فصل دوم . توابع برداری از متغیر حقیقی

خط و صفحه

یک خط در صفحه xy با داشتن یک نقطه از خط و جهت خط (شیب یا ضریب زاویه) به دست می‌آید. این معادله را معادله نقطه ـ شیب خط می‌نامیم. در فضا نیز وضعیت مشابهی برای خط داریم.

تعریف ۱. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{u}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ بوده و $\vec{u} \neq \vec{0}$ است. خط مستقیم گذرنده از $\vec{a}$ موازی با $\vec{u}$ مجموعه تمام $\vec{x}$ در $\mathbb{R}^3$ است که بتوان آن را توسط

$$\vec{x} = k\vec{u} + \vec{a}, \qquad -\infty < k < \infty \qquad (1)$$

نمایش داد. برحسب مولفه‌ها، اگر $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ باشند، آنگاه

$$x_1 = ku_1 + a_1, \qquad x_2 = ku_2 + a_2, \qquad x_3 = ku_3 + a_3, \quad -\infty < k < \infty \qquad (2)$$

معادله (۱) را معادله برداری خط و معادلات در (۲) را معادلات پارامتری خط نامیم. هرگاه پارامتر k روی خط حقیقی تغییر کند، نقطه $\vec{x}$ خط مورد نظر را مشخص می‌کند. هر بردار وابسته خطی با بردار $\vec{u}$ موازی با خط مورد نظر است.

مثال ۱. معادله پارامتری خط گذرنده از $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ موازی با بردار $\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ را به دست آورید.

حل. فرض کنید $\vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ برداری با نقطه انتهایی (x_1, x_2, x_3) روی خط و ابتدای مبدأ $(0,0,0)$ است. در این صورت

$$\vec{x} = k\vec{u} + \vec{a} = k(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) + (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = (k+1)\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - k\vec{e}_3$$

یا

$$x_1 = k+1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -k \qquad -\infty < k < \infty$$

مثال ۲. فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نقاط متمایزی روی یک خط اند. معادله برداری خط گذرنده از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

حل. چون $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نقاط متمایز روی خط اند پس $\vec{b}-\vec{a}$ برداری ناصفر موازی با خط است. بنابراین معادله خط گذرنده از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت

$$\vec{x} = k(\vec{b}-\vec{a})+\vec{a} \qquad -\infty<k<\infty$$

است. به عبارت دیگر

$$x_1=k(b_1-a_1)+a_1,\quad x_2=k(b_2-a_2)+a_2,\quad x_3=k(b_3-a_3)+a_3,\quad -\infty<k<\infty$$

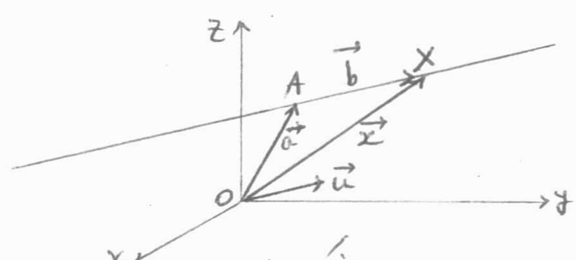
توضیح. فرض کنید $A(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای روی خط L است. در $\mathbb{R}^3$ جهت خط L توسط یک بردار مشخص داده می‌شود، پس فرض کنید $\vec{u}$ برداری موازی خط L است. اگر $X(x,y,z)$ نقطه دلخواهی روی L باشد و $\vec{a}$ و $\vec{x}$ بردارهای موقعیت A و X باشند با فرض اینکه $\vec{b}$ بردار نمایش $\vec{AX}$ است (شکل ۱) آنگاه از قانون مثلث برای جمع برداری داریم

$$\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$$

چون $\vec{b}$ و $\vec{u}$ بردارهای موازی‌اند پس اسکالر k وجود دارد به طوری که $\vec{b}=k\vec{u}$. بنابراین

$$\vec{x}=\vec{a}+k\vec{u}$$

معادله برداری خط L است. متناظر به هر مقدار برای پارامتر k بردار $\vec{x}$ نقطه‌ای روی خط L را مشخص می‌کند.



شکل ۱

اگر $\vec{u}=\langle a,b,c\rangle$ آنگاه $k\vec{u}=\langle ka,kb,kc\rangle$ پس با فرض $\vec{x}=\langle x,y,z\rangle$ و $\vec{a}=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$ معادله برداری به صورت

$$\langle x,y,z\rangle=\langle x_0+ka,\ y_0+kb,\ z_0+kc\rangle$$

بنابراین

$$\begin{cases} x = x_0 + ak \\ y = y_0 + bk \\ z = z_0 + ck \end{cases} \qquad (۳)$$

که این معادلات را معادلات پارامتری خط L گذرنده از نقطه (x_0, y_0, z_0) و موازی با بردار $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ نامیم. هر مقدار برای پارامتر k نقطه (x, y, z) روی L را نتیجه می‌دهد.

مثال ۳. الف) معادله برداری و معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه $(5, 1, 3)$ موازی با بردار $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ را بدست آورید.

ب) دو نقطه دیگر از این خط را تعیین کنید.

حل. الف) داریم $\vec{a} = \langle 5, 1, 3 \rangle$ و $\vec{u} = \langle 1, 2, -1 \rangle$، پس

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) + k(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \\ &= (5+k)\vec{e}_1 + (1+2k)\vec{e}_2 + (3-k)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

معادلات پارامتری عبارتند از

$$x = 5 + k, \qquad y = 1 + 2k, \qquad z = 3 - k.$$

ب) با انتخاب مقدار $k = 1$ برای پارامتر، نقطه $(6, 3, 2)$ نقطه‌ای از خط L است. برای $k = -1$ نقطه $(4, -1, 4)$ از خط را داریم.

نمادگذاری. جهت سهولت و مطابقت با سایر مراجع دستگاه متعامد یکه استاندارد $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ را با $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نمایش می‌دهیم. پس $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ، $\vec{e}_2 = \vec{j}$ ، $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

توضیح. معادله برداری و معادلات پارامتری یک خط منحصر بفرد نیستند. اگر نقطه یا پارامتر را تغییر دهیم یا بردار موازی دیگری انتخاب کنیم آن گاه معادلات تغییر خواهند کرد. به عنوان مثال، اگر در مثال ۳ بجای نقطه $(5, 1, 3)$ نقطه $(6, 3, 2)$ را اختیار کنیم، آن گاه معادلات

پارامتری خط مورد نظر به صورت

$$x = 6 + t, \qquad y = 3 + 2t, \qquad z = 2 - t$$

است. یا اگر با نقطهٔ $(5, 1, 3)$ شروع کنیم اما بردار موازی $2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ را در نظر بگیریم در این صورت معادلات پارامتری خط نظیر

$$x = 5 + 2t, \qquad y = 1 + 4t, \qquad z = 3 - 2t$$

خواهد بود.

تعریف ۳. اگر بردار $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ برای مشخص کردن جهت خط L مورد استفاده قرار گیرد آن گاه اعداد a، b و c را اعداد هادی L نامیم.

چون هر بردار موازی $\vec{v}$ را نیز می‌توانیم به جای $\vec{v}$ اختیار کنیم، پس هر سه عدد متناسب با a، b و c را می‌توان به عنوان اعداد هادی خط نیز به کار برد.

روشی دیگر برای نمایش خط L از حذف پارامتر k یا t از معادلات پارامتری می‌توان به دست آورد.

فرض کنید a، b یا c صفر نباشند، در این صورت معادلات پارامتری را برای پارامتر حل کرده و داریم

$$\frac{x - x_0}{a} = t, \qquad \frac{y - y_0}{b} = t, \qquad \frac{z - z_0}{c} = t.$$

پس

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (۴)$$

این معادلات را معادلات متقارن خط L نامیم.

باید توجه کرد که اعداد a، b و c مشاهده شده در مخرج معادلات (۴) اعداد هادی خط L اند، یعنی مولفه‌های بردار موازی با L. اگر یکی از a، b یا c صفر باشد، با حذف t از معادلات (۳) مجدداً به فرم متقارن خط خواهیم رسید. به عنوان مثال، فرض

کنید $a = 0$، در این صورت معادلات متقارن خط L عبارت است از

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

و نتیجه می‌دهد که خط L در صفحه $x = x_0$ قرار دارد.

مثال ۴. الف) معادلات پارامتری و معادلات متقارن خط گذرنده از نقاط $A(2,4,-3)$ و $B(3,-1,1)$ را به دست آورید.

ب) در چه نقطه‌ای خط با صفحه xy تلاقی دارد.

حل. الف) در اینجا به طور صریح بردار موازی با خط را نداریم، اما مشاهده می‌شود که بردار $\vec{u}$ با نمایش $\overrightarrow{AB}$ موازی خط است و

$$\vec{u} = \langle 3-2, -1-4, 1-(-3) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

بنابراین اعداد هادی عبارتند از $a = 1$، $b = -5$ و $c = 4$. با اختیار نقطه $(2,4,-3)$ داریم

$$x = 2 + t, \quad y = 4 - 5t, \quad z = -3 + 4t \qquad -\infty < t < \infty$$

و معادلات متقارن خط به صورت

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

ب) در محل تلاقی خط با صفحه xy، باید $z = 0$ باشد. پس در معادلات متقارن قرار می‌دهیم $z = 0$ و داریم

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{3}{4}$$

در نتیجه $x = \frac{11}{4}$ و $y = \frac{1}{4}$ پس محل تلاقی خط با صفحه xy نقطه $(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ است.

توضیح. مثال ۴ در حالت کلی نشان می‌دهد که اعداد هادی خط L گذرنده از نقاط (x_0, y_0, z_0) و (x_1, y_1, z_1) عبارتند از $x_1 - x_0$، $y_1 - y_0$ و $z_1 - z_0$ و در نتیجه معادلات متقارن به صورت

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

است.

مثال ۵. نشان دهید خطوط L_1 و L_2 با معادلات پارامتری

$$L_1:\quad x=1+t,\qquad y=-2+3t,\qquad z=4-t$$

$$L_2:\quad x=2s,\qquad y=3+s,\qquad z=-3+4s$$

متنافرند. یعنی متقاطع نیستند و موازی نمی‌باشند (و بنابراین در یک صفحه قرار ندارند).

حل. دو خط L_1 و L_2 موازی نیستند زیرا بردارهای هادی متناظر به دو خط یعنی بردارهای $\langle 1,3,-1\rangle$ و $\langle 2,1,4\rangle$ موازی نمی‌باشند. اگر L_1 و L_2 دارای نقطه اشتراکی باشند باید مقادیری برای t و s وجود داشته باشد به طوری که

$$1+t=2s$$

$$-2+3t=3+s$$

$$4-t=-3+4s$$

اما اگر دو معادله اول را حل کنیم، داریم $t=\frac{11}{5}$ و $s=\frac{8}{5}$، ولی این دو مقدار در معادله سوم صدق نمی‌کنند. پس به ازای هیچ مقداری برای t و هیچ مقداری برای s این سه معادله باهم دارای جواب نمی‌باشند. بنابراین L_1 و L_2 متقاطع نمی‌باشند، یعنی متنافرند.

تعریف ۴. صفحه گذرنده از $\vec{a}$ و موازی با دو بردار مستقل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مجموعه تمام نقاط $\vec{x}$ در $\mathbb{R}^3$ است به طوری که توسط

$$\vec{x}=h\vec{u}+k\vec{v}+\vec{a}\qquad -\infty<h<\infty,\ -\infty<k<\infty \qquad (۵)$$

نمایش داده می‌شوند.

اگر $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$، $\vec{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$، $\vec{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ و $\vec{x}=\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ باشند، آنگاه از معادله برداری صفحه (۵) داریم

$$\langle x_1,x_2,x_3\rangle=\langle hu_1+kv_1+a_1,\ hu_2+kv_2+a_2,\ hu_3+kv_3+a_3\rangle$$

پس معادلات پارامتری صفحه عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 = hu_1 + kv_1 + a_1 \\ x_2 = hu_2 + kv_2 + a_2 \qquad -\infty < h, k < \infty \\ x_3 = hu_3 + kv_3 + a_3 \end{cases} \tag{۶}$$

و اگر پارامترهای h و k در اعداد حقیقی مستقلاً تغییر کنند، بردار ثابت $\vec{x}$ صفحه مورد نظر را نتیجه می‌دهد.

یک بردار موازی با صفحه است، هرگاه این بردار با بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وابسته خطی باشد و گوئیم عمود (نرمال) به صفحه است هرگاه بر هر دوی $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمود باشد.

اگر $\vec{n}$ یک بردار ناصفر نرمال به صفحه $\vec{x} = h\vec{u} + k\vec{v} + \vec{a}$ باشد، آنگاه نقطه $\vec{x}$ روی صفحه قرار دارد اگر و تنها اگر $\vec{x} - \vec{a}$ عمود بر $\vec{n}$ باشد، یا

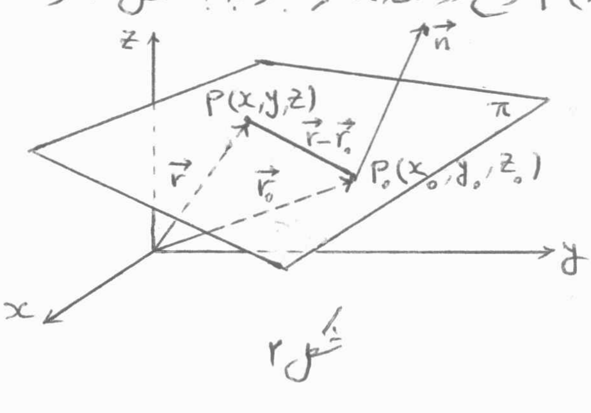
$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{۷}$$

برحسب مولفه‌های $\vec{x}$ ، $\vec{a}$ و n داریم:

$$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)n_2 + (x_3 - a_3)n_3 = 0 \tag{۸}$$

که در آن $\vec{n} = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ است.

