرف خارج جسم) می‌باشد. فرض کنید $\vec F$ یک میدان برداری با توابع مولفه‌ای است که روی یک ناحیه باز دارای مشتقات جزئی پیوسته اند و ناحیه شامل E است. در این صورت

$$\iint_S \vec F\cdot d\vec S = \iiint_E \operatorname{div}\vec F\,dV \qquad (۸۱)$$

اثبات. فرض کنید $\vec F = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$. در این صورت

$$\operatorname{div}\vec F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

پس

$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV=\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV+\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV+\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

اگر $\vec{n}$ نرمال به طرف خارج که S باشد آنگاه انتگرال رویه‌ای طرف چپ قضیه دیورژانس عبارت است از:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S (P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})\cdot\vec{n}\,dS$$
$$=\iint_S P\,\vec{i}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_S Q\,\vec{j}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_S R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS$$

بنابراین برای اثبات قضیه دیورژانس، کافی است سه معادله زیر را ثابت کنیم.

$$\iint_S P\,\vec{i}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV \qquad (۸۲)$$

$$\iint_S Q\,\vec{j}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV \qquad (۸۳)$$

$$\iint_S R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV \qquad (۸۴)$$

برای اثبات معادله (۸۴) از این واقعیت که E از نوع I است، استفاده می‌کنیم. پس

$$E=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\ \varphi_1(x,y)\le z\le \varphi_2(x,y)\}$$

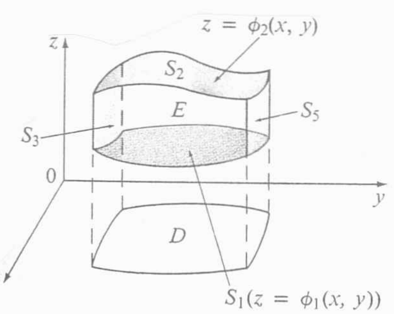
که در آن D تصویر ناحیه E بر روی صفحه xy است، بنابراین

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV=\iint_D\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right]dA$$

و بنابراین طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV=\iint_D\left[R(x,y,\varphi_2(x,y))-R(x,y,\varphi_1(x,y))\right]dA \qquad (۸۵)$$

رویه مرز S شامل شش قسمت است: رویه زیری S_1، رویه بالایی S_2، چهار رویه جانبی S_3، S_4، S_5 و S_6 (شکل ۵۶)



شکل ۵۶

توجه داریم که روی هر ضلع قائم $\vec{k}\cdot\vec{n}=0$ پس

$$\iint_{S_i} R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_i} 0\,dS=0 \qquad i=3,4,5,6$$

بنابراین

$$\iint_S R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS \qquad (۸۶)$$

معادله S_2 عبارت است از $z=\varphi_2(x,y)$ که در آن $(x,y)\in D$ و بردار قائم $\vec{n}$ به طرف خارج رو به بالا است. بنابراین از معادله (۷۳) (با $R\vec{k}$ به جای $\vec{F}$) داریم

$$\iint_{S_2} R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D R(x,y,\varphi_2(x,y))\,dA$$

روی S_1 داریم $z=\varphi_1(x,y)$، اما نرمال به طرف خارج $\vec{n}$ در این حالت به طرف داخل است، پس

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+1}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}\right)$$

و

$$\iint_{S_1} R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D R(x,y,\varphi_1(x,y))\frac{(-1)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+1}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

$$= -\iint_D R(x,y,\varphi_1(x,y))\,dA$$

بنابراین معادله (۸۶) نتیجه می‌دهد

$$\iint_S R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \left[R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))\right]dA$$

با مقایسه این معادله و معادله (۸۵) داریم

$$\iint_S R\,\vec{k}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

معادلات (۸۲) و (۸۳) به طور مشابه نتیجه می‌شود، البته برای این دو حالت E را از نوع II و III در نظر می‌گیریم.

توجه داریم که روش اثبات قضیه دیورژانس شبیه به قضیه گرین است.

مثال ۵۸. شار میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=z\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k}$ روی کره واحد به مرکز مبدا را به دست آورید.

حل. ابتدا دیورژانس $\vec{F}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(x)=1$$

کره واحد S مرز گوی واحد B به معادله $x^2+y^2+z^2\le 1$ است. بنابراین قضیه دیورژانس نتیجه می‌دهد:

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_B \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_B 1\,dV = V(B) = \frac{4\pi}{3}$$

مثال ۵۹. مطلوب است $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = xy\vec{i} + (y^2+e^{xz^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ و S رویه ناحیه E در فضا محدود به استوانه سهمی‌وار $z=1-x^2$ و صفحات $z=0$ ، $y=0$ و $y+z=2$ است. (شکل ۵۷)

