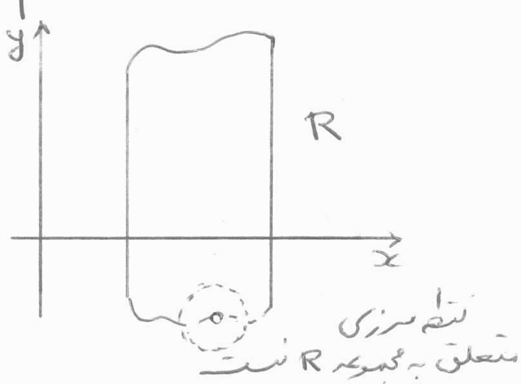
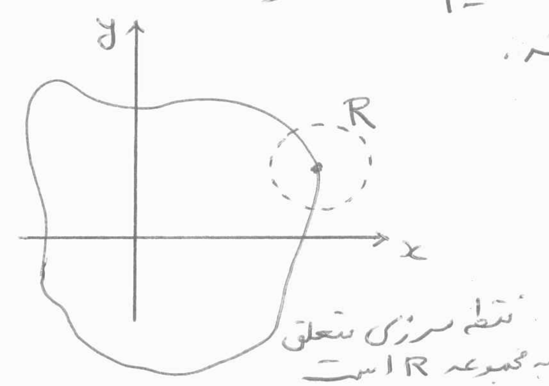
در این فصل، به بررسی توابع با مقادیر حقیقی از چند متغیر می‌پردازیم. ابتدا به تعریف برخی از مفاهیم اولیه توپولوژیکی مجموعه‌ها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ پرداخته و سپس توابع از دو متغیر و سه متغیر را معرفی می‌کنیم و در ادامه به بحث حساب دیفرانسیل این توابع می‌رسیم. در پایان فصل حاضر، بخشی با عنوان مسائل حل شده آمده است که قویاً به دانشجویان توصیه و تاکید می‌شود که این مسائل را بدون مراجعه به حل آنها مورد بررسی قرار دهند و تنها برای رفع اشکالات احتمالی خود به جوابهای آنها مراجعه کنند.

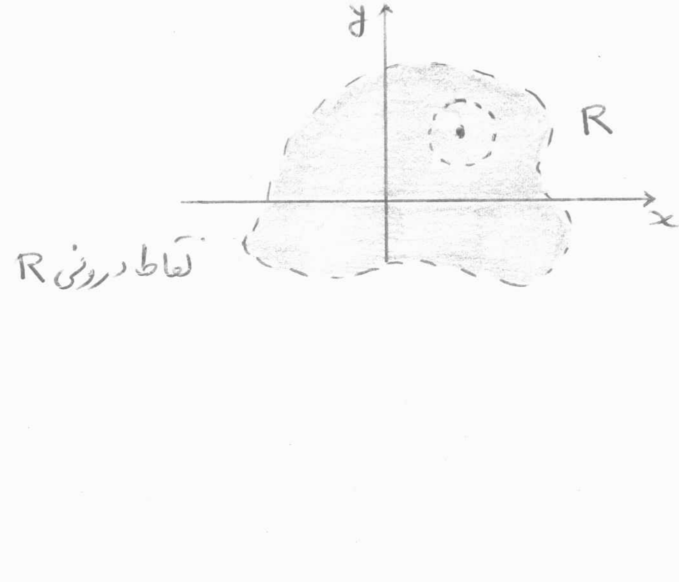
۱.۳ مفاهیم اولیه توپولوژیکی

تعریف. نقطه (a,b) در فضای دوبعدی $\mathbb{R}^2$ را یک نقطه مرزی یا کرانه‌ای ناحیه R در صفحه نامیم، اگر هر دایره با مرکز (a,b) شامل نقاطی از R و شامل نقاطی از متمم R باشد.

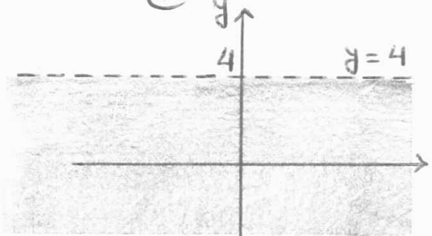




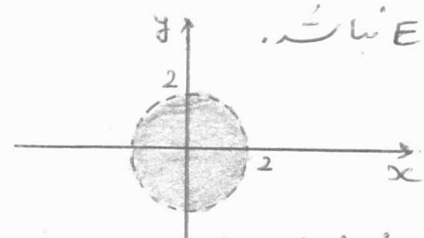
تعریف. یک نقطه در $\mathbb{R}^2$، نقطه درونی ناحیه R در فضای دوبعدی است، درصورتی که دایره‌ای به مرکز این نقطه وجود داشته باشد به طوری که کاملاً داخل ناحیه R قرار گیرد. به عبارت دیگر نقطه (a,b)، نقطه درونی ناحیه R است هرگاه (a,b) دارای همسایگی باشد که زیرمجموعه R است.



تعریف . زیرمجموعه E از $\mathbb{R}^2$ را یک مجموعه باز نامیم هرگاه هر نقطه E یک نقطه درونی E باشد. به عبارت دیگر E مجموعه ای باز است درصورتی که هیچ نقطه آن، نقطه ای مرزی برای E نباشد.

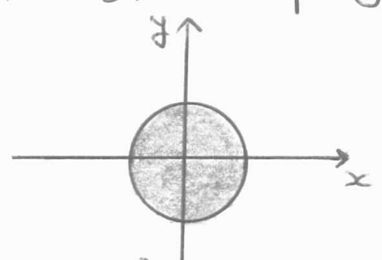


$E=\{(x,y)\mid y<4\}$ مجموعه باز



$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$ مجموعه باز

تعریف . فرض کنید F زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^2$ است. نقطه (a,b) از $\mathbb{R}^2$ را یک نقطه حدی F گوئیم، درصورتی که هر دایره به مرکز (a,b) شامل نقاطی از F بجز (a,b) باشد. مجموعه F را بسته نامیم درصورتی که F شامل تمام نقاط حدی خود باشد. به عبارت دیگر F بسته است، اگر F شامل تمام نقاط مرزی خود باشد.



$F=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$ مجموعه بسته

توضیح. تعاریف کاملاً مشابهی برای نقاط و مجموعه ها در $\mathbb{R}^3$ می توان بیان کرد.

۲.۳ توابع از دو متغیر

فرض کنید $D\subset\mathbb{R}^2$ ناحیه ای در صفحه است. همان گونه که در فصل اول بیان شد به هر نقطه (x,y) در D می توان برداری به صورت $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ با ابتدای مبدا و انتهای (x,y) متناظر کرد.

تعریف . تابع $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ قانونی است که به هر نقطه (x,y) در D عدد حقیقی منحصربفردی را متناظر می کند که آن را با $z=f(x,y)$ نمایش می دهیم. مجموعه D را دامنه تعریف تابع f نامیده و f را تابع دو متغیره گوئیم.

مثال. دامنه تعریف تابع $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ را به دست آورید. مقادیر تابع در $(1,0)$ و $(1,1)$ را تعیین کنید.

حل. عبارت جبری داده شده توسط قانون f در اعداد حقیقی باید با معنا باشد، بنابراین تابع f در تمام نقاط صفحه بجز نقاطی که $x^2+y^2=0$ است، تعریف می‌شود. پس با توجه به اینکه $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$، دامنه تعریف تابع f مجموعه

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0,\ y\neq 0\}$$
$$=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

است. مقادیر تابع در نقاط $(1,0)$ و $(1,1)$ عبارت است از

$$f(1,0)=\frac{1}{1+0}=1, \qquad f(1,1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

تعریف. نمودار تابع $z=f(x,y)$ با دامنه تعریف D مجموعه

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D,\ z=f(x,y)\}$$

است. دیده می‌شود که $G\subset\mathbb{R}^3$. نمودار $z=f(x,y)$ را یک رویه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ نامیم.

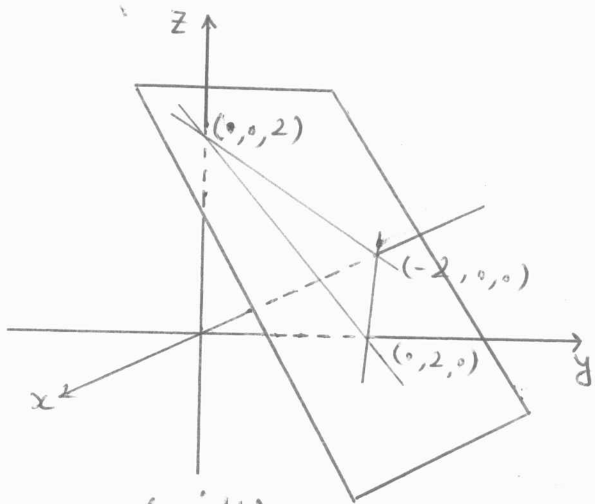
مثال. نمودار توابع دومتغیره زیر را رسم کنید.