در دستگاه مختصات استاندارد $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ که به طور مختصر فضای xyz نامیده می‌شود اگر $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای در صفحه π با بردار عمود (نرمال) $\vec{n}$ باشد، می‌توان شکل هندسی تمام نقاط $P(x, y, z)$ واقع در صفحه π را با توجه به شکل ۲ و معادله (۸) به دست آورد.



شکل ۲

چون $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و $P(x,y,z)$ واقع در صفحه π قرار دارند، پس بردار $\overrightarrow{P_0P}$ که بردار مکان $\vec{r}-\vec{r_0}$ در صفحه قرار دارند در نتیجه بر بردار $\vec{n}$ عمود است. یعنی

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})=0$$

یا $\vec{n}\cdot\vec{r}=\vec{n}\cdot\vec{r_0}$. برحسب مولفه‌ها داریم $\vec{r_0}=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$ و $\vec{r}=\langle x,y,z\rangle$ پس با فرض $\vec{n}=\langle a,b,c\rangle$ نتیجه می‌شود

$$\langle a,b,c\rangle\cdot\langle x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\rangle=0$$

یا

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (۹)$$

مثال ۹. معادله صفحه گذرنده از نقطه $(2,4,-1)$ با بردار نرمال $\vec{n}=\langle 2,3,4\rangle$ را به دست آورید. محل تلاقی صفحه با محورهای مختصات را تعیین کرده و آن را رسم کنید.

حل. در معادله (۹) قرار می‌دهیم

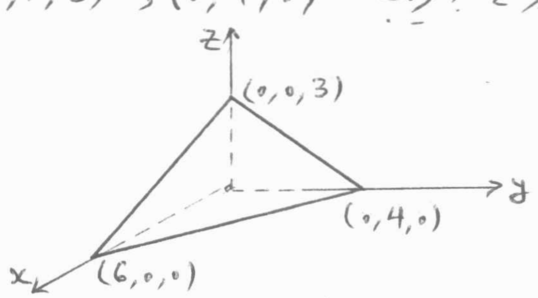
$$a=2,\ b=3,\ c=4,\ x_0=2,\ y_0=4,\ z_0=-1$$

پس معادله صفحه مورد نظر عبارت است از

$$2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0$$

$$2x+3y+4z=12$$

برای یافتن محل برخورد با محور xها، قرار می‌دهیم $y=z=0$ و داریم $x=6$. به طور مشابه محل برخورد با محور y و محور z به ترتیب $(0,4,0)$ و $(0,0,3)$ است.



شکل ۲

(b_1, b_2, b_3), (c

$\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{a}$

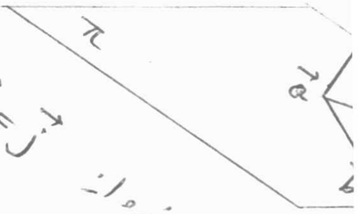
$(\vec{b}-\vec{a})\times$

$\vec{c}$, $\vec{b}$,

$[(\vec{x}-\vec{a})(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}$

$=\vec{i}$

$\vec{a}=\vec{j}$



$=h\vec{u}+k\vec{v}+\vec{a}$

$(h-k)\vec{i}+\vec{j}+k\vec{k}$

$[-1)(\Delta)$

$x_3=k$

$-\infty<h,k<\infty$

$-\infty<h,k<\infty$

-1

0

$=0$

$x_2-1=0$

حال معادله (۹) را در نظر بگیرید. با ساده کردن طرف چپ معادله داریم

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

قرار دهید $d=ax_0+by_0+cz_0$ ،

$$ax+by+cz=d \qquad (11)$$

معادله (۱۱) را معادله خطی صفحه برحسب x ، y و z نامند. همان گونه که دیده می شود در معادله (۱۱) به ازای هر مقدار دلخواه برای دو متغیر، مثلا x و y مقدار متغیر سوم حاصل می شود به طوری که نقطه (x,y,z) حاصل، بر صفحه مورد نظر قرار دارد. به این ترتیب در معادله (۱۱) دو متغیر مستقل اند و متغیر سوم، تابعی از دو متغیر مستقل می باشد. این معادله ساده ترین نوع تابع از دو متغیر را نتیجه می دهد. پس اگر قرار دهیم، با فرض $c\neq 0$

$$f(x,y)=\frac{d}{c}-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y$$

در این صورت $z=f(x,y)$ حاصل می شود. در فصل های بعد، تمرکز کتاب بر این نوع توابع است.

در ادامه فصل حاضر، ابتدا به برخی مفاهیم توپولوژیک در $\mathbb{R}^3$ پرداخته و سپس توابعی از بردارها را در نظر می گیریم.

همسایگی ها

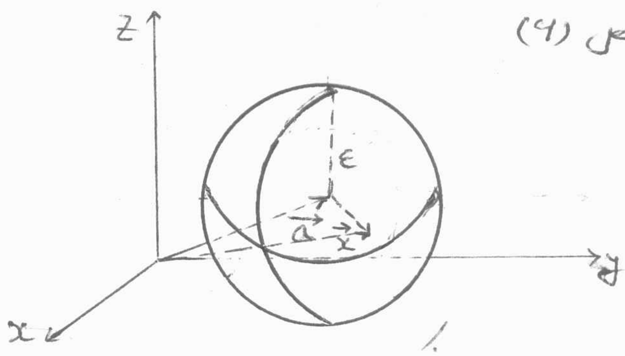
خواص موضعی توابع برحسب مفهوم یک همسایگی کروی شرح داده می شود.

تعریف ۵. یک ε-کره باز یا یک ε همسایگی کروی از بردار $\vec{a}$ که با $S_\varepsilon(\vec{a})$ نمایش داده می شود مجموعه تمام بردارهای $\vec{x}$ است به طوری که $\|\vec{x}-\vec{a}\|<\varepsilon$.

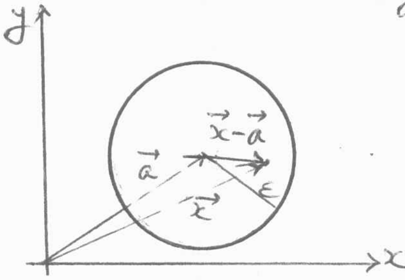
$$S_\varepsilon(\vec{a})=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}-\vec{a}\|<\varepsilon\}$$

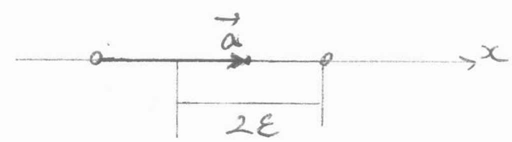
همان گونه که در شکل (۵) دیده می شود، نقطه $\vec{x}$ در $S_\varepsilon(\vec{a})$ است اگر و تنها اگر $\vec{x}$ در درون کره ای به شعاع ε و مرکز $\vec{a}$ باشد. در $\mathbb{R}^2$ ، $S_\varepsilon(\vec{a})$ درون دایره ای

به شعاع ε و مرکز $\vec{a}$ است و در $\mathbb{R}^1$ ، $S_\varepsilon(\vec{a})$ فاصله بازی به طول 2ε با مرکز $\vec{a}$ است. شکل (۶)



شکل ۵





شکل ۶

در بیشتر مواقع، همسایگی کروی $\vec{a}$ به شعاع ε را بدون نقطه $\vec{a}$ اختیار می‌کنیم. $S_\varepsilon(\vec{a})$ بدون $\vec{a}$ را ε-همسایگی کروی محذوف نامیم و با $S'_\varepsilon(\vec{a})$ نمایش می‌دهیم. چون $\|\vec{x}-\vec{a}\|=0$ اگر و تنها اگر $\vec{x}=\vec{a}$ باشد، پس $S'_\varepsilon(\vec{a})$ شامل بردارهای $\vec{x}$ است به طوری که $0<\|\vec{x}-\vec{a}\|<\varepsilon$

مثال ۸. $\frac{1}{10}$-همسایگی کروی بردار $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ را بدست آورید.

حل. $S_{\frac{1}{10}}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$ شامل بردارهای $\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$ برقرار در شرط زیر است:

$$\|\vec{x}-\vec{a}\|=\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2\right)^{1/2}<\frac{1}{10}$$

یا

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2<\frac{1}{100}$$

توابع برداری

توابعی که تاکنون دیده‌ایم، توابعی با متغیر حقیقی و مقادیر حقیقی بوده‌اند. اکنون به توابعی توجه داریم که مقادیر آن‌ها بردار می‌باشند.

تعریف ۹: تابع $\vec{f}: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ که متناظر به هر عدد حقیقی t در S بردار $\vec{f}(t)$ در $\mathbb{R}^3$ را به دست می‌دهد یک تابع برداری نامیده می‌شود. باید توجه کرد که $S \subseteq \mathbb{R}$. معمولاً این توابع را با حروف $\vec{f}$، $\vec{g}$، ... نمایش می‌دهند. مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}$ را دامنه تعریف $\vec{f}$ نامند و مجموعه تمام بردارهای متناظر بر دامنه تعریف S را با $\vec{f}(S)$ نمایش داده و آن را تصویر $\vec{f}$ گویند.

چون $\vec{f}(t)$ برداری در $\mathbb{R}^3$ است، داریم

$$\vec{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle$$

که در آن $f_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ برای $i = 1, 2, 3$ توابعی حقیقی با مقادیر حقیقی‌اند.

مثال ۹. فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای ثابتی در فضا هستند. معادله

$$\vec{f}(t) = \vec{a} - 2t\vec{b} + t^2\vec{c} \qquad -2 \le t \le 2$$

یک تابع برداری با متغیر t در دامنه $-2 \le t \le 2$ تعریف می‌کند. به عنوان مثال به ازای مقادیری از t بردارهای زیر را داریم.

t	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$\vec{f}(t)$	$\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$	$\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$	$\vec{a}$	$\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$	$\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$	$\vec{a}-4\vec{b}+4\vec{c}$

مثال ۱۰. در مثال ۹، فرض کنید $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$، $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{k}$. در این صورت

$$\vec{f}(t) = (\vec{i} + 2\vec{j}) - 2t(\vec{j} - \vec{k}) + t^2(\vec{i} - \vec{k}) = (1+t^2)\vec{i} + (2-2t)\vec{j} + (2t-t^2)\vec{k}$$

به عبارت دیگر $\vec{f}$ برحسب سه تابع اسکالر $f_1(t) = 1 + t^2$، $f_2(t) = 2 - 2t$، $f_3(t) = 2t - t^2$

شرح داده می‌شود که مولفه‌های آن نسبت به پایه $(\vec{k},\vec{j},\vec{i})$ می‌باشند.

همان‌گونه که بیان شد، تابع برداری $\vec{f}(t)$ از متغیر حقیقی t تعریف شده بر دامنه S به‌طور منحصربفرد توسط سه تابع اسکالر $f_1(t)$، $f_2(t)$، $f_3(t)$، به عنوان توابع مولفه‌ای نسبت به پایه استاندارد $(\vec{k},\vec{j},\vec{i})$ تعریف می‌شود. برعکس، سه تابع اسکالر $f_1(t)$، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ بر دامنه مشترک S به طور منحصربفرد یک تابع برداری به صورت

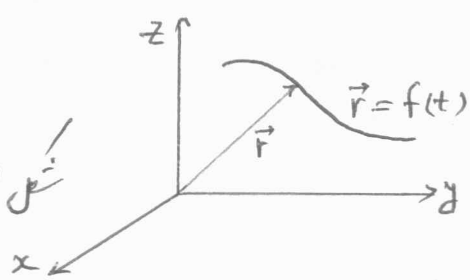
$$\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$$

روی دامنه S را به دست می‌دهند.

توابع برداری برای تعریف منحنی‌ها بکار برده می‌شوند. فرض کنید $\vec{r}=\vec{f}(t)$ داده شده است. وقتی t تغییر می‌کند، نقطه $\vec{r}$ روی یک منحنی اثر می‌گذارد (شکل ۷). معادله $\vec{r}=\vec{f}(t)$ یا به صورت مولفه‌ای، سه معادله اسکالر

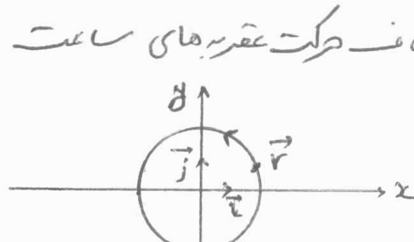
$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)$$

نمایش پارامتری منحنی نامیده می‌شوند و متغیر t پارامتر است.



شکل ۷

مثال ۱۱. معادله $\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$ یا $x=a\cos t$، $y=a\sin t$ برای $a>0$ و $0\le t\le 2\pi$ نمایش پارامتری دایره‌ای به شعاع a حول مبدا است. وقتی t در فاصله $[0,2\pi]$ صعود می‌کند، دایره در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، همان‌گونه که در شکل ۸ دیده می‌شود، پیموده خواهد شد.

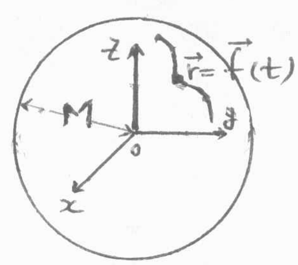


شکل ۸

توضیح. معمولاً فرض بر این است که توابع روی فواصل تعریف شده اند. این فواصل شامل فواصل باز و بسته، ($a<t<b$ ، $a\le t\le b$) فواصل نیمه باز ($a\le t<b$, $a<t\le b$) و فواصل نامتناهی ($-\infty<t<\infty$ ، $a\le t<\infty$ ، $-\infty<t<a$ و غیره) می باشند.