حل. محاسبه انتگرال رویه‌ای به صورت مستقیم بسیار مشکل است (باید چهار انتگرال رویه‌ای متناظر به چهار قسمت S را محاسبه کنیم). از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم

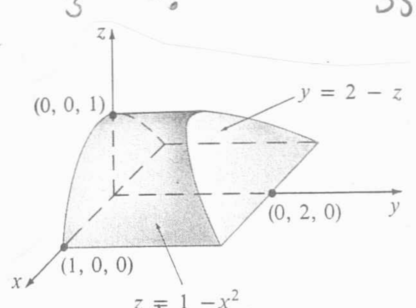
$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2+e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy)$$
$$= y + 2y = 3y$$

و

$$E = \{(x,y,z) \mid -1\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x^2,\ 0\le y\le 2-z\}$$

ناحیه‌ای از نوع III است. پس

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_E 3y\,dV$$
$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dy\,dz\,dx$$
$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\,dz\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = \frac{184}{35}$$



شکل ۵۷

نکته ۴۵. اگرچه قضیه دیورژانس را تنها برای ناحیه‌های ساده در فضا مطرح کردیم، می‌توانیم قضیه را برای ناحیه‌های فضایی که اجتماع تعداد متناهی ناحیه ساده هستند، ثابت کنیم.

به عنوان مثال، فرض کنید ناحیه E بین رویه‌های بسته S_1 و S_2 است که در آن S_1 داخل S_2 قرار دارد. فرض کنید $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ بردارهای یکه قائم به طرف خارج برای S_1 و S_2 به ترتیب باشند. رویه جسم E برابر $S=S_1\cup S_2$ است و بردار قائم $\vec{n}$ توسط $\vec{n}=-\vec{n}_1$ روی S_1 و $\vec{n}=\vec{n}_2$ روی S_2 است. (شکل ۵۸) با بکارگیری قضیه دیورژانس داریم

$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$
$$=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot(-\vec{n}_1)\,dS+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_2\,dS$$
$$=-\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad (۸۷)$$

حال این عبارت را برای میدان الکتریکی

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}$$

که در آن S_1 کره کوچک به شعاع a و مرکز مبدا است، می‌توان دید که $\operatorname{div}\vec{E}=0$ پس معادله (۸۷) به صورت زیر خواهد بود

$$\iint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\iiint_E \operatorname{div}\vec{E}\,dV$$
$$=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$$

نکته این محاسبه در محاسبه انتگرال رویه‌ای روی S_1 است، زیرا S_1 یک کره می‌باشد، بردار قائم در $\vec{r}$ عبارت است از $\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$. بنابراین

$$\vec{E}\cdot\vec{n}=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\right)$$
$$=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^4}\vec{r}\cdot\vec{r}=\frac{\varepsilon Q}{\|\vec{r}\|^2}=\frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

زیرا S_1 عبارت است از $\|\vec{r}\|=a$. در نتیجه

$$\iint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iint_{S_1}\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1}dS$$
$$=\frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1)=\frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2=4\pi\varepsilon Q$$

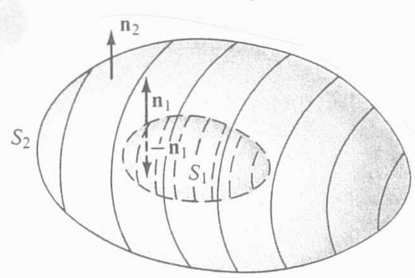
در نتیجه شار الکتریکی E گذرنده از هر رویه بسته S_2 که شامل مبدا است، برابر $4\pi\varepsilon Q$ است.

یکی از کاربردهای قضیه دیورژانس در جریان سیال است. فرض کنید $\vec{V}(x,y,z)$ میدان سرعت یک سیال با چگالی ثابت ρ است. در این صورت $\vec{F}=\rho\vec{V}$ میزان جریان بر واحد مساحت است. اگر $P_0(x_0,y_0,z_0)$ یک نقطه در سیال است و B_a گوی بازی به مرکز P_0 و شعاع خیلی کوچک a است. در این صورت $\operatorname{div}\vec{F}(P)\simeq\operatorname{div}\vec{F}(P_0)$ برای هر نقطه در گوی B_a است زیرا $\operatorname{div}\vec{F}$ پیوسته است. با یافتن شار تقریبی سیال روی کره کراندار S_a

$$\iint_{S_a}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_{B_a}\operatorname{div}\vec{F}\,dV$$
$$\simeq\iiint_{B_a}\operatorname{div}\left(\vec{F}(P_0)\right)dV$$
$$=\operatorname{div}\vec{F}(P_0)\,V(B_a)$$

وقتی $a\to 0$، این تقریب به مقدار واقعی نزدیکتر می‌شود

$$\operatorname{div}F(P_0)=\lim\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\vec{F}\cdot d\vec{S}\qquad(۸۸)$$



شکل ۵۸