الف) $z=f(x,y)=x-y+2$؛

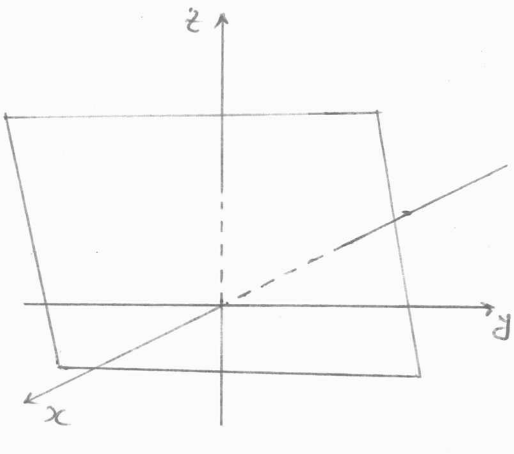
ب) $z=f(x,y)=3x$.

حل. الف) قرار می‌دهیم $z=x-y+2$ پس $x-y-z+2=0$ که معادله یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ است. بردار قائم به صفحه $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ و تلاقی صفحه با محورها با مختصات نقاط $(-2,0,0)$، $(0,2,0)$ و $(0,0,2)$ است.

ب) قرار می‌دهیم $z=3x$ پس $3x-z=0$ که معادله یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ شامل محور yها با بردار قائم $3\vec{i}-\vec{k}$ و گذرنده از مبداء مختصات است.



(الف)



(ب)

تعریف . فرض کنید $z=f(x,y)$ یک تابع از دو متغیر و c یک عدد ثابت است. مجموعه تمام نقاط (x,y) در صفحه $z=f(x,y)=c$ را یک منحنی تراز متناظر به c نامیم.

مثال . منحنی های تراز متناظر به مقادیر ۱- ، ۰ و ۱ برای تابع $f(x,y)=x-y+2$ را رسم کنید.

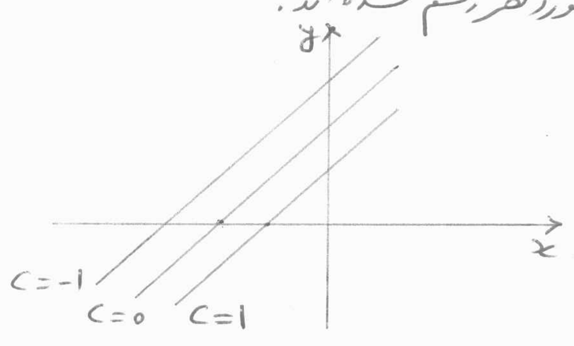
حل . منحنی تراز متناظر به مقدار c ، از قرار دادن $z=f(x,y)$ برابر c به دست می آید پس

منحنی تراز متناظر به $c=-1$ $x-y+2=-1$ یا $x-y+3=0$

منحنی تراز متناظر به $c=0$ $x-y+2=0$

منحنی تراز متناظر به $c=1$ $x-y+2=1$ یا $x-y+1=0$

در شکل زیر منحنی های تراز مورد نظر رسم شده اند.



۳.۳ توابع از سه متغیر

مشابه تعریف تابع دو متغیره، می توان توابع با مقادیر حقیقی از یک متغیر برداری در $\mathbb{R}^3$ را در نظر گرفت. این توابع را توابع سه متغیره نامیم.

تعریف. تابع $f: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ قانونی است که به هر نقطه (x,y,z) در D، عدد حقیقی منحصر به فردی را متناظر می کند که آن را با $w=f(x,y,z)$ نمایش می دهیم.
مجموعه D را دامنه تعریف تابع f نامیده و f را یک تابع از سه متغیر گوئیم.
نمودار تابع $w=f(x,y,z)$ با دامنه تعریف $D \subset \mathbb{R}^3$ مجموعه

$$G=\{(x,y,z,w) \mid (x,y,z)\in D,\ w=f(x,y,z)\}$$

است. دیده می شود که $G \subset \mathbb{R}^4$.

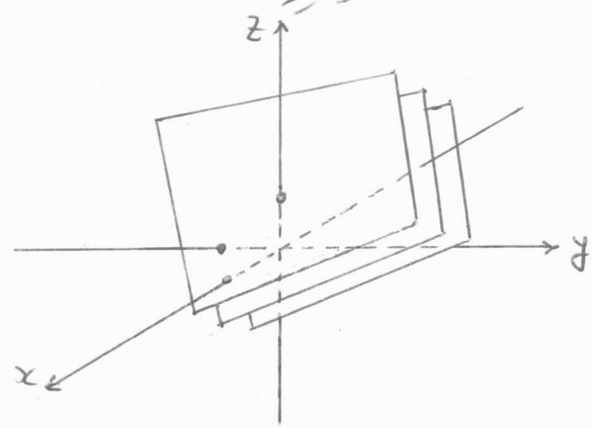
توضیح. نمودار یک تابع از سه متغیر زیرمجموعه ای از فضای چهار بعدی است و نمی توان شکل هندسی خاصی برای آن در نظر گرفت. اما منحنی های تراز توابع از دو متغیره در حالت سه متغیره دارای توسیع طبیعی است.

تعریف. فرض کنید $w=f(x,y,z)$ یک تابع از سه متغیر و c یک عدد ثابت است. مجموعه تمام نقاط (x,y,z) در فضا که $f(x,y,z)=c$ است را یک رویه تراز متناظر به c نامیم.

مثال. فرض کنید $w=f(x,y,z)=x-y+z+2$. رویه های تراز متناظر به مقادیر ۱، ۲ و ۳ را رسم کنید.

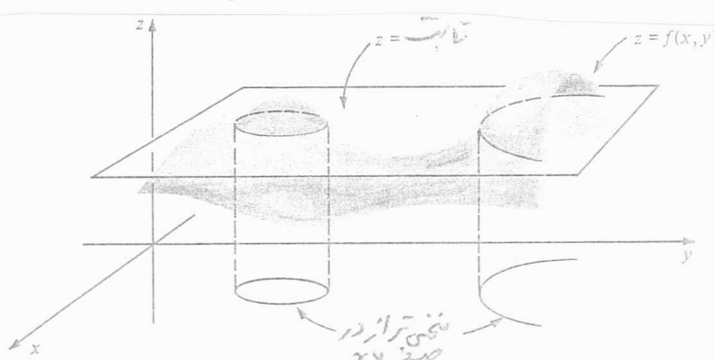
حل. رویه تراز متناظر به مقدار c، از قرار دادن $w=f(x,y,z)$ برابر c به دست می آید.
پس
رویه تراز متناظر به ۱: $c=1$: $x-y+z+2=1$ یا صفحه $x-y+z+1=0$
رویه تراز متناظر به ۲: $c=2$: $x-y+z+2=2$ یا صفحه $x-y+z=0$
رویه تراز متناظر به ۳: $c=3$: $x-y+z+2=3$ یا صفحه $x-y+z-1=0$

است. این رویه‌ها، صفحاتی موازی یکدیگرند.



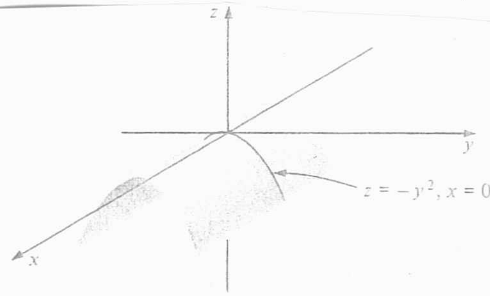
توضیح. رسم رویه‌ها در فضا، معمولاً مشکل‌تر از رسم منحنی‌ها در صفحه است. با رسم چند نقطه روی یک رویه ممکن است اطلاعات کافی برای رسم رویه حاصل شود.

برای رسم رویه‌ها، اغلب چند منحنی روی رویه را رسم می‌کنیم تا شمائی از رویه حاصل شود. این روش را روش مقاطع نامیم که برای نمودارهای توابع از دو متغیر یا رویه‌های تراز توابع از سه متغیر بسیار مفید است. به عنوان مثال، تلاقی صفحه $z = c$ و نمودار تابع $z = f(x,y)$ منحنی در صفحه $z = c$ است که تصویر آن بر صفحه xy را به دست می‌آوریم.



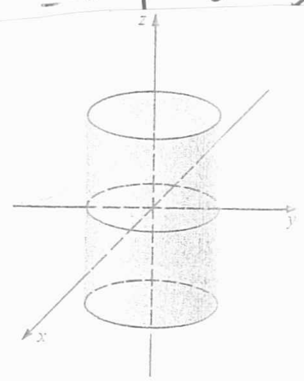
مثال. نمودار رویه $z = -y^2$ را رسم کنید.

حل. در معادله داده شده، x وجود ندارد. پس مقاطع رویه مطلوب با $x = c$ یکسان است و همگی کپی‌های سهمی $z = -y^2$ می‌باشند. بنابراین سهمی $z = -y^2$ را در صفحه zy رسم کرده و سپس آن را به موازات محور xها حرکت می‌دهیم. این رویه یک رویه استوانه‌ای با مقطع سهمی است که آن را استوانه سهموی نامیم.



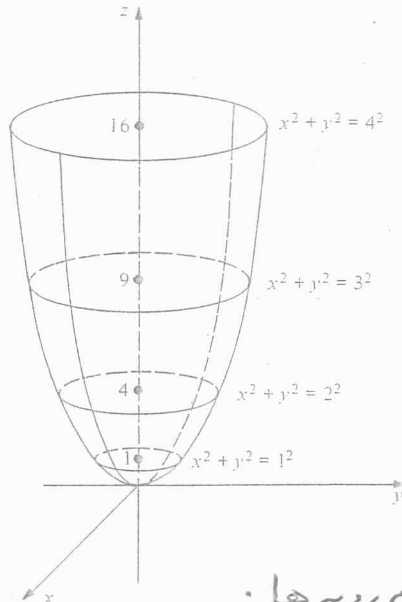
مثال. نمودار رویه $x^2+y^2=25$ را رسم کنید.