توابع کراندار

تعریف ۷. تابع $\vec{r}=\vec{f}(t)$ بر فاصله I کراندار نامیده می شود، هرگاه اسکالر $M>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر t در I ، $\|\vec{f}(t)\|\le M$. در شکل ۹ دیده می شود که اگر $\vec{r}=\vec{f}(t)$ روی I کراندار باشد آنگاه کره ای به شعاع M حول مبداء وجود دارد به طوری که برای هر t در I نقطه $\vec{r}$ در کره قرار دارد و برعکس.

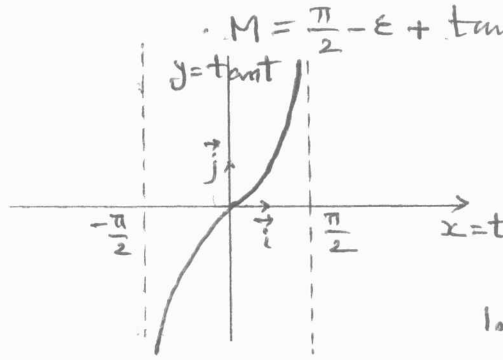


شکل ۹

مثال ۱۲. منحنی پیموده شده توسط $\vec{r}=t\vec{i}+(\tan t)\vec{j}$ برای $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. مشاهده می شود که $\|\vec{r}\|$ برای t نزدیک به $\frac{\pi}{2}$ به دلخواه بزرگ می شود. بنابراین $\vec{r}$ روی $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ کراندار نیست. توجه کنید که $\vec{r}$ روی فاصله $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<t<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ برای $\varepsilon>0$ دلخواه کراندار است، زیرا برای t در $(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$ داریم

$$\|\vec{r}\|=\|t\vec{i}+(\tan t)\vec{j}\|\le |t|\,\|\vec{i}\|+|\tan t|\,\|\vec{j}\|\le |t|+|\tan t|\le M$$

که در آن $M=\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$.



شکل ۱۰

تعریف ۸. تابع $\vec{r} = \vec{f}(t)$ در $t=t_0 \in D_{\vec{f}}$ کراندار نامیده می‌شود هرگاه $\varepsilon>0$ موجود باشد به طوری که $\vec{r}=\vec{f}(t)$ برای هر t در $S_\varepsilon(t_0)$ کراندار است. یا به طور معادل $\vec{f}(t)$ در t_0 کراندار است هرگاه $M>0$ و $\varepsilon>0$ موجود باشند به طوری که اگر $|t-t_0|<\varepsilon$ آن گاه $\|\vec{f}(t)\|\le M$. به عبارت دیگر تابع $\vec{r}=\vec{f}(t)$ در $t=t_0$ کراندار است هرگاه

$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall t\in S_\varepsilon(t_0)\ ,\ \vec{f}(t) \text{ is bdd.}$$

یا

$$\exists M>0\ ,\ \exists \varepsilon>0 \quad \text{s.t} \quad |t-t_0|<\varepsilon \Rightarrow \|\vec{f}(t)\|\le M.$$

توضیح اگر $\vec{r}=\vec{f}(t)$ بر فاصله I تعریف شده و کراندار باشد آن گاه $\vec{f}(t)$ برای هر t_0 در I کراندار است. اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. در مثال ۱۲ دیده می‌شود که تابع $\vec{f}(t)$ در هر t_0 از فاصله $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کراندار است اما روی فاصله فوق کراندار نیست.

در فصل ۶ به خواص توپولوژیک دیگری از فضاهای اقلیدسی خواهیم پرداخت. در ادامه فصل به برخی از خواص حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری از متغیر حقیقی نظر می‌کنیم که در ادامه مباحث مورد نیاز است.

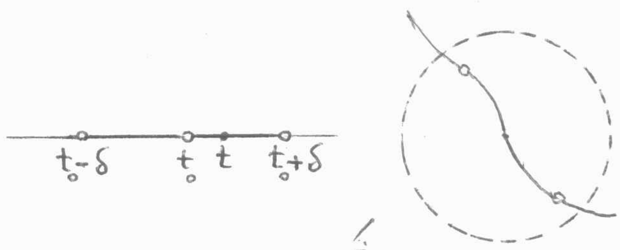
حد

تعریف ۹. تابع برداری $\vec{r}=\vec{f}(t)$ از متغیر حقیقی t را در نظر بگیرید. گوییم $\vec{f}(t)$ دارای حد $\vec{L}$ است وقتی که t به t_0 میل می‌کند و می‌نویسیم $\vec{f}(t)\to\vec{L}$ وقتی $t\to t_0$ یا $\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{L}$ هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\delta>0$ (وابسته به ε) موجود باشد به طوری که برای هر t در $S'_\delta(t_0)$ بردار $\vec{f}(t)$ در $S_\varepsilon(\vec{L})$ باشد، یعنی

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \text{s.t.} \quad t\in S'_\delta(t_0) \Rightarrow \vec{f}(t)\in S_\varepsilon(\vec{L})$$

همان گونه که در شکل ۱۱ دیده می‌شود، $\lim_{t\to t_0}\vec{r}=\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{L}$ اگر و تنها اگر برای هر کره باز $S_\varepsilon(\vec{L})$

حول $\vec{L}$ به شعاع $\varepsilon>0$ بتوان فاصله باز محذوف $S'_\delta(t_0)$ حول t_0 به شعاع $\delta>0$ یافت به طوری که برای t در $S'_\delta(t_0)$ بردار $\vec{f}(t)$ در $S_\varepsilon(\vec{L})$ باشد.



شکل ۱۱

توجه داریم که وجود حد در t_0 یک خاصیت موضعی تابع است که تنها وابسته به طبیعت تابع در همسایگی محذوف t_0 می‌باشد. علاوه بر آن، $\vec{f}(t)$ لزوماً در t_0 تعریف نشده است. برای مثال، دامنه تعریف تابع می‌تواند فاصله باز $a<t<t_0$ باشد.

مثال ۱۳. فرض کنید $\vec{f}(t)=\vec{a}=$ ثابت است. در این صورت برای هر t_0

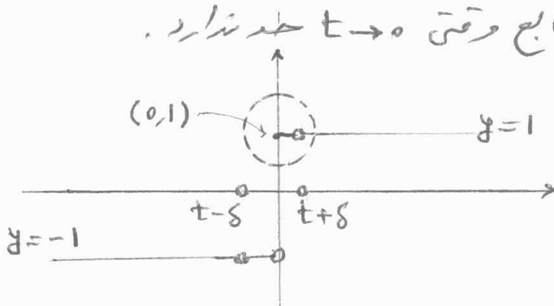
$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{a}$$

زیرا در هر همسایگی $S_\varepsilon(\vec{a})$ به ازای هر t داریم $\vec{f}(t)=\vec{a}$ و در نتیجه به ازای هر t_0 می‌توان همسایگی $S_\delta(t_0)$ با $\delta\le\varepsilon$ را اختیار کرد.

مثال ۱۴. تابع

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=\begin{cases} t\vec{i}+\vec{j} & t\geq 0\\ t\vec{i}-\vec{j} & t<0\end{cases}$$

داده شده است. بین $x=f_1(t)=t$ و $y=f_2(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ -1 & t<0\end{cases}$ همان‌گونه که در شکل ۱۲ نمایش داده شده است، تابع وقتی $t\to 0$ حد ندارد.



شکل ۱۲

زیرا برای هر نقطه $\vec{L}$ همسایگی $S_\varepsilon(\vec{L})$ که هر دو خط $x=1$ و $y=-1$ با هم قطع نکنند، وجود دارد. (برای مثال، $S_{1/2}(0,1)$ شامل هیچ نقطه‌ای روی $y=-1$ نیست). در نتیجه برای چنین $S_\varepsilon(\vec{L})$ عدد $\delta>0$ وجود ندارد به طوری که اگر $0<|t|<\delta$ باشد آنگاه $\vec{r}=\vec{f}(t)$ در $S_\varepsilon(\vec{L})$ قرار گیرد. چون $\vec{L}$ دلخواه است پس حدی موجود نیست. از طرف دیگر تابع برای داده شده برای هر انتخاب دیگری از t_0 بجز صفر دارای حد است، برای مثال وقتی که $t\to \frac{1}{2}$ تابع دارای حد $\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}$ است.

یادآوری می‌کنیم که اگر تابع اسکالر $g(t)$، $\lim_{t\to t_0} g(t)=0$ به معنای آن است که

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \text{s.t.} \ t\in S'_\delta(t_0) \Rightarrow |g(t)|<\varepsilon$$

حال اگر قرار دهیم $g(t)=\|\vec{f}(t)-\vec{L}\|$ آنگاه $|g(t)|=\|\vec{f}(t)-\vec{L}\|<\varepsilon$ اگر و تنها اگر $\vec{f}(t)$ در $S_\varepsilon(\vec{L})$ باشد. پس قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱. $\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{L}$ اگر و تنها اگر $\lim_{t\to t_0}\|\vec{f}(t)-\vec{L}\|=0$.

مثال ۱۵. $\lim_{t\to 1}(t^2\vec{i}-(t+1)\vec{j})=\vec{i}-2\vec{j}$ زیرا

$$\lim_{t\to 1}\|\vec{f}(t)-\vec{L}\|=\lim_{t\to 1}\|(t^2-1)\vec{i}-(t-1)\vec{j}\|$$
$$=\lim_{t\to 1}\left[(t^2-1)^2+(t-1)^2\right]^{1/2}=0$$

حال فرض کنید $\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{L}$. در این صورت برای $\varepsilon>0$ دلخواه، عدد $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای $t\in S'_\delta(t_0)$ داریم $\|\vec{f}(t)-\vec{L}\|<\varepsilon$. بنابراین برای $t\in S_\delta(t_0)$

$$\|\vec{f}(t)\|=\|\vec{f}(t)-\vec{L}+\vec{L}\|\le\|\vec{f}(t)-\vec{L}\|+\|\vec{L}\|\le M$$

که در آن $M=\max\{\varepsilon, \|\vec{f}(t_0)-L\|\}+\|\vec{L}\|$. پس قضیه زیر را داریم

قضیه ۲. اگر $\vec{f}(t)$ وقتی $t\to t_0$ دارای حد باشد آنگاه $\vec{f}(t)$ در t_0 کراندار است.

قضیه ۳. تابع برداری $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ را در نظر بگیرید. تابع برداری $\vec{f}(t)$ در t_0 دارای حد است اگر و تنها اگر توابع مولفه‌ای $f_1(t)$ ، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ در t_0 دارای حد باشند و در این حالت داریم

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to t_0} f_2(t)\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to t_0} f_3(t)\right)\vec{k}$$

اثبات. فرض کنید

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = L_i \qquad i=1,2,3.$$

در این صورت قرار می‌دهیم $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$ و

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \|\vec{f}(t) - \vec{L}\| &= \lim_{t\to t_0} \|(f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}) - (L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k})\| \\
&= \lim_{t\to t_0} \left[(f_1(t)-L_1)^2 + (f_2(t)-L_2)^2 + (f_3(t)-L_3)^2\right]^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

پس $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ (طبق قضیه ۱). عکس عبارت بالا نیز برقرار است.

مثال ۱۶.

$$\lim_{t\to 0}((\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + t\vec{k}) = \left(\lim_{t\to 0} \sin t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to 0} \cos t\right)\vec{j} + \left(\lim_{t\to 0} t\right)\vec{k}$$
$$= \vec{j}$$

مثال ۱۷. فرض کنید $\vec{f}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j}$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(2+h) - \vec{f}(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{((2+h)^2\vec{i} + (2+h)\vec{j}) - (4\vec{i} + 2\vec{j})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{((2+h)^2 - 4)\vec{i}}{h} + \frac{h\vec{j}}{h}\right] \\
&= 4\vec{i} + \vec{j}
\end{aligned}$$

قضیه ۴. فرض کنید $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ آنگاه $\lim_{t\to t_0} \|\vec{f}(t)\| = \|\vec{L}\|$.

اثبات. فرض کنید $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ و $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$.

در این صورت

$$\lim_{t\to t_0}\|\vec f(t)\| = \lim_{t\to t_0}\left[f_1^2(t)+f_2^2(t)+f_3^2(t)\right]^{1/2}$$
$$=\left[\left(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\right)^2+\left(\lim_{t\to t_0} f_2(t)\right)^2+\left(\lim_{t\to t_0} f_3(t)\right)^2\right]^{1/2}$$
$$=\left[L_1^2+L_2^2+L_3^2\right]^{1/2}=\|\vec L\|.$$

نکته. عکس قضیه ۴ لزوماً برقرار نیست. یعنی $\|\vec f(t)\|$ می‌تواند دارای حد باشد ولی $\vec f(t)$ حد نداشته باشد. به شکل ۱۴ مراجعه شود.

قضیه ۵. فرض کنید $\lim_{t\to t_0}\vec f(t)=\vec L$ ، $\lim_{t\to t_0}\vec g(t)=\vec M$ و $\lim_{t\to t_0} h(t)=N$ ، در این صورت

الف) $\lim_{t\to t_0}(\vec f(t)+\vec g(t))=\lim_{t\to t_0}\vec f(t)+\lim_{t\to t_0}\vec g(t)=\vec L+\vec M$

ب) $\lim_{t\to t_0}(h(t)\vec g(t))=\lim_{t\to t_0}h(t)\lim_{t\to t_0}\vec g(t)=N\vec M$

ج) اگر $N\neq 0$ آنگاه

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec f(t)}{h(t)}=\frac{\lim_{t\to t_0}\vec f(t)}{\lim_{t\to t_0}h(t)}=\frac{\vec L}{N}$$

د) $\lim_{t\to t_0}(\vec f(t)\cdot\vec g(t))=\lim_{t\to t_0}\vec f(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\vec g(t)=\vec L\cdot\vec M$

ه) $\lim_{t\to t_0}(\vec f(t)\times\vec g(t))=\lim_{t\to t_0}\vec f(t)\times\lim_{t\to t_0}\vec g(t)=\vec L\times\vec M$

و) اگر $\lim_{t\to t_0}\vec f(t)=\vec f(t_0)$ و $\lim_{\theta\to\theta_0}h(\theta)=t_0$ آنگاه

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\vec f(h(\theta))=\vec f\left(\lim_{\theta\to\theta_0}h(\theta)\right)=\vec f(t_0)$$

اثبات. تمرین.