حل. در معادله داده شده، متغیر z مشاهده نمی‌شود. پس رویه یک استوانه با مقطع دایره موازی با محور zها است، بنابراین دایره $x^2+y^2=25$ را در صفحه $z=0$ رسم کرده و آن را به موازات محور zها حرکت می‌دهیم. رویه حاصل یک استوانه مستدیر نامیده



مثال. نمودار رویه $z=f(x,y)=x^2+y^2$ را رسم کنید.

حل. منحنی تراز متناظر به $z=c$ برای $c>0$ یک دایره، برای $c=0$ یک نقطه و برای $c<0$ تهی است. برای $c>0$ دایره‌هایی با مرکز واقع بر محور zها و شعاع $\sqrt{c}$ حاصل می‌شوند. مقطع رویه با صفحه $x=0$ سهمی $z=y^2$ در صفحه yz است و مقطع رویه با صفحه $y=0$ سهمی $z=x^2$ در صفحه xz است. رویه حول محور zها متقارن است. رویه حاصل را یک سهمی‌گون دوران یافته نامیم که در جهت مثبت محور zها قرار دارد. نمودار رویه در شکل صفحه بعد رسم شده است و حالت خاصی از رویه‌های درجه دوم است که در بخش‌های بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرند.



روش تقاطع برای رسم رویه ها :

۱. ابتدا هرگونه تقارن را بررسی می‌کنیم.

۲. اگر هر یک از متغیرهای x ، y یا z در ضابطه تابع حذف شده باشند، رویه یک رویه استوانه‌ای با محور موازی با محور متغیر حذف است.

۳. برای تابع $z=f(x,y)$ ، به ازای مقادیر مناسب از c منحنی های تراز متناظر یعنی $f(x,y)=c$ را روی صفحات $z=c$ رسم می‌کنیم و سپس به طور هموار این منحنی‌ها را با یک رویه در فضا به هم وصل می‌نماییم که از قرار دادن $x=0$ یا $y=0$ یا مقادیر مناسب دیگری می‌توان کمک گرفت.

۴. اگر رویه به صورت ضمنی $F(x,y,z)=c$ باشد آن‌گاه یکی از متغیرها را برای متغیرهای دیگر حل کرده و از مرحله (۲) شروع می‌کنیم یا برخورد رویه را با صفحات ثابت$=x$ و ثابت$=y$ و ثابت$=z$ به دست آورده و با رسم مقاطع، رویه را مشخص می‌کنیم.

در نظر گرفتن وضعیت های زیر، می‌تواند در رسم رویه‌ها مفید باشد.

تعریف. یک رویه دوران یافته، رویه‌ای است که از دوران یک منحنی مسطح حول خطی واقع در صفحه منحنی حاصل می‌شود.

وقتی که یک دایره حول خطی در امتداد قطر دایره دوران کند رویه حاصل یک کره است.

اگر یک سهمی حول محور اصلی سهمی دوران کند، رویه حاصل یک سهمی گون است. و اگر یک هذلولی حول محور غیر متقاطع با هذلولی دوران کند، حاصل یک هذلولی گون یک تکه است و اگر حول محور مزدوج (یا متقاطع با شاخه های هذلولی) دوران کند حاصل یک هذلولی گون دو تکه است.

۴.۳ رویه های درجه دوم

تعریف. در هندسه تحلیلی سه بعدی، یک رویه درجه دوم نمودار معادله درجه دومی برحسب x، y و z است.

در زیر برخی از رویه های درجه دوم مهم آورده شده است. بحث تکمیلی در رابطه با رسم نمودار این رویه ها در بخش مسائل حل شده آمده است.

الف) نمودار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ یک بیضی گون است، که در آن a، b و c اعداد حقیقی مثبت اند.

ب) نمودار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ یک هذلولی گون یک تکه است.

ج) نمودار $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ یک هذلولی گون دو تکه است.

د) نمودار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ یک مخروط است که محور آن محور zها باشد.

ه) نمودار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ یک سهمی گون است که محور آن محور zها باشد و اگر $c>0$ باشد آنگاه سهمی گون به طرف بالا باز می شود و اگر $c<0$ باشد آنگاه سهمی گون به طرف پایین باز می شود.

و) نمودارهای معادلات به فرم

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad , \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx,$$

به ترتیب سهمی گون هایی با محورهای y و x به ترتیب اند.

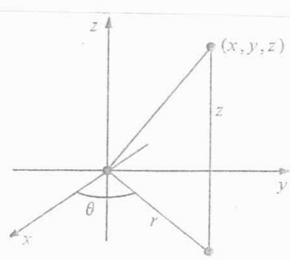
ز) نمودار $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=cz$ یک هذلولی گون سهموی است.

۵.۳ مختصات استوانه‌ای و کروی

به دو طریق می‌توان مختصات قطبی در صفحه را به فضا تعمیم داد.

تعریف. مختصات استوانه‌ای نقطه (x, y, z) در فضای سه‌تایی (r, θ, z) است که در آن r و θ مختصات قطبی نقطه (x, y) در صفحه است و $z = z$ می‌باشد. بنابراین

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$



توضیح. مشابه با مختصات قطبی، داریم

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

چون (r, θ) و $(-r, \theta+\pi)$ و $(r, \theta+2\pi)$ نشان دهنده یک نقطه در صفحه قطبی اند پس همواره فرض می‌کنیم $r \geq 0$ و $r = 0$ متناظر به محور zها است. اگر θ را بین $-\pi$ و π و $\tan^{-1} u$ را بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ اختیار کنیم، در این صورت معادله

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

برای $x > 0$ دارای جواب $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ و برای $x < 0$ دارای جواب $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ است. اگر $x = 0$ و $y > 0$ باشد آنگاه $\theta = \frac{\pi}{2}$ و اگر $x = 0$ و $y < 0$ باشد آنگاه $\theta = -\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین تعریف زیر برای تبدیل مختصات دکارتی به استوانه‌ای و برعکس را داریم.

تعریف . اگر مختصات دکارتی یک نقطه در فضا (x, y, z) باشد آنگاه مختصات استوانه‌ای نقطه (r, θ, z) است که در آن

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

است و اگر $r \geq 0$ و $-\pi < \theta \leq \pi$ باشد آنگاه

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x} & x > 0 \\ \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi & x < 0 \end{cases}$$

مثال . مختصات استوانه‌ای نقطه $(6, 6, 8)$ را به دست آورید .

حل . داریم $r = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{6}{6} = \frac{\pi}{4}$ پس $(6\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 8)$ مختصات استوانه‌ای نقطه مورد نظر است .

مثال . مختصات دکارتی نقطه $(2, \frac{3\pi}{4}, 1)$ را به دست آورید .

حل . داریم

$$x = r\cos\theta = 2\cos(\frac{3\pi}{4}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin(\frac{3\pi}{4}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$$

پس $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ مختصات دکارتی نقطه مورد نظر است .

توضیح . در مسائلی که تقارن استوانه‌ای یعنی تقارن حول محور z ها وجود دارد، استفاده از مختصات استوانه‌ای باعث ساده‌تر شدن مسئله خواهد شد .

در مسائلی که تقارن کروی یعنی تقارن نسبت به تمام دوران‌ها حول مبدا رخ می‌دهد از مختصات دیگری به نام مختصات کروی برای ساده‌تر شدن مسائل می‌توان استفاده کرد . در چنین حالاتی دستگاه مختصات کروی مفید است .

مختصات کروی نقطه (x, y, z) در فضا، سه‌تایی (ρ, θ, φ) است که به صورت زیر شرح داده می‌شوند .

ρ = فاصله نقطه (x, y, z) از مبدا مختصات است .

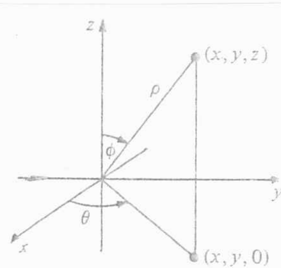
θ = مختص استوانه‌ای است یعنی زاویه از جهت مثبت محور xها تا نقطه (x,y) در صفحه xy است. (در بازه $(-\pi,\pi)$)

φ = زاویه (در بازه $[0,\pi]$) از جهت مثبت محور zها تا خط گذرنده از مبدا و نقطه (x,y,z) است.

برای بدست آوردن مختصات دکارتی برحسب مختصات کروی، ابتدا مشاهده می‌شود که مختص استوانه‌ای $r=\sqrt{x^2+y^2}$ برابر $\rho\sin\varphi$ است و $z=\rho\cos\varphi$ پس

$$x=r\cos\theta=\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta=\rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=\rho\cos\varphi$$

از حل این معادلات برای ρ,θ,φ مختصات کروی نقطه بدست می‌آید.



تعریف. اگر مختصات دکارتی یک نقطه در فضا (x,y,z) باشد آنگاه مختصات کروی نقطه (ρ,θ,φ) است که در آن

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z=\rho\cos\varphi.$$

یا اگر $\rho\geq 0$ و $-\pi<\theta\leq\pi$ و $0\leq\varphi\leq\pi$ باشد آنگاه

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta=\begin{cases}\tan^{-1}\frac{y}{x} & x\geq 0\\ \tan^{-1}\frac{y}{x}+\pi & x<0\end{cases},\quad \varphi=\cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

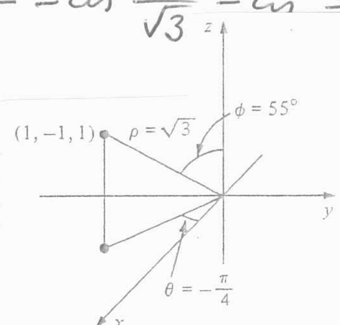
مثال. مختصات کروی نقطه $(1,-1,1)$ را بدست آورید.

حل. داریم

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+(-1)^2+1}=\sqrt{3}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\varphi=\cos^{-1}\frac{z}{\rho}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq 54.74^\circ$$



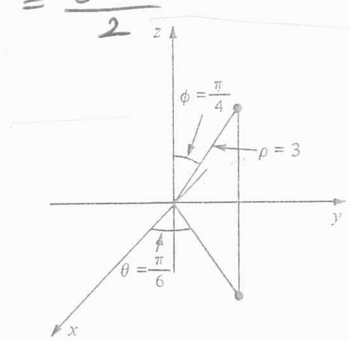
مثال. مختصات دکارتی نقطه $(3,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ را بدست آورید.

حل. داریم

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta=3\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta=3\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$z=\rho\cos\varphi=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$



مثال. معادله $x^2+y^2-z^2=4$ (هذلولی گون دوار) را در مختصات کروی بدست آورید.

حل.

$$x^2+y^2-z^2=x^2+y^2+z^2-2z^2$$
$$=\rho^2-2\rho^2\cos^2\varphi$$
$$=\rho^2(1-2\cos^2\varphi)=-\rho^2\cos2\varphi$$

پس رویه دارای معادله $\rho^2\cos2\varphi+4=0$ در مختصات کروی است.

۶.۳ حد و پیوستگی

تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $(x_0,y_0)\in \mathbb{R}^2$ نقطه‌ای دلخواه است. برای بررسی رفتار تابع f در نقطه (x_0,y_0) یا در اطراف این نقطه، نیاز به مفهوم حد داریم. بین در ابتدا فرض می‌کنیم که همسایگی (دایره‌ای) بازی از نقطه (x_0,y_0) وجود دارد، مانند N به طوری که N زیرمجموعه‌ای از دامنه تعریف تابع f است، $N\subset D$. به عبارت ساده‌تر فرض می‌کنیم که (x_0,y_0) یک نقطه حدی مجموعه D است. باید توجه کرد که لزوماً نقطه (x_0,y_0) متعلق به D نیست. اگر این نقطه متعلق به D باشد به سراغ مفهوم دیگری بنام پیوستگی خواهیم رفت. برای رسیدن به مفهوم حد توابع، مشابه به حالت یک متغیره ابتدا مفهوم فاصله نقاط و سپس همسایگی نقطه را بیان می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی است که در شرایط زیر صدق کند

۱. برای هر $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ و هر $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\geq 0$$

و

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0 \Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

۲. برای هر $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ و هر $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

۳. برای هر سه نقطه دلخواه (x_1,y_1) ، (x_2,y_2) و (x_3,y_3) در $\mathbb{R}^2$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\leq d((x_1,y_1),(x_3,y_3))+d((x_2,y_2),(x_3,y_3))$$

در این صورت تابع d روی $\mathbb{R}^2$ را یک تابع فاصله یا یک متر نامیم و $(\mathbb{R}^2,d)$ را یک فضای متریک گوییم.

می‌توان نشان داد که در فضاهای متناهی البعد، تمام مترها باهم معادلند. بنابراین روی $\mathbb{R}^2$ متر زیر را که به متر اقلیدسی معروف است، در نظر می‌گیریم.

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|$$

که تعمیم قدرمطلق در $\mathbb{R}$ است.

به طور مشابه می‌توان مفهوم متر یا فاصله را در $\mathbb{R}^3$ بیان کرد و متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^3$ تعریف شده توسط

$$d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$= \|(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)\|$$

را در نظر گرفت.

تعریف. همسایگی نقطه (x_0,y_0) در $\mathbb{R}^2$ به شعاع $r>0$ مجموعه

$$N_r((x_0,y_0)) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(x_0,y_0))<r\}$$

است و همسایگی محذوف نقطه (x_0,y_0) در $\mathbb{R}^2$ به شعاع $r>0$ مجموعه $N_r((x_0,y_0))$ بجز نقطه (x_0,y_0) است و آن را با $N'_r((x_0,y_0))$ نمایش می‌دهیم. پس

$$N'_r((x_0,y_0)) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<d((x,y),(x_0,y_0))<r\}$$

گاهی اوقات از عبارت قرص باز (قرص باز محذوف) برای همسایگی باز (همسایگی باز محذوف) استفاده می‌کنیم و آن را با $D_r((x_0,y_0))$ ($D'_r((x_0,y_0))$) نمایش می‌دهیم.

اکنون مشابه حالت توابع یک متغیره با مقادیر حقیقی، می‌توان مفهوم حد را با روش $\delta-\varepsilon$ بیان کرد.

تعریف. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y با دامنه تعریف D است و (x_0,y_0) یک نقطه حدی دامنه D باشد. گوییم حد تابع f وقتی (x,y) به (x_0,y_0) میل می‌کند برابر عدد L است و می‌نویسیم

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

هرگاه، برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $(x,y)\in D$

بوده و $0<d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$ آنگاه $|f(x,y)-L|<\varepsilon$. یعنی

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ s.t. } \forall (x,y)\in D,\ 0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon.$$

تبصره. با توجه به تعریف فاصله و تعریف حد براساس تکنیک ε-δ که تعمیم ساده‌ای از مفاهیم مشابه برای توابع از یک متغیر است، به سادگی دیده می‌شود که قوانین حد در توابع از یک متغیر مانند جمع، ضرب، تفاضل و خارج قسمت برای توابع از دو متغیر و سه متغیر نیز برقرارند، تنها نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که به دلیل آن که $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ دارای ترتیب کلی مشابه با $\mathbb{R}$ نیستند، نمی‌توان از حد چپ و حد راست برای توابع از دو یا سه متغیر صحبت به میان آورد. در چنین وضعیت‌هایی، برای عدم وجود حد توابع دو یا سه متغیر از مفهوم مسیر استفاده می‌کنیم. بنابراین در حالت حد توابع دو یا سه متغیر وجود حد یا براساس تعریف ε-δ یا با درنظر گرفتن قضایای از قبل ثابت شده و عملیات جبری خواهد بود.

مثال. فرض کنید $z=f(x,y)=x$. نشان دهید $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$.

حل. فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه داده شده است و $L=x_0$. باید $\delta>0$ را چنان بیابیم که تعریف حد برقرار باشد. یعنی $\delta>0$ را باید چنان بیابیم که اگر

$$0<d((x,y),(x_0,y_0))=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

باشد آنگاه $|x-x_0|=|f(x,y)-L|<\varepsilon$. چون

$$|x-x_0| = (x-x_0)^2 \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

پس اگر برای $\varepsilon>0$ داده شده، قرار دهیم $\delta=\varepsilon$ آنگاه

$$0<d((x,y),(x_0,y_0))<\delta \Rightarrow |x-x_0|<\varepsilon$$

مثال. مطلوب است

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2}$$

حل. وقتی $(x,y)=(0,0)$، صورت و مخرج کسر داده شده صفر شد، با تجزیه صورت کسر داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2x^2+xy^2+2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(x+2)}{x^2+y^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+2) = 0+2=2$$

مثال. آیا حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ وجود دارد؟

حل. اگر روی محور yها $(x=0)$ به نقطه $(0,0)$ نزدیک شویم، در این صورت

$$(0,y)\longrightarrow(0,0) \equiv y\to 0$$

آنگاه

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{\sqrt{0+y^2}}=0$$

و اگر از قسمت مثبت محور xها و روی محور xها به $(0,0)$ نزدیک شویم داریم

$$(x,y)\to(0,0) \equiv y=0,\ x\to 0^+$$

پس

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+0}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

چون روی دو مسیر گذرنده از $(0,0)$ دو مقدار متفاوت برای حد تابع حاصل شد پس حد مورد نظر وجود ندارد.

تعریف. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y با دامنه تعریف D است و (x_0,y_0) نقطه‌ای در D باشد. گوییم تابع f در (x_0,y_0) پیوسته است، هرگاه (x_0,y_0) یک نقطه حدی D بوده و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

توضیح. تعاریف مشابهی برای توابع از سه متغیر می‌توان بیان کرد.

۷.۳ مشتقات جزئی

فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y تعریف شده بر ناحیه D در صفحه $\mathbb{R}^2$ است. می دانیم که نمودار این تابع یک رویه در $\mathbb{R}^3$ است. برای $y=c$ (ثابت) تلاقی این رویه با صفحه $y=c$ یک منحنی در صفحه $y=c$ است که توسط تابع یک متغیره

$$z=g(x)=f(x,c),$$

نمایش داده می شود و می توان از مشتق پذیری تابع $z=g(x)$ صحبت کرد. اگر تابع $z=g(x)$ در x دارای مشتق باشد یعنی حد زیر موجود باشد

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

در این صورت حد زیر وجود دارد

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,c)-f(x,c)}{\Delta x}$$

و مقدار آن را مشتق جزئی (پاره ای یا نسبی) تابع f نسبت به x نامیم و با f_x یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا $\frac{\partial z}{\partial x}$ نمایش می دهیم. مشتق جزئی f نسبت به y به طریق مشابهی تعریف می شود.