قضیه ۶. فرض کنید $\lim_{t\to t_0}\vec f(t)=\vec L$ ، $\lim_{t\to t_0}\vec g(t)=\vec M$ و $\lim_{t\to t_0}\vec h(t)=\vec N$. در این صورت

$$\lim_{t\to t_0}[\vec f(t)\,\vec g(t)\,\vec h(t)]=[\vec L\,\vec M\,\vec N]$$

اثبات. با استفاده از قسمتهای (د) و (ه) قضیه ۵ داریم.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}[\vec{f}(t)\,\vec{g}(t)\,\vec{h}(t)] &= \lim_{t\to t_0}\left(\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)\times\vec{h}(t)\right)\\ &= \lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\left(\vec{g}(t)\times\vec{h}(t)\right)\\ &= \lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\vec{g}(t)\times\lim_{t\to t_0}\vec{h}(t)\\ &= \vec{L}\cdot\vec{M}\times\vec{N}\\ &= [\vec{L}\vec{M}\vec{N}].\end{aligned}$$

پیوستگی

تعریف ۱۰. فرض کنید تابع برداری $\vec{r}=\vec{f}(t)=\langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$ ازای اتر (متغیر) t در $t=t_0$ تعریف شده است. گوییم $\vec{f}(t)$ در t_0 پیوسته است درصورتی که برای هر $\varepsilon>0$ داده شده، عدد $\delta>0$، وابسته به ε و t_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر t در $S_\delta(t_0)$، داشته باشیم $\vec{f}(t)\in S_\varepsilon(\vec{f}(t_0))$. یا به طور معادل $\vec{f}(t)$ در t_0 پیوسته است هرگاه

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0) \qquad (۱۲)$$

تابع $\vec{f}(t)$ روی I پیوسته است، هرگاه در هر $t=t_0$ متعلق به I پیوسته باشد.

با توجه به قضیه ۳، $\vec{f}(t)$ پیوسته است اگر و تنها اگر توابع مولفه ای $f_i(t)$ برای $i=1,2,3$ پیوسته باشند. علاوه بر آن، از (الف) تا (و) قضیه ۵ نتیجه می شود که مجموع، حاصل ضرب اسکالر و برداری توابع پیوسته، پیوسته است. همچنین ترکیب تابع پیوسته با تابع برداری پیوسته، پیوسته است.

نهایتاً، عبارت (۱۲) معادل است با

$$\lim_{t\to t_0}(\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0))=\vec{0}$$

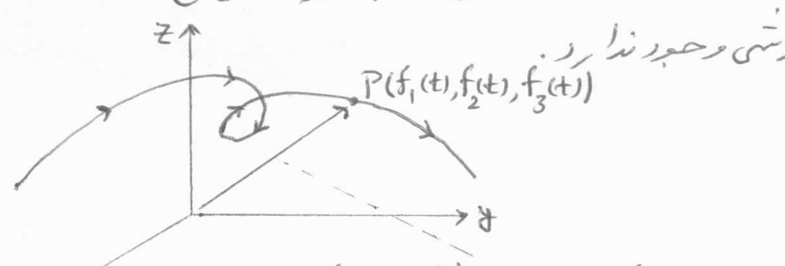
یا با فرض $h=t-t_0$،

$$\lim_{h\to 0}(\vec{f}(t_0+h)-\vec{f}(t_0))=\vec{0}$$

توضیح. ارتباط نزدیکی بین توابع برداری پیوسته و منحنی های فضایی وجود دارد. فرض کنید f_1، f_2 و f_3 توابع با مقادیر حقیقی پیوسته روی فاصله I باشند. در این صورت مجموعه C شامل تمام نقاط (x, y, z) در فضا که در آن

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t) \qquad (۱۳)$$

و t در فاصله I تغییر می کند را یک منحنی فضایی نامیده می شود. معادلات (۱۵) را معادلات پارامتری C و t پارامتر نامیده می شود. می توان C را به عنوان اثر حرکت یک ذره متحرک با موقعیت $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ در زمان t در نظر گرفت. حال اگر تابع برداری $\vec{r} = \vec{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$ را در نظر بگیریم، آنگاه $\vec{f}(t)$ بردار موقعیت نقطه $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ روی C است. بنابراین هر تابع برداری پیوسته $\vec{f}$ یک منحنی فضایی C را تعریف می کند (شکل ۱۴). پیوستگی تابع برداری $\vec{f}$ به معنای این است که روی C پرشی وجود ندارد.



شکل ۱۳

مثال ۱۷. منحنی تعریف شده توسط تابع برداری

$$\vec{f}(t) = \langle 1+t,\ 2+5t,\ -1+6t\rangle$$

را شرح دهید.

حل. معادلات پارامتری منحنی به صورت

$$x = 1+t, \qquad y = 2+5t, \qquad z = -1+6t$$

است که خط گذرنده از نقطه $(1, 2, -1)$ موازی با بردار $\langle 1, 5, 6\rangle$ می باشد. می توان آن را به صورت $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ نوشت که در آن $\vec{r} = \langle x, y, z\rangle$، $\vec{r}_0 = \langle 1, 2, -1\rangle$ و $\vec{v} = \langle 1, 5, 6\rangle$.

مثال ۱۸. فرض کنید $\vec{F}(t)=\vec{a}+\vec{b}t+\vec{c}t^2$ که در آن $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای ثابت هستند. چون

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\lim_{t\to t_0}(\vec{a}+\vec{b}t+\vec{c}t^2)=\vec{a}+\vec{b}t_0+\vec{c}t_0^2=\vec{F}(t_0)$$

پس $\vec{F}(t)$ برای هر t پیوسته است.

مثال ۱۹. فرض کنید

$$\vec{F}(t)=\begin{cases}\frac{t^2-1}{t-1}\vec{i}+t^3\vec{j} & t\neq 1\\ 2\vec{i}+\vec{j} & t=1\end{cases}$$

نشان دهید $\vec{F}(t)$ برای هر t پیوسته است.

حل. فرض کنید $t_0\neq 1$ ،

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\vec{i}+t^3\vec{j}\right)=\frac{t_0^2-1}{t_0-1}\vec{i}+t_0^3\vec{j}=\vec{F}(t_0)$$

برای $t_0=1$ ،

$$\lim_{t\to 1}\vec{F}(t)=\lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\vec{i}+t^3\vec{j}\right)=\lim_{t\to 1}\left((t+1)\vec{i}+t^3\vec{j}\right)$$
$$=2\vec{i}+\vec{j}=\vec{F}(1).$$

مثال ۲۰. تابع

$$\vec{F}(t)=\begin{cases}t\vec{i}+\vec{j} & t\geqslant 0\\ t\vec{i}-\vec{j} & t<0\end{cases}$$

در مثال ۱۴ را در نظر بگیرید. در پیوستگی تابع $\vec{F}(t)$ بحث کنید.

حل. اگر $t_0>0$ آنگاه

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\lim_{t\to t_0}t\vec{i}+\vec{j}=t_0\vec{i}+\vec{j}=\vec{F}(t_0)$$

اگر $t_0<0$ آنگاه

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\lim_{t\to t_0}t\vec{i}-\vec{j}=t_0\vec{i}-\vec{j}=\vec{F}(t_0)$$

بنابراین برای هر $t\neq 0$ تابع $\vec{F}(t)$ پیوسته است. برای $t_0=0$ داریم

$$\lim_{t\to 0^+}\vec{F}(t)=\lim_{t\to 0^+}t\vec{i}+\vec{j}=\vec{j}\neq-\vec{j}=\lim_{t\to 0^-}t\vec{i}-\vec{j}=\lim_{t\to 0^-}\vec{F}(t)$$

پس $\vec{F}$ در $t=0$ پیوسته نیست.

مثال ۲۱. منحنی حاصل از تابع برداری $\vec{f}(t)=2\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ را رسم کنید.

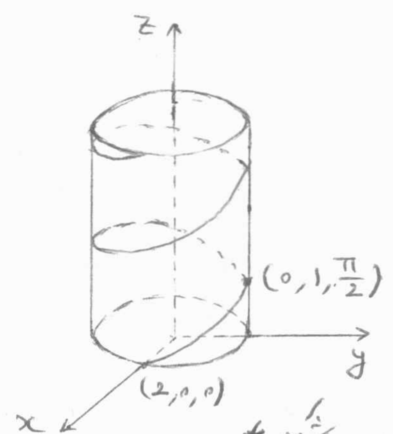
حل. معادلات پارامتری این منحنی عبارتند از

$$x=2\cos t,\qquad y=\sin t,\qquad z=t$$

چون

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

پس منحنی روی استوانهٔ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ قرار دارد، چون $z=t$ است، این منحنی اطراف استوانه با افزایش t می‌پیچد. منحنی در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. این منحنی را یک مارپیچ نامیم.

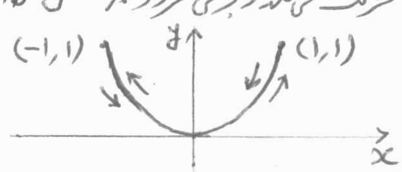


شکل ۱۴

منحنی‌های سطح را نیز با نماد برداری نمایش داد. به عنوان مثال، منحنی به معادلات پارامتری $x=\sin t$ و $y=\sin^2 t$ را می‌توان توسط معادلهٔ برداری

$$\vec{f}(t)=\langle \sin t,\sin^2 t\rangle=\sin t\,\vec{i}+\sin^2 t\,\vec{j}$$

نمایش داد که در آن $\vec{i}=\langle 1,0\rangle$ و $\vec{j}=\langle 0,1\rangle$. مشاهده می‌شود که $y=x^2$ پس نقاط (x,y) روی سهمی $y=x^2$ حرکت می‌کند. اما با توجه به اینکه $-1\le \sin t\le 1$ داریم $-1\le x\le 1$ پس معادلات پارامتری تنها قسمتی از سهمی برای $-1\le x\le 1$ را نمایش می‌دهد. از طرفی با توجه به تناوبی بودن $\sin t$، نقطهٔ $(x,y)=(\sin t,\sin^2 t)$ به تعداد نامتناهی بار از نقطهٔ $(-1,1)$ تا $(1,1)$ حرکت می‌کند و برمی‌گردد. (شکل ۱۵)



شکل ۱۵

مشتق توابع برداری

تعریف ۱۱. فرض کنید $\vec{f}(t)=\langle f_1(t), f_2(t), f_3(t)\rangle$ یک تابع برداری است و t_0 در دامنه تعریف مشترک توابع f_1 و f_2 و f_3 است. به عبارت دیگر t_0 در دامنه تعریف تابع برداری $\vec{f}(t)$ است. گوییم تابع $\vec{f}$ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر است، هرگاه حد زیر موجود باشد

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0} \qquad (۱۴)$$

در این حالت مقدار حد را با $\vec{f}'(t_0)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\vec{f}'(t_0)$ موجود باشد با جانشانی $t=t_0+\Delta t$ در (۱۴) داریم

$$\vec{f}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t} \qquad (۱۵)$$

با توجه به رابطه (۱۵)، دیده می‌شود که عبارت حد تنها وابسته به Δt است. پس می‌توان تعریف مشتق تابع برداری $\vec{f}(t)$ را در هر t متعلق به دامنه تعریف تابع به صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۱۲. گوییم تابع برداری $\vec{f}(t)$ در نقطه t از دامنه تعریف تابع مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)}{\Delta t} \qquad (۱۶)$$

در صورت وجود حد مقدار آن را با $\vec{f}'(t)$ نمایش می‌دهیم.

همان‌گونه که دیده می‌شود حاصل حد (۱۶) در صورت وجود، تابعی از متغیر t است. آن را تابع مشتق نامیم. تابع مشتق از تابع برداری $\vec{f}(t)$، خود تابعی برداری است، گاهی اوقات از نماد لایب‌نیتز برای نمایش مشتق $\vec{f}(t)$ استفاده می‌کنیم و $\vec{f}'(t)$ را با $\frac{d\vec{f}}{dt}$ نمایش می‌دهیم.

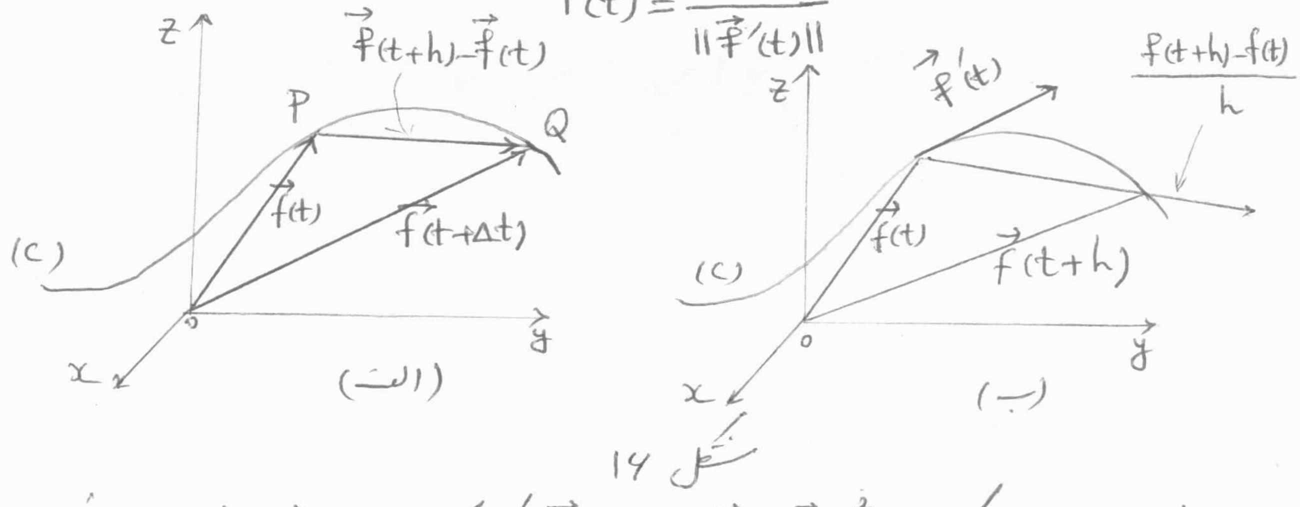
با توجه به تابع مشتق، می‌توان از مشتق‌پذیری این تابع برداری صحبت کرد. در صورت وجود مشتق تابع برداری مشتق آن را مشتق دوم $\vec{f}(t)$ نامیم و با $\vec{f}''(t)$ یا $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$ نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب، می‌توان از مشتقات مراتب بالاتر تابع برداری

صحبت کرد.