پس

تعریف. برای تابع دو متغیره $z=f(x,y)$، گوییم مشتق جزئی مرتبه اول f نسبت به x وجود دارد هرگاه حد زیر

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

موجود باشد و مقدار حد را با $\frac{\partial f}{\partial x}$ نشان می دهیم. به طور مشابه مشتق جزئی f نسبت به y وجود دارد هرگاه حد زیر

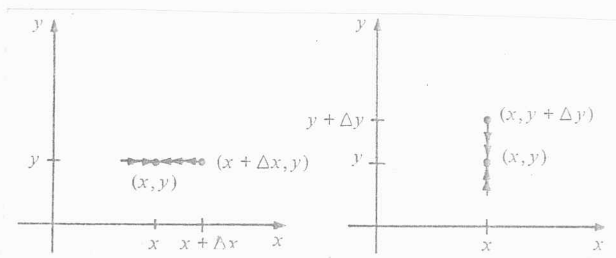
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

موجود باشد و مقدار حد را با $\frac{\partial f}{\partial y}$ نشان می دهیم.

گاهی اوقات از نمادهای f_x و D_1 برای $\frac{\partial f}{\partial x}$ و از نمادهای f_y و D_2 برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ نیز استفاده می کنیم.

مشتقات جزئی توابع از سه متغیر یا بیشتر به طریق مشابه تعریف می شوند.

برای تابع $z=f(x,y)$ ، مشتق جزئی $f_x(x,y)$ اندازه نرخ تغییر تابع $f(x,y)$ است وقتی که (x,y) در جهت افقی تغییر می‌کند و $f_y(x,y)$ اندازه نرخ تغییر تابع $f(x,y)$ است وقتی که (x,y) در جهت عمودی تغییر می‌کند. در قسمتهای بعد مشتق تابع f در جهت بردار دلخواه $\vec{u}$ را تعریف خواهیم کرد. شکل زیر را ببینید.



مثال. اگر $f(x,y)=xy+e^x\cos y$ باشد، f_x و f_y را بدست آورید و $f_x(1,\frac{\pi}{2})$ را محاسبه کنید.

حل. y را ثابت در نظر گرفته و نسبت به x مشتق می‌گیریم. داریم

$$f_x(x,y)=y+e^x\cos y,$$

حال x را ثابت گرفته و نسبت به y مشتق می‌گیریم. داریم

$$f_y(x,y)=x-e^x\sin y,$$

با جانشانی $x=1$, $y=\frac{\pi}{2}$ در $f_x(x,y)$ داریم

$$f_x(1,\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+e^1\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

مثال. فرض کنید $w=f(x,y,z)=\sin\frac{xy}{z}$. مطلوب است $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ ، $\frac{\partial w}{\partial z}$ و $f_z(1,2,3)=\frac{\partial w}{\partial z}(1,2,3)$.

حل. y و z را ثابت در نظر گرفته و نسبت به x مشتق می‌گیریم. داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{y}{z}\cos\frac{xy}{z},$$

x و z را ثابت در نظر گرفته و نسبت به y مشتق می‌گیریم. داریم

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{x}{z}\cos\frac{xy}{z},$$

x و y را ثابت درنظر گرفته و نسبت به z مشتق می‌گیریم. داریم

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}\cos\frac{xy}{z}$$

پس

$$f_z(1,2,3) = -\frac{(1)(2)}{3^2}\cos\frac{(1)(2)}{3} = -\frac{2}{9}\cos\frac{2}{3}.$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

مشتقات جزئی یک تابع از چند متغیر، درصورت وجود، توابعی از چند متغیر می‌باشند پس مشتقات جزئی آنها را می‌توان مورد بررسی قرار داد. مشتقات جزئی حاصل، مشتقات جزئی مراتب بالاتر تابع است. اگر $z=f(x,y)$ تابعی از دو متغیر باشد که نسبت به هر یک از متغیرها دو بار مشتق پذیر است، در این صورت مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع به صورت زیر می‌باشند:

1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx}$,

2) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx}$,

3) $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy}$,

4) $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy}$.

مثال. مشتقات جزئی دوم تابع

$$z = xy^2 + ye^{-x} + \sin(x-y)$$

را به دست آورید.

حل. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - ye^{-x} + \cos(x-y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + e^{-x} - \cos(x-y)$$

پس

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ye^{-x} - \sin(x-y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - \sin(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y - e^{-x} + \sin(x-y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y - e^{-x} + \sin(x-y),$$

باید دقت کرد که لزوماً مشتقات جزئی مرتبه دوم مخلوط f_{xy} و f_{yx} باهم مساوی نیستند.
در سال ۱۷۳۴ میلادی اویلر قضیه زیر را در رابطه با مسائل هیدرودینامیک بیان و اثبات کرد.

قضیه. اگر $z=f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد آنگاه مشتقات جزئی مخلوط تابع باهم برابرند، یعنی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

(معادلات مشابهی برای مشتقات جزئی مخلوط توابع از سه متغیره و مراتب بالاتر نیز برقرار است)

۸.۳ تقریب های خطی و صفحات مماس

تابع خطی

$$z = L(x,y) = ax + by + c$$

نشان دهنده یک صفحه در فضا است. این صفحه دارای دو شیب a و b است که جهت بردار قائم $-a\vec{i} - b\vec{j} + \vec{k}$ را تعیین می کنند.

مثال. صفحه گذرنده از نقطه (x_0, y_0, z_0) با بردار قائم $A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ را درنظر بگیرید. فاصله نقطه $Q=(x_1,y_1,z_1)$ تا این صفحه را به دست آورید.

حل. معادله صفحه به صورت زیر است

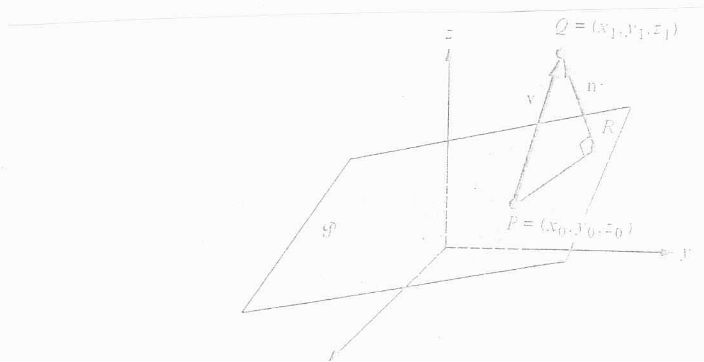
$$\pi : \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

همان گونه که در شکل دیده می شود، بردار یکه قائم به صفحه به صورت $\vec{n} = \dfrac{A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ است.
از نقطه Q عمودی به صفحه رسم کرده و مثلث PRQ را درنظر می گیریم. فاصله نقطه Q تا صفحه یعنی $d=\|\vec{RQ}\|$ برابر با طول تصویر بردار $\vec{v} = \vec{PQ}$ بروی بردار $\vec{n}$ است.
پس

$$d = \|\vec{RQ}\| = |\vec{v}\cdot\vec{n}| = \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

و اگر صفحه به صورت $Ax+By+Cz+D=0$ باشد، در این صورت

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



حال اگر $z=f(x,y)$ تابعی از دو متغیر x و y با $(x_0,y_0)\in D$ باشد و مشتقات جزئی تابع در (x_0,y_0) موجود باشند، مشابه حالت توابع یک متغیره، می‌توان در یک همسایگی نقطه (x_0,y_0) (به شعاع بسیار کوچک) رویه f را توسط یک صفحه (تابع خطی) تقریب زد. اگر صفحه بفرم $z=L(x,y)=ax+by+c$ با بردار قائم $-a\vec{i}-b\vec{j}+\vec{k}$ باشد، دیده می‌شود که $L_x(x,y)=a$ و $L_y(x,y)=b$. پس تقریب خطی در (x_0,y_0) برای تابع $z=f(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

تقریب خطی و صفحه مماس. تقریب خطی تابع $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0)، تابع خطی

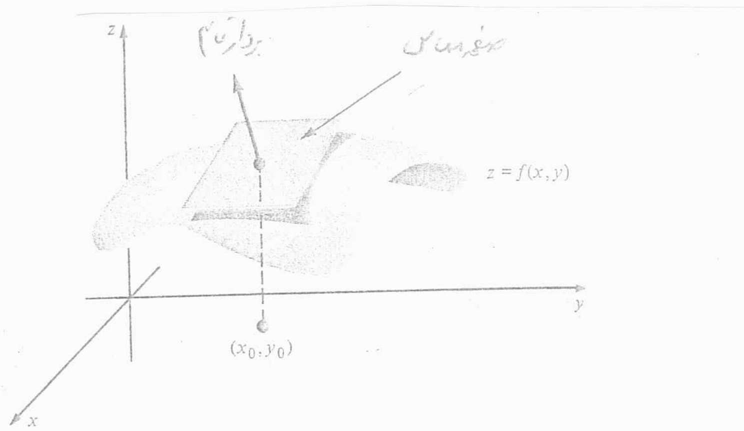
$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

است. نمودار $z=L(x,y)$ را صفحه مماس به رویه f در (x_0,y_0) نامیم. بردار قائم بر این صفحه $-f_x(x_0,y_0)\vec{i}-f_y(x_0,y_0)\vec{j}+\vec{k}$ است. پس بردار یکه قائم عبارت است از

$$\vec{n}=\frac{-f_x(x_0,y_0)\vec{i}-f_y(x_0,y_0)\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{[f_x(x_0,y_0)]^2+[f_y(x_0,y_0)]^2+1}}$$

به طور مشابه تقریب خطی به تابع $w=f(x,y,z)$ در (x_0,y_0,z_0)، تابع خطی زیر است:

$$L(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)+f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$



مثال. معادله صفحه مماس به نیم‌کره $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ در نقطه (x_0, y_0) را به دست آورده و تعبیر هندسی نتیجه به دست آمده را بیان کنید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ، داریم

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

بنابراین صفحه مماس در نقطه (x_0, y_0, z_0) روی نیم‌کره به صورت

$$z=\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}-\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(x-x_0)-\frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}}(y-y_0)$$

یا

$$z=z_0-\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0)$$

است. در نتیجه بردار قائم به صفحه $\frac{x_0}{z_0}\vec{i}+\frac{y_0}{z_0}\vec{j}+\vec{k}$ است. با ضرب در z_0 ، بردار قائم به صورت $x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$ است. پس صفحه مماس در نقطه P از یک کره عمود بر برداری است که از مرکز کره به نقطه P روی کره وصل می‌شود.