تعبیر هندسی. مفهوم هندسی تعریف مشتق یک تابع برداری در شکل ۱۶ نمایش داده شده است. اگر P و Q بردارهای مکان $\vec{f}(t)$ و $\vec{f}(t+\Delta t)$ به ترتیب باشند، آنگاه $\overrightarrow{PQ}$ نشان دهنده بردار $\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)$ است. آن را بردار سکانت نامیم. اگر $h>0$ باشد، مضرب اسکالر $\left(\frac{1}{h}\right)\left(\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)\right)$ با $\vec{f}(t+\Delta t)-\vec{f}(t)$ هم جهت است. حال وقتی $h\to 0$، این بردار به برداری که بر خط مماس واقع است، میل می‌کند. به این دلیل بردار $\vec{f}'(t)$ را بردار مماس به منحنی C تعریف شده توسط تابع برداری $\vec{r}=\vec{f}(t)$ در نقطه P نامیم. خط مماس به C در P، خط گذرنده از نقطه P موازی بردار مماس $\vec{f}'(t)$ است. اگر $\vec{f}'(t)\neq 0$ آنگاه می‌توانیم بردار یکه مماس به منحنی C در نقطه P را در نظر بگیریم. این بردار یکه را با $\vec{T}(t)$ نمایش می‌دهیم. در بخش‌های بعد، با $\vec{T}(t)$ بیشتر آشنا خواهیم شد.

پس

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$$



شکل ۱۶

مثال. فرض کنید $\vec{f}(t)=\vec{a}+\vec{b}t+\vec{c}t^2$ که در آن $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای ثابتند. آنگاه

$$\vec{f}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}=\lim\frac{[\vec{a}+\vec{b}(t_0+\Delta t)+\vec{c}(t_0+\Delta t)^2]-(\vec{a}+\vec{b}t_0+\vec{c}t_0^2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{b}\,\Delta t+2\vec{c}t_0\Delta t+c(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(\vec{b}+2\vec{c}t_0+\vec{c}\Delta t)=\vec{b}+2\vec{c}t_0$$

بنابراین $\vec{f}(t)$ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر است و $\vec{f}'(t_0)=\vec{b}+2\vec{c}t_0$.

قضیه ۷. تابع برداری $\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ در t_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر یک از توابع مولفه‌ای $f_i(t)$ برای $i=1,2,3$ در t_0 مشتق‌پذیر باشند و در این حالت داریم

$$\vec{f}'(t_0)=f_1'(t_0)\vec{i}+f_2'(t_0)\vec{j}+f_3'(t_0)\vec{k}$$

اثبات. با توجه به تعریف مشتق تابع برداری و از خواص حد داریم

$$\begin{aligned}
\vec{f}'(t_0)&=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0}\\
&=\lim_{t\to t_0}\left[\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}\vec{i}+\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}\vec{j}+\frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0}\vec{k}\right]\\
&=\left[\lim_{t\to t_0}\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}\right]\vec{i}+\left[\lim_{t\to t_0}\frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}\right]\vec{j}+\left[\lim_{t\to t_0}\frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0}\right]\vec{k}\\
&=f_1'(t_0)\vec{i}+f_2'(t_0)\vec{j}+f_3'(t_0)\vec{k}
\end{aligned}$$

پس $\vec{f}(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر $f_1(t)$، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر باشند.

مثال ۲۲. اگر $\vec{u}=(t^3+2t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+e^t\vec{k}$ باشد مطلوب است $\vec{u}'$، $\vec{u}''$، $\vec{u}'''$.

حل.

$$\begin{aligned}
\vec{u}'&=\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{d}{dt}(t^3+2t)\vec{i}+\frac{d}{dt}(\sin t)\vec{j}+\frac{d}{dt}(e^t)\vec{k}\\
&=(3t^2+2)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}+e^t\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}''&=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(3t^2+2)\vec{i}+\frac{d}{dt}(\cos t)\vec{j}+\frac{d}{dt}(e^t)\vec{k}\\
&=6t\,\vec{i}-(\sin t)\vec{j}+e^t\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u}'''&=\frac{d}{dt}\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(6t)\vec{i}-\frac{d}{dt}(\sin t)\vec{j}+\frac{d}{dt}(e^t)\vec{k}\\
&=6\vec{i}-(\cos t)\vec{j}+e^t\vec{k}
\end{aligned}$$

مثال ۲۳. الف) مشتق تابع برداری $\vec{f}(t)=(1+t^2)\vec{i}+te^{-t}\vec{j}+\sin 2t\,\vec{k}$ را بدست آورید.

ب) بردار یکه مماس بر تابع برداری در (الف) به ازای $t=0$ را بدست آورید.

حل. الف) $\vec{f}'(t)=3t^2\vec{i}+(1-t)e^{-t}\vec{j}+2\cos 2t\,\vec{k}$

ب) چون $\vec{f}(0)=\vec{i}$ و $\vec{f}'(0)=\vec{j}+2\vec{k}$، پس بردار یکه مماس در نقطه (۱،۰،۰)

به صورت زیر است

$$\vec T(0)=\frac{\vec f'(0)}{\|\vec f'(0)\|}=\frac{\vec j+2\vec k}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt5}\vec j+\frac{2}{\sqrt5}\vec k$$

مثال ۲۴. معادلات پارامتری خط مماس بر مارپیچ با معادلات پارامتری

$$x=2\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t,$$

در نقطه $(0,1,\frac{\pi}{2})$ را به دست آورید.

حل. معادله برداری مارپیچ به صورت

$$\vec f(t)=2\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j+t\,\vec k$$

است، پس

$$\vec f'(t)=-2\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j+\vec k$$

مقدار پارامتر متناظر به نقطه $(0,1,\frac{\pi}{2})$ برابر $t=\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین بردار مماس در این نقطه $\vec f'(\frac{\pi}{2})=-2\vec i+0\vec j+\vec k$ است. حال خط مماس مورد نظر، خط گذرنده از نقطه $(0,1,\frac{\pi}{2})$ موازی بردار $-2\vec i+\vec k$ است، پس معادلات پارامتری خط مماس عبارت است از

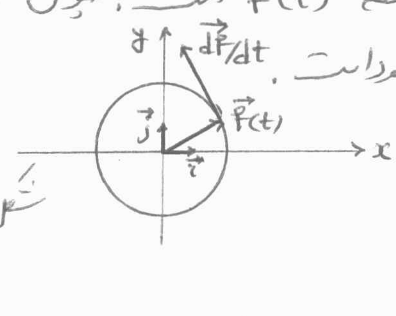
$$x=-2t,\quad y=1,\quad z=\frac{\pi}{2}+t.$$

مثال ۲۵. تابع برداری $\vec f(t)=a\cos t\,\vec i+a\sin t\,\vec j$ داده شده است. نمودار تابع $\vec f(t)$ را رسم کنید و نشان دهید $\vec f'(t)$ عمود بر $\vec f(t)$ است.

حل. نمودار تابع برداری $\vec f(t)$ دایره‌ای به شعاع a و مرکز مبدا است. داریم

$$\vec f'(t)=\frac{d\vec f}{dt}=-a\sin t\,\vec i+a\cos t\,\vec j$$

$\vec f'(t)$ مماس بر دایره در نقطه $\vec f(t)$ است. چون $\vec f(t)\cdot\vec f'(t)=0$ پس $\vec f'(t)$ بر بردار $\vec f(t)$ در نقطه تماس عمود است.



شکل ۱۷

قضیه ۸. اگر $\vec{f}(t)$ در $t=t_0$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\vec{f}(t)$ در t_0 پیوسته است.

اثبات.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}[\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)] &= \lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0}(t-t_0)\\ &= \lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0}\cdot\lim_{t\to t_0}(t-t_0)\\ &= [\vec{f}\,'(t_0)]\times 0 = 0\end{aligned}$$

بنابراین $\vec{f}(t)$ در t_0 پیوسته است.

قضیه ۹. فرض کنید $\vec{u}$، $\vec{v}$ و h توابع مشتق‌پذیر از t روی I باشند آنگاه

الف) $\vec{u}+\vec{v}$ روی I مشتق‌پذیر است و $\frac{d}{dt}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt}$.

ب) $h\vec{u}$ روی I مشتق‌پذیر است و $\frac{d}{dt}(h\vec{u})=h\frac{d\vec{u}}{dt}+\frac{dh}{dt}\vec{u}$.

ج) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ روی I مشتق‌پذیر است و $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}$.

د) $\vec{u}\times\vec{v}$ روی I مشتق‌پذیر است و $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}$.

هـ) (قانون زنجیره‌ای). اگر $\vec{u}=\vec{f}(t)$ روی I_t مشتق‌پذیر بوده و $t=h(\theta)$ روی I_θ مشتق‌پذیر باشد که در آن تصویر $h(I_\theta)$ مشمول در I_t است، آنگاه $\vec{u}=\vec{g}(\theta)=\vec{f}(h(\theta))$ روی I_θ مشتق‌پذیر است و

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta}=\frac{d\vec{u}}{dt}\,\frac{dt}{d\theta}$$

اثبات. اثبات قسمتهای (الف)، (ب)، (د) و (هـ) به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

اثبات قسمت (ج). فرض کنید $\vec{u}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ و $\vec{v}(t)=g_1(t)\vec{i}+g_2(t)\vec{j}+g_3(t)\vec{k}$
در این صورت

$$\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)=f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)+f_3(t)g_3(t)=\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i(t)$$

حال با توجه به قوانین مشتق حاصل ضرب توابع حقیقی داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)] &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}f_i(t)g_i(t)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}[f_i(t)g_i(t)]\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} [f_i'(t) g_i(t) + f_i(t) g_i'(t)]$$
$$= \sum_{i=1}^{3} f_i'(t) g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t) g_i'(t)$$
$$= \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$$

مثال ۲۶. فرض کنید $\vec{u} = a\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j}$ ، $\theta = (1+t^2)^{1/2}$ ، $t > 0$ ، $0 < t$ مطلوب است $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$.

حل:

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d\vec{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{d\vec{u}}{dt} \Big/ \frac{d\theta}{dt}$$
$$= (-a\sin t\,\vec{i} - a\cos t\,\vec{j}) \,/\, [t(1+t^2)^{-1/2}]$$
$$= -\frac{a}{t}(1+t^2)^{1/2}(\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j})$$

که در آن از این واقعیت که برای تابع اسکالر $\theta = h(t)$ با $d\theta/dt \neq 0$ داریم $\frac{dt}{d\theta} = 1/(d\theta/dt)$ استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲۷. مطلوب است مشتق $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$.

حل.
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right) + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + \left\|\frac{d\vec{u}}{dt}\right\|^2$$

مثال ۲۸. مطلوب است مشتق سه‌تایی اسکالر مخلوط $[\vec{u}\ \vec{u}'\ \vec{u}'']$.

حل.
$$\frac{d}{dt}[\vec{u}\ \vec{u}'\ \vec{u}''] = \frac{d}{dt}\left(\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)$$
$$= \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right) + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)$$
$$= \vec{u} \cdot [(\vec{u}' \times \vec{u}''') + (\vec{u}'' \times \vec{u}'')] + \vec{0}$$
$$= \vec{u} \cdot (\vec{u}' \times \vec{u}''')$$
$$= [\vec{u}\ \vec{u}'\ \vec{u}'''] = \left[\vec{u}\ \frac{d\vec{u}}{dt}\ \frac{d^3\vec{u}}{dt^3}\right]$$

مثال ۱۹. نشان دهید اگر $\|\vec{f}(t)\| = c$ ، (c عددی ثابت) آنگاه $\vec{f}'(t)$ بر $\vec{f}(t)$ به ازای هر t در دامنه $\vec{f}$ عمود است.

حل، چون $\vec{f}(t).\vec{f}(t) = \|\vec{f}(t)\|^2 = c^2$ و c^2 عددی ثابت است، با مشتق گیری از طرفین داریم

$$0 = \frac{d}{dt}[\vec{f}(t).\vec{f}(t)] = \vec{f}'(t).\vec{f}(t) + \vec{f}(t).\vec{f}'(t) = 2\vec{f}'(t).\vec{f}(t)$$

بنابراین $\vec{f}'(t).\vec{f}(t) = 0$ یعنی $\vec{f}'(t) \perp \vec{f}(t)$.

بطور هندسی، مثال فوق بیان می‌کند که اگر منحنی نمایش دهنده $\vec{f}(t)$ روی یک کره واقع باشد، آنگاه همواره بردار مماس $\vec{f}'(t)$ عمود بر بردار موقعیت $\vec{f}(t)$ است.

توابع از کلاس C^m

تعریف ۱۲. گوییم تابع اسکالر یا برداری $\vec{f}$ به کلاس C^m روی فاصله I متعلق است هر گاه مشتق مرتبه mام $\vec{f}$ موجود بوده روی I پیوسته باشد. کلاس تمام توابع پیوسته را با C^0 و کلاس تمام توابع مشتق پذیر از هر مرتبه را با C^∞ نمایش می‌دهیم.

با توجه به اینکه یک تابع برداری پیوسته است یا دارای مشتق می‌باشد اگر و تنها اگر توابع مولفه‌ای آن پیوسته یا دارای مشتق باشد. پس

قضیه ۱۰. تابع برداری $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ به کلاس C^m روی I تعلق دارد اگر و تنها اگر توابع مولفه‌ای $f_1(t)$، $f_2(t)$ و $f_3(t)$ به کلاس C^m روی I متعلق باشند.

توجه داریم که یک تابع مشتق پذیر، پیوسته است. بنابراین اگر تابعی از کلاس C^m باشد آنگاه از کلاس C^j برای هر $m \geq j$ است.

مثال ۲۰. تابع برداری

$$\vec f(t)=t^3\vec i+(\sin t)\vec j+t^{8/3}\vec k \qquad -\infty<t<\infty$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$\vec f'(t)=3t^2\vec i+(\cos t)\vec j+\frac{8}{3}t^{5/3}\vec k$$
$$\vec f''(t)=6t\,\vec i-(\sin t)\vec j+\frac{40}{9}t^{2/3}\vec k$$
$$\vec f'''(t)=6\vec i-(\cos t)\vec j+\frac{80}{27}t^{-1/3}\vec k$$

دیده می‌شود که $\vec f'(t)$ و $\vec f''(t)$ برای هر t پیوسته‌اند. درحالی که $\vec f'''(t)$ در $t=0$ موجود نیست، زیرا $t^{1/3}$ در مخرج عبارت مشاهده می‌شود. پس $\vec f(t)$ روی $-\infty<t<\infty$ از کلاس C^2 است اما از کلاس C^3 نمی‌باشد. در هر فاصله‌ای که شامل مبدأ نباشد تابع $\vec f$ دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه‌ای است پس روی چنین فاصله‌ای تابع $\vec f$ از کلاس C^∞ است.

قضیه ۱۱. اگر $\vec f$، $\vec g$ و h روی I از کلاس C^m باشند آنگاه $h\vec f$، $\vec f+\vec g$ و $\vec f\cdot\vec g$ و $\vec f\times\vec g$ روی I از کلاس C^m اند.

قضیه ۱۲. اگر $\vec f(t)$ روی I_t از کلاس C^m بوده و $t(\theta)$ روی I_θ از کلاس C^m باشد که در آن $t(I_\theta)$ مشمول در I_t است، آنگاه تابع مرکب $\vec g(\theta)=\vec f(t(\theta))$ روی I_θ از کلاس C^m است. به عبارت دیگر یک تابع از کلاس C^m ترکیب با تابعی از کلاس C^m، تابعی از کلاس C^m خواهد بود.

فرمول تیلور. فرض کنید $f(t)$ تابعی از کلاس C^m روی I است. دراین صورت برای هر t و t_0 در I

$$f(t)=f(t_0)+\frac{f'(t_0)}{1}(t-t_0)+\dots+\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+R_m(t,t_0)$$

که در آن باقیمانده $R_m(t,t_0)$ دارای خاصیت زیر است

$$\lim_{t\to t_0}\frac{R_m(t,t_0)}{(t-t_0)^m}=0$$

بوضوح با بکارگیری فرمول تیلور برای توابع مولفه‌ای یک تابع برداری $\vec f(t)$ داریم

قضیه ۱۴. فرمول تیلور. فرض کنید $\vec f(t)$ روی I از کلاس C^m است، آنگاه برای هر t و t_0 در I

$$\vec f(t)=\vec f(t_0)+\frac{\vec f'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\vec f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\vec R_m(t,t_0)$$

که در آن

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{(t-t_0)^m}\vec R_m(t,t_0)=\vec 0$$

مثال ۲۱. اگر $\vec f(t)=\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j$ آنگاه $\vec f(0)=\vec i$ ، $\vec f'(0)=\vec j$ و ، $\vec f''(0)=-\vec i$ ، $\vec f'''(0)=-\vec j$ ، $\vec f^{(4)}(0)=\vec i$. بنابراین حول $t_0=0$ داریم

$$\vec f(t)=\sin t\,\vec i+\cos t\,\vec j=\vec i+t\vec j-\frac{\vec i}{2!}t^2-\frac{\vec j}{3!}t^3+\frac{\vec i}{4!}t^4+\vec R_4(t)$$

که در آن $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\vec R_4(t)=0$.

اغلب از نمادهای o و O برای نمایش رفتار یک تابع در همسایگی یک نقطه استفاده می‌کنیم. فرض کنید تابع اسکالر $g(t)$ در یک همسایگی محذوف t_0 ناصفر است. تابع اسکالر یا تابع برداری $\vec f(t)$ را " oh کوچک" $g(t)$ در t_0 نامیم و می‌نویسیم $\vec f(t)=\vec o(g(t))$ هرگاه $\lim_{t\to t_0}\frac{\vec f(t)}{g(t)}=\vec 0$. تابع اسکالر یا تابع برداری $\vec f(t)$ را " oh بزرگ" $g(t)$ در t_0 نامیم و می‌نویسیم $\vec f(t)=\vec O(g(t))$ ، هرگاه $\frac{\vec f(t)}{g(t)}$ در t_0 کراندار باشد.

مثال ۲۲. فرض کنید $\vec f(t)=\vec a t^4+\vec b t^5+\vec c t^6$ که در آن $\vec a$ ، $\vec b$ ، $\vec c$ ثابت هستند، آنگاه $\vec f(t)=\vec O(t^3)$ در $t=0$. زیرا

$$\lim_{t\to 0}\frac{\vec f(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0}(\vec a\,t+\vec b\,t^2+\vec c\,t^3)=\vec 0$$

توجه کنید که $\vec f(t)=\vec o(t^2)$ ، درحالی که $\vec f(t)\neq \vec o(t^n)$ برای اعداد صحیح $3<n$.

مثال ۳۳. اگر $\vec f(t)=\sin^2 t\,\vec i+(t^2+t^3)\vec j+t^4\vec k$ آنگاه $\vec f(t)=\vec O(t^2)$. زیرا

$$\lim_{t\to 0}\frac{\vec f(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\vec i+(1+t)\vec j+t^2\vec k\right]=\vec i+\vec j$$

چون حد موجود است پس $\frac{\vec f(t)}{t^2}$ کراندار است، بنابراین $\vec f(t)=\vec O(t^2)$. توجه داریم که $\lim_{t\to 0}\frac{\vec f(t)}{t}=\vec 0$ بنابراین $\vec f(t)=\vec o(t)$. اما $\vec O(t^2)$ تخمین بهتری است، زیرا برای $\alpha>2$ داریم

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{\vec f(t)}{t^\alpha}\right|=\infty$$

مثال ۳۴. فرض کنید $\vec f(t)$ روی I از کلاس C^m است. از فرمول تیلور در t_0 داریم

$$\vec f(t)=\vec f(t_0)+\frac{\vec f'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\vec f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+\vec o[(t-t_0)^m]$$

توابع تحلیلی

فرض کنید $\vec f(t)$ روی I از کلاس C^∞ است. در این صورت برای هر m و هر t و t_0 در I داریم

$$\vec f(t)=\vec f(t_0)+\frac{\vec f'(t_0)}{1}(t-t_0)+\cdots+\frac{\vec f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m+R_m(t,t_0)$$

حال اگر علاوه بر آن $\lim_{t\to t_0}\vec R_m(t,t_0)=\vec 0$ آنگاه $\vec f(t)$ را می‌توان در I به صورت یک سری توانی نمایش داد

$$\vec f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\vec f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$$

در چنین حالتی گوییم $\vec f(t)$ در I تحلیلی است. یا به طور ساده‌تر، $\vec f(t)$ در I تحلیلی است هرگاه به ازای هر t_0 در I ، همسایگی $S_\delta(t_0)$ وجود داشته باشد به طوری که $\vec f(t)$ در آن دارای یک بسط به سری توانی به صورت $\vec f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec a_n(t-t_0)^n$ بسط داد که برای هر t در $S_\delta(t_0)$ همگرا به $\vec f(t)$ است.

کلاس توابع تحلیلی روی I را با C^A نمایش می‌دهیم.

همان گونه که در مثال زیر شرح می‌دهیم، یک تابع از کلاس C^∞ لزوماً تحلیلی نیست. به هر حال می‌توان نشان داد که اگر تابع نمایش داده شده توسط یک سری توانی را درون فاصله همگرائی آن مشتق گیری کرد و مشتق آن نیز توسط یک سری توانی نمایش داده می‌شود که جملات آن از مشتق گیری جملات سری توانی $\vec{f}(t)$ بدست می‌آید. بنابراین هر تابع تحلیلی از کلاس C^∞ است. علاوه بر آن $\vec{f}^{(n)}(t_0)=\vec{a}_n n!$

با توجه به قضایای جمع، ضرب و حاصل‌ضرب‌ها سری‌های توانی، می‌توان نتیجه گرفت که جمع، ضرب و ضرب‌های برداری و اسکالری توابع تحلیلی، تحلیلی اند و ترکیب یک تابع تحلیلی با تابع تحلیلی دیگری نیز تحلیلی خواهد شد.

مثال ۲۵. تابع $f(t)=e^{-1/t^2}$ برای هر t بجز $t=0$ پیوسته است. اگر قرار دهیم $f(0)=0$ آنگاه $f(t)$ پیوسته است و در واقع متعلق به C^∞ برای هر $-\infty<t<\infty$ است، درحالی که $f(t)$ در هر فاصله شامل صفر تحلیلی نیست. زیرا می‌توان نشان داد که $f(0)=0$، $f'(0)=0$، $f''(0)=0$ و به همین ترتیب، پس اگر $f(t)$ در همسایگی مانند $S_\delta(0)$ دارای بسط به سری توانی باشد، سری فوق برای هر t در $S_\delta(0)$ متحداً به صفر خواهد شد که این غیرممکن است زیرا $f(t)$ در هر $S_\delta(0)$ متحد صفر نیست.

نمایش های منظم

تعریف ۱۴. تابع برداری $\vec r=\vec r(t)$ برای t در فاصله I نمایش دهندهٔ یک منحنی در $\mathbb{R}^3$ است. این نمایش پارامتری منظم نامیده می‌شود هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

الف) $\vec r(t)$ در I از کلاس C^1 است.

ب) برای هر $t\in I$ ، $\vec r\,'(t)\neq\vec 0$

متغیر t را پارامتر نمایش نامیم.

اگر یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ انتخاب کنیم، معادله $\vec r=\vec r(t)$ معادل با سه معادله اسکالر

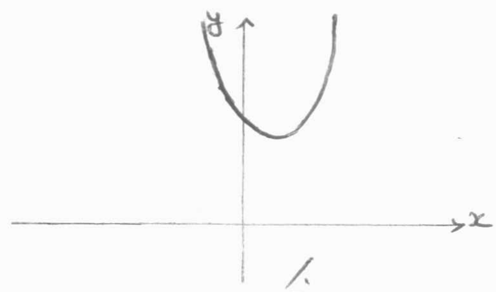
$$r_1=r_1(t),\qquad r_2=r_2(t),\qquad r_3=r_3(t),\qquad t\in I$$

است که مولفه‌های $\vec r=\vec r(t)$ نامیده می‌شوند (نسبت به پایهٔ انتخابی). مشخص است که منحنی $\vec r=\vec r(t)$ یک نمایش پارامتری منظم است اگر و تنها اگر هر یک از $r_i(t)$ تابعی از کلاس C^1 بوده و برای هر $t\in I$ حداقل یکی از $r_i'(t)$ ها ناصفر باشد.

مثال ۲۶. تابع

$$\vec r=(t+1)\vec i+(t^2+3)\vec j \qquad -\infty<t<\infty$$

یک نمایش پارامتری منظم است، زیرا $\vec r\,'=\vec i+2t\vec j$ پیوسته است و برای هر t، $\vec r\,'\neq\vec 0$.
تصویر این تابع سهمی نشان داده شده در شکل (۱۸) است.



شکل ۱۸

مثال ۲۷. نمودار معادله $r=2\cos\theta-1$ برای $0\le\theta\le 2\pi$ در مختصات قطبی در شکل (۱۹)

نشان داده شده است. مختصات قطبی و دکارتی با توجه به معادلات $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ قابل تبدیل به یکدیگرند. با جایگزینی برای r، نمایش

$$x=(\cos\theta)(2\cos\theta-1),\quad y=(\sin\theta)(2\cos\theta-1)\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

یا

$$\vec{r}=(\cos\theta)(2\cos\theta-1)\vec{i}+(\sin\theta)(2\cos\theta-1)\vec{j}$$

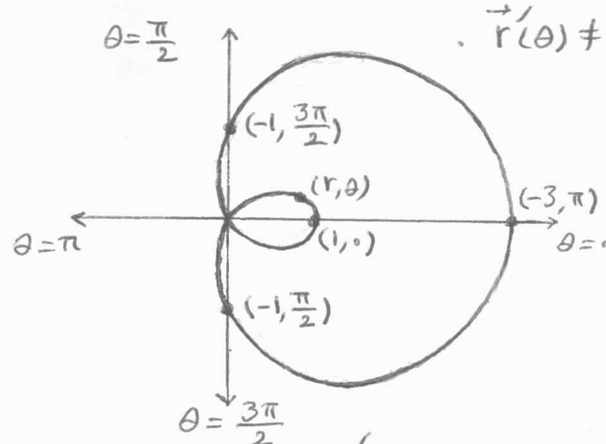
حاصل می‌شود. این نمایش منظم است، زیرا

$$\vec{r}\,'=[-4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta]\vec{i}+[2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-\cos\theta]\vec{j}$$

پیوسته است و برای هر θ داریم

$$\|\vec{r}\,'\|=\sqrt{5-4\cos\theta}\neq 0$$

بنابراین برای هر θ، $\vec{r}\,'(\theta)\neq 0$.