توضیح. مشابه بحث توابع یک متغیره، می‌توان از تقریب خطی برای یافتن تقریب‌های عددی استفاده کرد. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی از دو متغیر مستقل x, y است. برای

یافتن تقریب خطی تغییر در z در اثر تغییرات در x و y به صورت زیر عمل می‌کنیم.

مشتق جزئی $f_x(x_0,y_0)$ نرخ تغییر z نسبت به x در (x_0,y_0) است، بنابراین تغییر در z از تغییر در x به اندازه Δx برابر $f_x(x_0,y_0)\Delta x$ است. به طور مشابه تغییر در z در اثر تغییر در y به اندازه Δy برابر $f_y(x_0,y_0)\Delta y$ است. پس تغییر کل در z در اثر تغییر در x به اندازه Δx و تغییر در y به اندازه Δy برابر $f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$ است. پس

$$\Delta z \simeq f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

اگر قرار دهیم $\Delta x = x-x_0$ و $\Delta y = y-y_0$ آنگاه

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x,y)-f(x_0,y_0)\\ &= f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &\simeq f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).\end{aligned}$$

مثال. مقدار تقریبی $(0.99\,e^{0.02})^8$ را به دست آورید.

حل. قرار می‌دهیم $z=f(x,y)=(xe^y)^8$ و $x_0=1$ و $y_0=0$. پس $f(1,0)=1$. بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial x}=8x^7e^{8y} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=8$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=8x^8e^{8y} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=8$$

پس اگر قرار دهیم $x=0.99$ و $y=0.02$ داریم $x-x_0=-0.01$ و $y-y_0=0.02$. بنابراین تقریب خطی عبارت مورد نظر برابر است با

$$1+8(-0.01)+8(0.02)=1.08$$

مقدار حاصل از ماشین حساب برابر 1.082850933 است.

تعریف. فرض کنید dx و dy (دیفرانسیل‌های x و y) متغیرهای مستقل‌اند. در این صورت دیفرانسیل z یعنی dz برای تابع $z=f(x,y)$ با شرط وجود مشتقات جزئی

تابع f نسبت به x و y عبارت است از

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

که گاهی اوقات آن را دیفرانسیل کل نیز می‌نامیم.

مثال. فرض کنید $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$. مطلوب است dz. در ضمن اگر x از 2 تا 2.05 و y از 3 تا 2.96 تغییر کند، مقادیر Δz و dz را بدست آورید.

حل.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= (2x+3y)\,dx + (3x-2y)\,dy$$

برای $x=2$ ، $dx = \Delta x = 0.05$ ، $y=3$ و $dy = \Delta y = -0.04$ داریم

$$dz = [2(2)+3(3)]\,0.05 + [3(2)-2(3)](-0.04)$$

$$= 0.65$$

و Δz عبارت است از

$$\Delta z = f(2.05,\, 2.96) - f(2,3)$$

$$= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]$$

$$= 0.6449$$

توجه داریم که $\Delta z \simeq dz$ ، اما dz سریعتر محاسبه می‌شود.

قضیه زیر بیان می‌کند که dz تقریب بهتری تا Δz است، هرگاه Δx و Δy کوچک باشند، مشروط به اینکه f_x و f_y هر دو پیوسته باشند.

قضیه. فرض کنید f_x و f_y روی ناحیه مستطیلی R با اضلاع موازی محورهای مختصات که شامل نقاط (x_0, y_0) و $(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)$ است، موجودند. فرض کنید f_x و f_y در نقطه (x_0,y_0) پیوسته اند و علاوه بر آن داریم

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

آنگاه

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

که در آن ϵ_1 و ϵ_2 توابعی از Δx و Δy اند و به صفر میل می‌کنند هرگاه $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

تعریف. فرض کنید $z=f(x,y)$. تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر است هرگاه بتوان Δz را به صورت

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

شرح داد که در آن $\epsilon_1 \to 0$ و $\epsilon_2 \to 0$ وقتی که $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

۹.۳ ترکیب توابع و قانون زنجیره‌ای

بنا به تحت ترکیب توابع یک متغیره و قانون زنجیره‌ای برای مشتق این توابع، در مورد توابع از چند متغیر نیز قانون زنجیره‌ای به صورتهای زیر برقرارند.

قانون زنجیره‌ای - حالت ۱: فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر از x و y است که در آن $x=g(t)$ و $y=h(t)$ توابعی مشتق‌پذیر از t هستند. آنگاه z تابعی مشتق‌پذیر از t است و

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

مثال. اگر $z=x^2y+3xy^4$ باشد که در آن $x=e^t$ و $y=\sin t$ است، مطلوب است $\frac{dz}{dt}$.

حل. با توجه به قانون زنجیره‌ای (حالت ۱) داریم

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy+3y^4)e^t + (x^2+12xy^3)\cos t$$

$$= (2e^t\sin t + 3\sin^4 t)e^t + (e^{2t}+12e^t\sin^3 t)\cos t.$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای - حالت 2 : فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر از x و y است و $x=g(u,v)$ و $y=h(u,v)$ و مشتقات جزئی g_u، g_v، h_u و h_v موجودند. آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

مثال. اگر $z=e^x\sin y$ باشد که در آن $x=uv^2$ و $y=u^2v$. مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial u}$، $\frac{\partial z}{\partial v}$.

حل.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=(e^x\sin y)(v^2)+(e^x\cos y)(2uv)$$
$$=v^2e^{uv^2}\sin(u^2v)+2uve^{uv^2}\cos(u^2v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=(e^x\sin y)(2uv)+(e^x\cos y)(u^2)$$
$$=2uve^{uv^2}\sin(u^2v)+u^2e^{uv^2}\cos(u^2v)$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای - حالت کلی. فرض کنید u تابعی مشتق‌پذیر از n متغیر $x_1,\dots,x_n$ است و هر یک از x_k ها تابعی از m متغیر $t_1,t_2,\dots,t_m$ هستند به طوری که برای $j=1,2,\dots,n$ و $i=1,2,\dots,m$ مشتقات جزئی $\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$ موجودند. آنگاه u تابعی از $t_1,\dots,t_m$ است و برای $i=1,2,\dots,m$ داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

مثال. اگر $t=x^4y+y^2z^3$ باشد که در آن $x=uve^w$، $y=uv^2e^{-w}$ و $z=u^2v\sin w$. مطلوب است $\frac{\partial t}{\partial v}$.

حل.

$$\frac{\partial t}{\partial v}=\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$=(4x^3y)(ue^w)+(x^4+2yz^3)(2uve^{-w})+(3y^2z^2)(u^2\sin w)$$

مثال. فرض کنید $g(u,v)=f(u^2-v^2, v^2-u^2)$ و f مشتق پذیر است. نشان دهید g در معادله $v\frac{\partial g}{\partial u}+u\frac{\partial g}{\partial v}=0$ صدق می‌کند.

حل. قرار می‌دهیم $x=u^2-v^2$ و $y=v^2-u^2$. در این صورت $g(u,v)=f(x,y)$ و از قانون زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}(2u)+\frac{\partial f}{\partial y}(-2u)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}(-2v)+\frac{\partial f}{\partial y}(2v)$$

بنابراین

$$v\frac{\partial g}{\partial u}+u\frac{\partial g}{\partial v}=\left(2uv\frac{\partial f}{\partial x}-2uv\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(-2uv\frac{\partial f}{\partial x}+2uv\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

مشتق گیری ضمنی

فرض کنید معادله‌ای به صورت $F(x,y)=0$، تابع y را به شکل ضمنی به عنوان تابعی از x تعریف کند، یعنی $y=f(x)$ که در آن $F(x,f(x))=0$ برای هر x در دامنه تعریف f برقرار است. اگر F مشتق پذیر باشد، با توجه به قانون زنجیره‌ای (حالت ۱) از طرفین معادله $F(x,y)=0$ نسبت به x مشتق می‌گیریم. چون x و y هردو توابعی از x اند، داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

اما $\frac{dx}{dx}=1$، پس اگر $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ باشد، معادله بالا را برای $\frac{dy}{dx}$ حل می‌کنیم داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

مثال. اگر $x^3+y^3=6xy$ باشد، مطلوب است y'.

حل. معادله را به صورت $F(x,y)=x^3+y^3-6xy=0$ می‌نویسیم داریم

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x}=\frac{-x^2+2y}{y^2-2x}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}.$$

حال فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ توسط معادله‌ای به شکل $F(x,y,z)=0$ داده شده است، یعنی $F(x,y,f(x,y))=0$ برای هر (x,y) در دامنه تعریف f قرار دارد. اگر F مشتق‌پذیر بوده و f_x و f_y موجود باشند، از $F(x,y,z)=0$ با توجه به قانون زنجیره‌ای مشتق‌گیری می‌کنیم. داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{نسبت به } x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad \text{نسبت به } y$$

اما $\frac{\partial x}{\partial x}=1$، $\frac{\partial x}{\partial y}=0$، $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial y}{\partial y}=1$، پس

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{نسبت به } x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad \text{نسبت به } y$$

بنابراین اگر $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

مثال. مطلوب است $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، هرگاه $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$.

حل. فرض کنید

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+6xyz-1=0$$

بنابراین

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+6yz}{3z^2+6xy}=-\frac{x^2+2yz}{z^2+2xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3y^2+6xz}{3z^2+6xy}=-\frac{y^2+2xz}{z^2+2xy}.$$

۱۰.۳ مشتقات سوئی و بردار گرادیانت

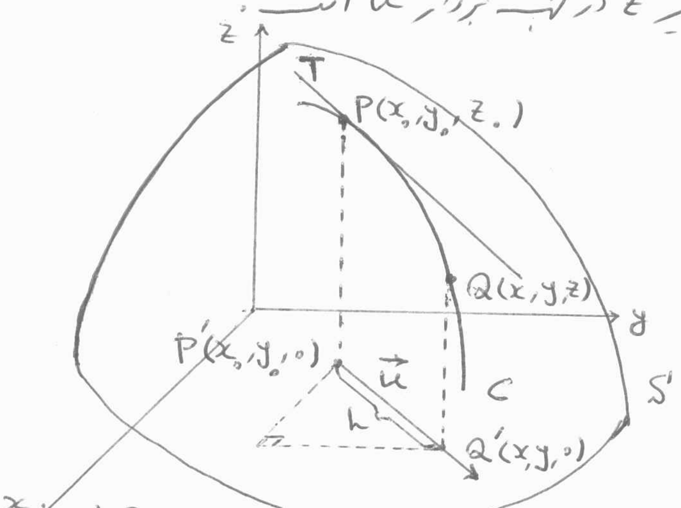
دیدیم که اگر $z=f(x,y)$ بوده و f_x و f_y موجود باشند، آنگاه f_x و f_y توسط

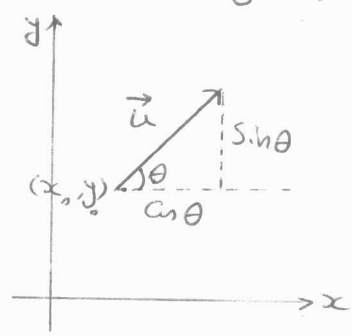
$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

تعریف می‌شوند و نشان دهندهٔ نرخ تغییر z در جهت‌های x و y هستند، یعنی نرخ تغییر z در جهت‌های بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌باشد.

در این قسمت، می‌خواهیم نرخ تغییر z در نقطهٔ (x_0,y_0) را در جهت بردار یکهٔ دلخواه $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ را به دست آوریم. فرض کنید S رویهٔ نشان دهندهٔ تابع $z=f(x,y)$ بوده و $z_0=f(x_0,y_0)$ است. در این صورت نقطهٔ $P(x_0,y_0,z_0)$ روی رویهٔ S قرار دارد. تلاقی رویه با صفحهٔ قائم گذرنده از نقطهٔ P در جهت بردار $\vec{u}$، منحنی C است. شیب خط مماس T به منحنی C در نقطهٔ P نرخ تغییر z در جهت بردار $\vec{u}$ است.





اگر $Q(x,y,z)$ نقطهٔ دلخواهی روی C بوده و P' و Q' تصویرهای قائم P و Q بر صفحهٔ xy باشند آنگاه بردار $\overrightarrow{P'Q'}$ موازی $\vec{u}$ است پس $\overrightarrow{P'Q'}=h\vec{u}=\langle ha,hb\rangle$ به ازای اسکالری مانند h و بنابراین $x-x_0=ha$ و $y-y_0=hb$ پس $x=x_0+ha$ و $y=y_0+hb$ و

$$\frac{\Delta z}{h}=\frac{z-z_0}{h}=\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

و در حد وقتی $h\to 0$، نرخ تغییر z در جهت $\vec{u}$ حاصل می‌شود که آن را مشتق سویی (یا جهتی) f در جهت بردار $\vec{u}$ نامیم و با $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$ نشان می‌دهیم پس

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

مشروط به این که حد وجود داشته باشد.

قضیه . اگر f تابع مشتق پذیر نسبت به x و y باشد آن گاه مشتق سویی f در جهت بردار یکه دلخواه $\vec{u}=\langle a,b\rangle$ وجود دارد و

$$D_{\vec{u}} f(x,y)=f_x(x,y)\,a+f_y(x,y)\,b.$$

اثبات. تمرین

توضیح . اگر بردار یکه $\vec{u}$ دارای جهت θ با محور مثبت xها در جهت مثبت باشد آن گاه $\vec{u}=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$ و

$$D_{\vec{u}} f(x,y)=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta.$$

مثال . مشتق سویی تابع $f(x,y)=x^3-3xy+4y^2$ در جهت بردار یکه $\vec{u}$ که زاویه $\theta=\frac{\pi}{6}$ با جهت مثبت محور xها دارد را بدست آورید.

حل .

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6}+f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2-3y)\frac{\sqrt{3}}{2}+(-3x+8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2-3x+(8-3\sqrt{3})y\right]. \end{aligned}$$

تعریف . فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y است. گرادیانت f ، تابع برداری تعریف شده توسط

$$\vec{\nabla} f(x,y)=\langle f_x(x,y),\, f_y(x,y)\rangle=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

است.

مثال . مطلوب است $\vec{\nabla} f$ ، هرگاه $f(x,y)=\sin x+e^{xy}$.

حل .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x,y) &= \langle \cos x+ye^{xy},\, xe^{xy}\rangle \\ &= (\cos x+ye^{xy})\vec{i}+xe^{xy}\vec{j}. \end{aligned}$$

تعریف . مشتق سویی f در (x_0, y_0, z_0) در جهت بردار یکه $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ عبارت است از

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+ha,\ y_0+hb,\ z_0+hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

مشروط به اینکه حد وجود داشته باشد .

تعریف . بردار گرادیان تابع $w = f(x, y, z)$ به صورت

$$\vec{\nabla} f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

تعریف می شود .

بنابراین مشتق سویی $w = f(x, y, z)$ در جهت بردار یکه $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ عبارت است از

$$D_{\vec{u}} f(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

و قضیه مهم زیر را داریم .

قضیه . فرض کنید f تابعی مشتق پذیر از دو یا سه متغیر است . ماکزیمم مقدار مشتق سویی یعنی $D_{\vec{u}} f$ برابر $\|\vec{\nabla} f\|$ است و این ماکزیمم مقدار زمانی رخ می دهد که بردار $\vec{u}$ و بردار گرادیان $\vec{\nabla} f$ هم جهت باشند .

اثبات . تمرین

صفحات مماس بر رویه های تراز

فرض کنید S رویه ای با معادله $F(x, y, z) = k$ است یعنی S یک رویه تراز تابع F از سه متغیر است و $P(x_0, y_0, z_0)$ نقطه ای روی رویه S است . فرض کنید C هر منحنی دلخواه واقع بر رویه S گذرنده از نقطه P است که توسط تابع برداری پیوسته

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

تعریف شده و $t = t_0$ پارامتر متناظر به نقطه P است . چون C روی رویه S قرار دارد پس هر نقطه $(x(t), y(t), z(t))$ از منحنی C باید در معادله رویه S صدق کند یعنی

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k.$$

اگر x ، y و z توابعی مشتق پذیر از t و F نیز مشتق پذیر باشد ، آنگاه از قاعده

زنجیره‌ای داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

حال چون $\vec{\nabla} F=\langle F_x , F_y , F_z\rangle$ و $\vec{r}\,'(t)=\langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$ پس

$$\vec{\nabla} F \cdot \vec{r}\,'(t)=0$$

بنابراین بردار گرادیان در نقطه P عمود بر بردار مماس $\vec{r}\,'(t_0)$ به هر منحنی C گذرنده از نقطه P است. اگر $\vec{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$ آنگاه صفحه مماس به رویه تراز $F(x,y,z)=k$ در $P(x_0,y_0,z_0)$ صفحه گذرنده از P با بردار قائم $\vec{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)$ است. یعنی

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

و خط قائم به S در نقطه P، خط گذرنده از P و عمود بر صفحه مماس است. یعنی

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

مثال. معادلات صفحه مماس و خط قائم به بیضی‌گون $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ در نقطه $(-2,1,-3)$ را به دست آورید.