شکل ۱۹

یک نمایش پارامتری منظم $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I می‌تواند دارای نقاط تکراری باشد، یعنی در I، t_1، t_2 می‌توانند وجود داشته باشند که $t_1\neq t_2$ درحالی که $\vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)$. اما این وضعیت به طور موضعی رخ نمی‌دهد.

قضیه ۱۴. اگر $\vec{r}=\vec{r}(t)$ یک نمایش پارامتری منظم روی I باشد، آنگاه برای هر t_0 در I، همسایگی از t_0 وجود دارد به طوری که $\vec{r}(t)$ در این همسایگی یک به یک است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $g(t)$ در $t=t_0$ پیوسته باشد و $g(t_0)\neq 0$ آنگاه $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای هر t در $S_\delta(t_0)$، $g(t)\neq 0$. برای اثبات این ادعا قرار

می‌دهیم $\epsilon=\frac{1}{2}|g(t_0)|$، چون $g(t)$ در t_0 پیوسته است، پس $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای هر t در $S_\delta(t_0)$ داریم

$$|g(t)-g(t_0)|<\epsilon$$

بنابراین برای $t\in S_\delta(t_0)$،

$$\begin{aligned}|g(t_0)| &= |g(t_0)-g(t)+g(t)| \le |g(t)-g(t_0)|+|g(t)| \\ &= \epsilon+|g(t)| \\ &\le \frac{1}{2}|g(t_0)|+|g(t)|\end{aligned}$$

یا $|g(t)|\ge\frac{1}{2}|g(t_0)|$. چون $g(t_0)\neq 0$ پس برای هر $t\in S_\delta(t_0)$، $g(t)\neq 0$.

حال به اثبات قضیه می‌پردازیم. چون $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I منظم است و $t_0\in I$، پس حداقل یکی از مشتقات مثلا $r_1'(t_0)\neq 0$. علاوه بر آن $r_1'(t)$ در t_0 پیوسته است. در نتیجه $\delta>0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t\in S_\delta(t_0)$، $r_1'(t)\neq 0$. حال در $S_\delta(t_0)$، $\vec{r}(t)$ یک به یک است، زیرا در غیر این صورت $t_1,t_2\in S_\delta(t_0)$ با $t_1\neq t_2$ وجود دارد به طوری که $\vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)$. بنابراین $r_1(t_1)=r_1(t_2)$. اما با توجه به قضیه مقدار میانگین لاگرانژ $t^*\in(t_1,t_2)$ وجود دارد

$$0=\frac{r_1(t_1)-r_1(t_2)}{t_1-t_2}=x_1'(t^*)$$

که غیرممکن است زیرا روی $S_\delta(t_0)$، $r_1'(t)\neq 0$. بنابراین $\vec{r}(t)$ یک به یک است.

مثال ۲۸. تابع

$$\vec{r}=a(\cos\theta)\vec{i}+a(\sin\theta)\vec{j},\quad a\neq 0,\quad -\infty<\theta<\infty$$

یک نمایش منظم از دایره‌ای به شعاع $|a|$ حول مبدا است، زیرا $\frac{d\vec{r}}{d\theta}=-a\sin\theta\,\vec{i}+a\cos\theta\,\vec{j}$ برای هر θ پیوسته است و

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\|=\|-a\sin\theta\,\vec{i}+a\cos\theta\,\vec{j}\|=|a|\neq 0$$

مشاهده می‌شود که هر نقطه روی این نمایش یک نقطه چندگانه است، زیرا برای هر θ_0

$$a\cos(\theta_0+2\pi)\vec{i}+a\sin(\theta_0+2\pi)\vec{j}=a\cos\theta_0\,\vec{i}+a\sin\theta_0\,\vec{j}$$

درحالی‌که تحدید دامنهٔ تابع، مثلاً به $\theta_0-\frac{\pi}{2}<\theta<\theta_0+\frac{\pi}{2}$، تابع $\vec{r}=a\cos\theta\,\vec{i}+a\sin\theta\,\vec{j}$ یک به یک است.

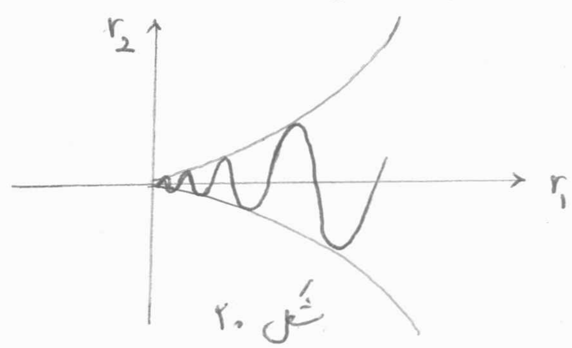
مثال ۳۹. تابع

$$r_1=t^2,\qquad r_2=\begin{cases}0 & t\le 0\\ t^2\sin\frac{1}{t} & t>0\end{cases}\qquad -\infty<t<\infty$$

در شکل (۲۰) نمایش داده شده است و دارای مشتقات پیوسته برای هر t است. در حالی که در $t=0$ داریم

$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{dr_2}{dt}=0$$

پس نمایش پارامتری منظم نیست. توجه داریم که این تابع در هر همسایگی از $t=0$ دارای نقاط چندگانه است، زیرا $\delta>0$ دلخواه را انتخاب کنید، پس عدد صحیح $N>0$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{2\pi N}<\delta$. قرار دهید $t_1=-\frac{1}{2\pi N}$ و $t_2=\frac{1}{2\pi N}$. بوضوح $-\delta<t_1<t_2<\delta$ و $r_1(t_1)=\frac{1}{4\pi^2N^2}=r_1(t_2)$ و $r_2(t_1)=0=\frac{1}{4\pi^2N^2}\sin(2\pi N)=r_2(t_2)$. بنابراین برای $-\delta<t<\delta$ تابع برداری دارای یک نقطهٔ چندگانه است.



شکل ۲۰

منحنی‌های منظم

تعریف ۱۵. تابع با مقدار حقیقی $t=t(\theta)$ روی فاصلهٔ I_θ یک تغییر پارامتر مجاز نامیده می‌شود هرگاه،

الف) $t(\theta)$ در I_θ از کلاس C^1 باشد.

ب) برای هر $\theta\in I_\theta$، $\frac{dt}{d\theta}\neq 0$.

توجه کنید اگر $t=t(\theta)$ تغییر پارامتر مجاز روی I_θ باشد، آن گاه $\frac{dt}{d\theta}$ پیوسته است و $\frac{dt}{d\theta}\neq 0$، بنابراین یا روی I_θ، $\frac{dt}{d\theta}>0$ که در این حالت $t(\theta)$ را تابع صعودی هموار نامیم، یا روی I_θ، $\frac{dt}{d\theta}<0$ که در این حالت $t(\theta)$ را تابع نزولی هموار گوییم.

قضیه ۱۵. اگر روی I_θ، $t=t(\theta)$ یک تغییر پارامتر مجاز باشد، آن گاه

الف) $t=t(\theta)$ یک نگاشت یک به یک از I_θ بروی فاصله $I_t=t(I_\theta)$ است.

ب) تابع معکوس $\theta=\theta(t)$ برای تابع $t=t(\theta)$ یک تغییر پارامتر مجاز روی I_t است.

اثبات. چون $\frac{dt}{d\theta}$ پیوسته است و $\frac{dt}{d\theta}\neq 0$ پس روی I_θ، یا $\frac{dt}{d\theta}>0$ یا $\frac{dt}{d\theta}<0$. فرض کنید روی I_θ، $\frac{dt}{d\theta}>0$ در این صورت $t(\theta)$ اکیداً صعودی است، زیرا اگر چنین نباشد یعنی برای $\theta_1<\theta_2$ داشته باشیم $t(\theta_1)\geq t(\theta_2)$ آن گاه با توجه به قضیه مقدار میانگین لاگرانژ به ازای θ^* یی در (θ_1,θ_2)

$$0\geq \frac{t(\theta_1)-t(\theta_2)}{\theta_1-\theta_2}=t'(\theta^*)$$

که غیرممکن است، زیرا روی I_θ، $\frac{dt}{d\theta}>0$.

حال چون $t(\theta)$ اکیداً صعودی است پس یک به یک می باشد و دارای تابع معکوس $\theta(t)$ است. چون $t(\theta)$ صعودی و پیوسته است، پس تابع معکوس آن یعنی $\theta(t)$ تابعی صعودی و پیوسته است. اما در این صورت $\theta(t)$ نیز دارای مشتق است

$$\frac{d\theta}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta\theta}}=\frac{1}{\frac{dt}{d\theta}}$$

که پیوسته و مخالف صفر است، زیرا $\frac{dt}{d\theta}$ پیوسته و ناصفر است و این اثبات را کامل می کند.

مثال ۲۰. الف) تابع $t=(b-a)\theta+a$ برای $0\leq\theta\leq 1$، $a<b$ یک تغییر پارامتر مجاز است که فاصله $0\leq\theta\leq 1$ را بروی $a\leq t\leq b$ می نگارد، تابع معکوس آن $\theta=\frac{t-a}{b-a}$ یک تغییر پارامتر مجاز است که فاصله $a\leq t\leq b$ را بروی فاصله $0\leq\theta\leq 1$ می نگارد.

ب) تابع $t=\tan\frac{\pi\theta}{2}$ برای $0\le\theta<1$ یک تغییر پارامتر مجاز است که فاصله $0\le\theta<1$ را بروی $0\le t<\infty$ می‌نگارد. تابع معکوس آن یعنی $\theta=\frac{2}{\pi}\operatorname{Tan}^{-1}t$ فاصله $0\le t<\infty$ را بروی $0\le\theta<1$ می‌نگارد.

تعریف ۱۶. یک نمایش پارامتری منظم $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برای $t\in I_t$ هم‌ارز با یک نمایش پارامتری منظم $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ برای $\theta\in I_\theta$ است، هرگاه یک تغییر پارامتر مجاز به صورت $t=t(\theta)$ روی I_θ وجود داشته باشد به طوری که

الف) $t(I_\theta)=I_t$

ب) $\vec{r}(t(\theta))=\vec{r}^*(\theta)$.

در قضیه بعد نشان می‌دهیم که تعریف رابطه بالا یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه تمام نمایش‌های منظم است.

قضیه ۱۶. رابطه معادل بودن نمایش‌های پارامتری منظم بیان شده در تعریف ۱۶ یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه تمام نمایش‌های پارامتری منظم است.

اثبات. $\vec{r}=\vec{r}(t)$ با خودش تحت تغییر پارامتر همانی $t=\theta$ هم‌ارز است. اگر $\vec{r}=\vec{r}(t)$ هم‌ارز با $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ تحت تغییر پارامتر $t=t(\theta)$ باشد آن‌گاه $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ هم‌ارز با $\vec{r}=\vec{r}(t)$ تحت تابع معکوس $\theta=\theta(t)$ است زیرا $\theta(I_t)=I_\theta$ و

$$\vec{r}^*(\theta(t))=\vec{r}(t(\theta(t)))=\vec{r}(t)$$

نهایتاً، فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ هم‌ارز با $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ تحت $t=t(\theta)$ است و $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ هم‌ارز با $\vec{r}=\vec{r}^{**}(\varphi)$ تحت $\theta=\theta(\varphi)$ است. تابع مرکب $t=t(\theta(\varphi))$ را در نظر بگیرید. در نتیجه تابع $\frac{dt}{d\varphi}=\frac{dt}{d\theta}\frac{d\theta}{d\varphi}$ پیوسته است و روی I_φ، $\frac{dt}{d\varphi}\neq 0$. بنابراین $t=t(\theta(\varphi))$ یک تغییر پارامتر مجاز روی I_φ است، همچنین $t(\theta(I_\varphi))=t(I_\theta)=I_t$ و $\vec{r}(t(\theta(\varphi)))=\vec{r}^*(\theta(\varphi))=\vec{r}^{**}(\varphi)$ بنابراین $\vec{r}=\vec{r}(t)$ هم‌ارز با $\vec{r}=\vec{r}^{**}(\varphi)$ است.

تعریف ۱۷. یک منحنی منظم، یک کلاس هم‌ارزی نمایش‌های پارامتری منظم است.

توجه داریم که یک نمایش $\vec{r}=\vec{r}(t)$ منحصراً یک منحنی C شامل تمام نمایش‌های وابسته به یک تغییر پارامتر مجاز است، بنابراین گوییم "منحنی C توسط $\vec{r}=\vec{r}(t)$ داده شده ...". به هر حال، یک خاصیت $\vec{r}=\vec{r}(t)$ لزوماً خاصیت منحنی نیست. هر خاصیت یک منحنی باید برای تمام نمایش‌ها مشترک باشد یعنی مستقل از پارامتر باشد.