حل. بیضی‌گون داده شده، رویه تراز (متناظر به $k=3$) از تابع

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$$

است. بنابراین

$$F_x(x,y,z)=\frac{x}{2},\qquad F_y(x,y,z)=2y,\qquad F_z(x,y,z)=\frac{2z}{9},$$

در نقطه $(-2,1,-3)$ داریم

$$F_x(-2,1,-3)=-1,\qquad F_y(-2,1,-3)=2,\qquad F_z(-2,1,-3)=-\frac{2}{3}$$

پس صفحه مماس مورد نظر به صورت

$$-1(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0$$

یعنی $3x-6y+2z+18=0$ است و خط قائم به معادلات متقارن زیر است

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2/3}.$$

۱۱.۳ ماکزیمم و می‌نیمم توابع دومتغیره

تعریف. گوییم تابع $z = f(x,y)$ از دو متغیر x و y دارای یک ماکزیمم نسبی (موضعی) در نقطه (x_0, y_0) است، هرگاه قرصی به مرکز (x_0, y_0) مانند D وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(x,y) \in D$،

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$

و اگر نامساوی بالا برای هر (x,y) در دامنه تعریف f برقرار باشد، گوییم f در (x_0, y_0) دارای یک ماکزیمم مطلق است.

تعریف. گوییم تابع $z = f(x,y)$ از دو متغیر x و y دارای یک می‌نیمم نسبی (موضعی) در نقطه (x_0, y_0) است، هرگاه قرصی به مرکز (x_0, y_0) مانند D وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(x,y) \in D$،

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$$

و اگر نامساوی بالا برای هر (x,y) در دامنه تعریف f برقرار باشد، گوییم f در (x_0, y_0) دارای یک می‌نیمم مطلق است.

قضیه. اگر f دارای یک اکسترمم موضعی (یعنی یک ماکزیمم موضعی یا یک می‌نیمم موضعی) در (a,b) است و مشتقات جزئی مرتبه اول f موجود باشند آن‌گاه

$$f_x(a,b) = 0 \quad , \quad f_y(a,b) = 0$$

اثبات. تمرین

تعریف. برای تابع $z = f(x,y)$، اگر در نقطه (a,b) داشته باشیم

$$f_x(a,b) = 0 \quad , \quad f_y(a,b) = 0,$$

آن‌گاه نقطه (a,b) را یک نقطه بحرانی تابع f نامیم.

مثال . فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$ ، آنگاه

$$f_x(x,y)=2x-2, \qquad f_y(x,y)=2y-6$$

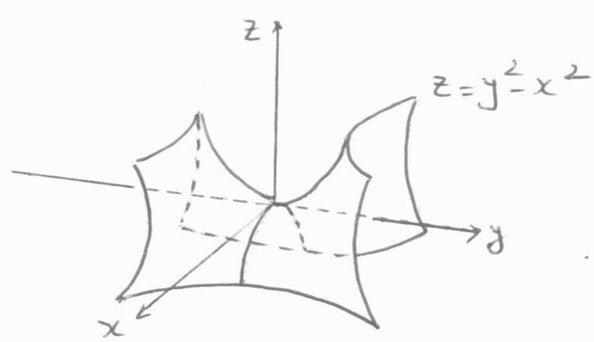
پس $(1,3)$ تنها نقطه بحرانی تابع است، زیرا $f_x(1,3)=f_y(1,3)=0$. با کامل کردن مربعات داریم

$$f(x,y)=4+(x-1)^2+(y-3)^2,$$

چون $(x-1)^2\geq 0$ و $(y-3)^2\geq 0$ پس برای هر x و y داریم $f(x,y)\geq 4$.
در نتیجه $f(1,3)=4$ یک مینیمم موضعی است، در واقع یک مینیمم مطلق تابع f است.

مثال . مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=y^2-x^2$ را به دست آورید.

حل . چون $f_x=-2x$ و $f_y=2y$ پس تنها نقطه بحرانی تابع نقطه $(0,0)$ است.
توجه داریم که روی محور x ها، $y=0$ است پس برای $x\neq 0$ ، $f(x,y)=-x^2<0$
و روی محور y ها، $x=0$ است پس برای $y\neq 0$ ، $f(x,y)=y^2>0$. در نتیجه برای هر قرص به مرکز $(0,0)$ نقاطی وجود دارند که مقادیر تابع مثبت است و نقاطی وجود دارند که مقادیر تابع در آن نقاط منفی است. یعنی $f(0,0)=0$ نمی‌تواند یک مقدار اکسترمم برای f باشد. بنابراین f دارای مقادیر اکسترمم نیست. چنین نقطه بحرانی را یک نقطه زینی نامیم.



تعریف . یک نقطه بحرانی تابع f که اکسترمم را نتیجه ندهد نقطه زینی نامیده می‌شود.

آزمون مشتق دوم . فرض کنید مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f در قرصی به مرکز (a,b) پیوسته‌اند و $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$. قرار می‌دهیم

$$D=D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$$

الف) اگر $D>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$ آنگاه $f(a,b)$ یک مینیمم موضعی است.

ب) اگر $D>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$ آنگاه $f(a,b)$ یک ماکزیمم موضعی است.

ج) اگر $D<0$ آنگاه $f(a,b)$ یک اکسترمم موضعی نیست.

اثبات. تمرین

مثال. اکسترمم‌های موضعی $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ را بدست آورید.

حل. ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم

$$f_x=4x^3-4y, \quad f_y=4y^3-4x.$$

با مساوی صفر قرار دادن f_x و f_y داریم

$$x^3-y=0, \quad y^3-x=0$$

که ریشه‌های آن $x=0,1,-1$ است. پس نقاط بحرانی $(0,0)$ ، $(1,1)$ و $(-1,-1)$ هستند. از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$f_{xx}=12x^2, \quad f_{yy}=12y^2, \quad f_{xy}=-4$$

$$D(x,y)=144x^2y^2-16$$

چون $D(0,0)=-16<0$ پس $(0,0)$ یک نقطه زینی است. با توجه به $D(1,1)=128>0$ و $f_{xx}(1,1)=12>0$ نتیجه می‌گیریم که $f(1,1)=-1$ یک مینیمم موضعی است. به طور مشابه $D(-1,-1)=128>0$ و $f_{xx}(-1,-1)=12>0$ پس $f(-1,-1)=-1$ نیز یک مینیمم موضعی است.

قضیه مقدار اکسترمم. اگر f روی یک مجموعه بسته و کراندار D در $\mathbb{R}^2$ پیوسته

باشد آن گاه f در نقاطی از D مانند (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مقدار ماکزیمم مطلق خود و مقدار مینیمم مطلق خود را می پذیرد.

پس برای یافتن مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع پیوسته f روی مجموعه بسته و کراندار D در $\mathbb{R}^2$،

الف) مقادیر f را در نقاط بحرانی f در D به دست می آوریم.

ب) مقادیر اکسترمم f روی مرز D را به دست می آوریم.

ج) بزرگترین مقدار در (الف) و (ب) مقدار ماکزیمم مطلق و کوچکترین مقدار در (الف) و (ب) مقدار مینیمم مطلق f روی D است.

ضریب های لاگرانژ

برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)$ نسبت به قید یا شرط $g(x,y,z)=k$ به طریق زیر عمل می کنیم

الف) تمام مقادیر x و y و z و λ را تعیین می کنیم به طوری که

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

ب) f را در تمام نقاط (x,y,z) به دست آمده در (الف) محاسبه می کنیم. بزرگترین مقدار به دست آمده، مقدار ماکزیمم f و کوچکترین مقدار به دست آمده، مقدار مینیمم f است.

اگر هدف یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)$ نسبت به دو قید به صورت $g(x,y,z)=k$ و $h(x,y,z)=c$ باشد، بجای (الف) در بالا تمام مقادیر x, y, z, λ, μ برقرار در شرایط زیر را به دست می آوریم و سپس مشابه (ب) عمل می کنیم.

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y,z) + \mu \vec{\nabla} h(x,y,z) \quad \text{و} \quad g(x,y,z)=k\,,\ h(x,y,z)=c$$

مثال. مقدار ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=x+2y+3z$ روی منحنی فصل مشترک صفحه $x-y+z=1$ و استوانه $x^2+y^2=1$ را به دست آورید.

حل. هدف یافتن ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=x+2y+3z$ نسبت به قیود

$$g(x,y,z)=x-y+z=1$$

$$h(x,y,z)=x^2+y^2=1$$

است. شرط لاگرانژ $\vec{\nabla} f=\lambda\vec{\nabla} g+\mu\vec{\nabla} h$ نتیجه می‌دهد که

(1) $1=\lambda+2x\mu$

(2) $2=-\lambda+2y\mu$

(3) $3=\lambda$

(4) $x-y+z=1$

(5) $x^2+y^2=1$

$\lambda=3$ را در (1) قرار می‌دهیم، داریم $2x\mu=-2$ پس $x=-\frac{1}{\mu}$. به طور مشابه از (2) داریم $y=\frac{5}{2\mu}$. با جایگزینی در (5) داریم

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1$$

پس $\mu=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$. در نتیجه

$$x=\mp\frac{2}{\sqrt{29}},\qquad y=\pm\frac{5}{\sqrt{29}}$$

و از (4) نتیجه می‌شود که $z=1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}$. بنابراین مقادیر f متناظر عبارت است از

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}}+2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right)+3\left(1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right)=3\pm\sqrt{29}$$

بنابراین مقدار ماکزیمم f روی این منحنی برابر

$$3+\sqrt{29}$$

است.