مثال ۱۲. فرض کنید از تغییر پارامتر مجاز $\theta=t+1$ برای $-1\le t\le 2\pi-1$ در نمایش

$$\vec{r}=(\cos\theta)(2\cos\theta-1)\vec{i}+(\sin\theta)(2\cos\theta-1)\vec{j} \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

استفاده می‌کنیم. این تغییر پارامتر مجاز هم‌ارز با نمایش پارامتری زیر را به دست می‌دهد

$$\vec{r}=[\cos(t+1)][2\cos(t+1)-1]\vec{i}+[\sin(t+1)][2\cos(t+1)-1]\vec{j},\quad -1\le t\le 2\pi-1$$

وقتی t در فاصله $-1\le t\le 2\pi-1$ افزایش (صعود) می‌یابد، کمیت $\theta=t+1$ به طور هموار در فاصله $0\le\theta\le 2\pi$ صعود می‌کند و معادله تبدیل شده همان مجموعه نقاط قبلی را در همان جهت نتیجه می‌دهد، شکل ۲۱ (الف). اگر تغییر در پارامتر مجاز $\theta=-t$ برای $-2\pi\le t\le 0$ را اعمال کنیم، نمایش معادل

$$\vec{r}=(\cos t)(2\cos t-1)\vec{i}-(\sin t)(2\cos t-1)\vec{j}, \qquad -2\pi\le t\le 0$$

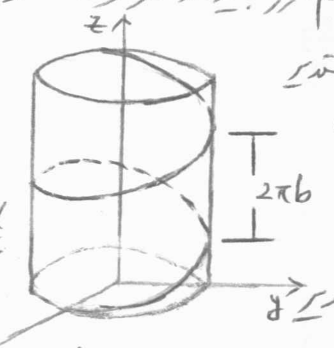
حاصل می‌شود. در این حالت وقتی t در فاصله $-2\pi\le t\le 0$ افزایش می‌یابد، کمیت $\theta=-t$ در فاصله $0\le\theta\le 2\pi$ کاهش یافته و مجموعه نقاط مسیر در جهت مخالف طی می‌شود. شکل ۲۱ (ب). بنابراین عبارت "اینکه یک منحنی طی شده است" خاصیت نمایش است و مربوط به منحنی نمی‌باشد. اگر تغییر پارامتر

$$\theta=\theta(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le \frac{\pi}{3} \\ -t+2\pi & \frac{\pi}{3}<t<5\pi/3 \\ t & \frac{5\pi}{3}\le t\le 2\pi \end{cases}$$

را که یک تغییر در پارامتر مجاز می باشد، اعمال کنیم، معادله تبدیل یافته عبارت است از

$$\vec{r}=[\cos\theta(t)][2\cos\theta(t)-1]\vec{i}+[\sin\theta(t)][2\cos\theta(t)-1]\vec{j}, \quad 0\le t\le 2\pi$$

که همان مجموعه نقاط را مشخص می‌کند، اما در جهت نمایش داده شده در شکل ۲۱ (ج) می باشد. با توجه به تعریف، این منحنی همان منحنی بالا نیست. بنابراین یک منحنی نباید به عنوان یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{R}^3$ در نظر گرفته شود بلکه به عنوان یک روش کلی برای پیمودن مجموعه‌ای از نقاط مشخص شده توسط خانواده‌ای از نمایش‌های پارامتریک هم ارز باید در نظر گرفته شود.



شکل ۲۲

شکل ۲۱

مثال ۴۲. یک مثال مهم از منحنی فضایی، مارپیچ مستدیر

$$\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\vec{k} \quad a,b\neq 0, \quad -\infty<t<\infty$$

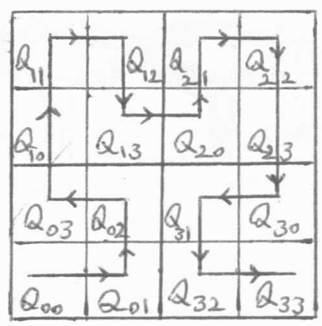
یا

$$r_1=a\cos t, \quad r_2=a\sin t, \quad r_3=bt, \quad a,b\neq 0, \quad -\infty<t<\infty$$

نشان داده شده در شکل (۲۲) است. منحنی روی یک استوانه مستدیر قائم به شعاع $|a|$ به معادلات $x=a\cos t$ و $y=a\sin t$ برای $-\infty<t<\infty$ قرار دارد. معادله $z=bt$ نقاط منحنی را بطور یکنواخت در جهت محور zها تغییر می دهد، وقتی t به اندازه 2π افزایش می‌یابد، x و y به مقادیر اولیه خود باز می‌گردند در حالی که z برای $b>0$ صعود و برای $b<0$ به اندازه $2\pi|b|$ که یک پیچ مارپیچ است، تغییر می‌کند.

مثال ۴۳. همواره می‌توان فاصله واحد $0\le t\le 1$ را بطور پیوسته بروی مربع واحد در $\mathbb{R}^2$ به معادلات $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ نگاشت که حاصل یک منحنی که در ناحیه دوبعدی می باشد، خواهد بود، چنین نگاشتی را منحنی پیانو نامیم و به صورت زیر ساخته می‌شود. مربع واحد $Q: 0\le x\le 1, \ 0\le y\le 1$ را به چهار مربع مساوی تقسیم می‌کنیم که با مرز مشترک آنها

Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 می‌نامیم. فرض کنید هر یک از Q_i ها را مجدداً به چهار مربع مساوی تقسیم می‌کنیم و با $Q_{i0}, Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}$ نشان می‌دهیم و مجدداً هر یک را به چهار مربع مساوی تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب. علاوه بر آن فرض کنید مربع‌ها اندیس‌گذاری شده به طوری که اگر از مربع‌ها حرکت کنیم، این حرکت به طریقی است که زیر اندیس‌ها صعودی است. به این طریق قوسی به دست می‌آید که خودش را قطع نمی‌کند، شکل (۲۳) را ببینید.



شکل ۲۳

هر t_0 در $0 \le t \le 1$ را می‌توان به صورت منحصر به فردی به فرم یک بسط اعشاری نامتناهی نوشت:

$$t_0 = 0.a_1a_2a_3\cdots = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots$$

می‌توان t_0 را در پایه 4 نیز به صورت بسط اعشاری زیر در نظر گرفت

$$t_0 = \frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}+\cdots$$

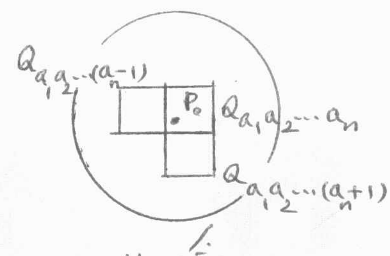
که در آن $0 \le a_i \le 3$.

به هر $t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i}$ نقطه منحصر به فرد P_0 در Q را که نقطه مشترک دنباله نامتناهی از مربع‌های تودرتوی $Q_{a_1}, Q_{a_1a_2}, Q_{a_1a_2a_3}, \ldots$ است متناظر می‌کنیم. این نگاشت از $[0,1]$ بروی Q است، زیرا می‌توان نشان داد که هر نقطه P در Q نقطه اشتراک دنباله تودرتوی مجازی از مربع‌ها است. نهایتاً، این نگاشت پیوسته است، زیرا فرض کنید $S_\varepsilon(P_0)$ یک همسایگی دلخواه از P_0 است. همان‌گونه که در شکل (۲۴) دیده می‌شود، مربع $Q_{a_1a_2\cdots a_n}$ شامل P_0 را چنان انتخاب می‌کنیم که این مربع و مربع‌های مجاور آن که همه دارای اندازه یکسان هستند، در

$S_\epsilon(P_0)$ قرار گیرند، اما در این صورت هر t در فاصله باز زیر شامل t_0 بتوی $S_\epsilon(P_0)$ نگاشته می‌شود

$$\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\cdots+\frac{a_n-1}{4^n}<t<\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\cdots+\frac{a_n+1}{4^n}$$

بنابراین نگاشت فوق پیوسته است.



شکل ۲۴

این نگاشت یک به یک نیست، زیرا نقاط روی مرزهای مربع‌ها در بیشتر از یک دنباله از مربع‌های تودرتو مشترک هستند، در واقع می‌توان نشان داد که هیچ نگاشت پیوسته‌ای که خط را بروی مربع‌ها بنگارد یک به یک نیست.

تعریف ۱۸. منحنی منتظم $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برای $t\in I$ را یک قوس منتظم نامیم، هرگاه I فاصله بسته، مثلاً $a\le t\le b$ باشد. نقاط $\vec{r}(a)$ و $\vec{r}(b)$ را نقاط انتهایی قوس نامیم.

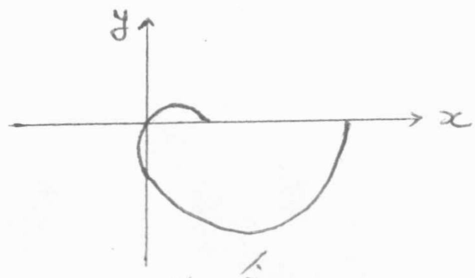
تعریف ۱۹. منحنی منتظم $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برای $t\in I$ را ساده نامیم هرگاه هیچ نقطه چندگانه نداشته باشد یعنی اگر $t_1\neq t_2$ آنگاه $\vec{r}(t_1)\neq\vec{r}(t_2)$.

تعریف ۲۰. یک قطعه قوس (قوس قطعه‌ای) از منحنی $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I، قوس $\vec{r}=\vec{r}^{*}(t)$ برای $t\in I^{*}$ است، که در آن I^{*} فاصله‌ای بسته‌ای مشمول در I است و $\vec{r}^{*}(t)$ تحدید $\vec{r}(t)$ به I^{*} می‌باشد.

مثال ۲۴. منحنی مثال ۲۷ یک قوس منتظم است، زیرا

$$x=(\cos\theta)(2\cos\theta-1)$$
$$y=(\sin\theta)(2\cos\theta-1) \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

یک نمایش منتظم بر فاصله بسته $0\le\theta\le 2\pi$ است. مشاهده می‌شود که نقاط انتهایی منحنی یکسان هستند. قسمتی از این منحنی تحدید شده به $0\le\theta\le\pi$ قوسی ساده قطعه‌ای است. (شکل (۲۵)).



شکل ۲۵

فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ و $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ دو نمایش از یک منحنی منتظم است. اگر $\frac{dt}{d\theta}>0$ آنگاه با صعود θ، t افزایش می‌یابد و $\vec{r}=\vec{r}(t)$ و $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ منحنی‌هایی هم جهت می‌باشند. اگر $\frac{dt}{d\theta}<0$، آنگاه با صعود θ، t کاهش می‌یابد و $\vec{r}=\vec{r}(t)$، $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ منحنی‌هایی مختلف‌الجهت‌اند. یک منحنی منتظم جهت‌دار شده، منحنی است که در امتداد حرکت روی آن جهتی انتخاب شده باشد. یعنی یک منحنی منتظم جهت‌دار خانواده‌ای از نمایش‌های پارامتری منتظم است که هر دو عضو این خانواده توسط تغییر پارامتر مجازی که دارای مشتق مثبت است به یکدیگر در ارتباط می‌باشند.

تصویرهای متعامد

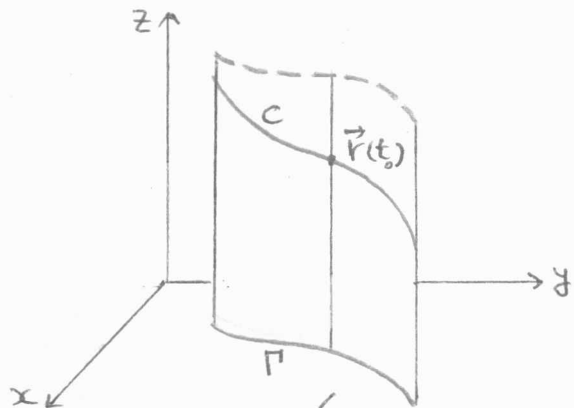
فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ نمایش منحنی C است، شکل (۲۶) را ببینید. برای t_0 ثابت، معادله

$$\vec{r}=x(t_0)\vec{i}+y(t_0)\vec{j}+\lambda\vec{k} \qquad -\infty<\lambda<\infty$$

یا $x=x(t_0)$، $y=y(t_0)$ و $z=\lambda$ معادله خط قائم به صفحه xy گذرنده از نقطه $\vec{r}(t_0)$ است. در نتیجه خانواده خطوط

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=\lambda \qquad -\infty<\lambda<\infty \qquad (۱۷)$$

یک رویه استوانه ای عمود بر صفحه xy شامل منحنی C را تولید می کند.



شکل ۲۶

اشتراک استوانه (۱۷) با صفحه xy ، $z=0$ ، تصویر قائم Γ از $\vec{r}=\vec{r}(t)$ بروی صفحه xy است. بنابراین تصویر متعامد $\vec{r}=\vec{r}(t)$ توسط

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=0$$

داده می شود. تصویرهای متعامد $\vec{r}=\vec{r}(t)$ بروی صفحات yz و xz به ترتیب عبارتند از

$$x=0,\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

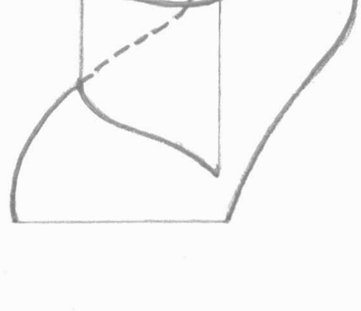
$$x=x(t),\quad y=0,\quad z=z(t).$$

مثال ۴۵. تصویر متعامد منحنی فضایی $x=t$, $y=t^2$ ، $z=t^3$ برای $-\infty<t<\infty$ بروی صفحه xy سهمی $x=t,\ y=t^2,\ z=0$ است. تصویر متعامد بروی صفحه xz منحنی درجه سوم $x=t,\ y=0,\ z=t^3$ است. منحنی مورد نظر فصل مشترک دو استوانه

$$x=t,\ y=t^2 \qquad -\infty<t<\infty$$

$$x=t,\ z=t^3 \qquad -\infty<t<\infty$$

است (شکل ۲۷).



شکل ۲۷

نمایش‌های ضمنی منحنی‌ها

یک منحنی در فضا را می‌توان به عنوان فصل مشترک دو رویه تعیین کرد، یعنی به عنوان نقاط (x,y,z) که بطور همزمان در دو رابطه به فرم زیر صدق کنند

$$F_1(x,y,z)=0, \qquad F_2(x,y,z)=0 \qquad (18)$$

اگر در یک نقطه (x,y,z) معادلات بالا در رابطه

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0$$

صدق کنند، آنگاه از قضیه تابع ضمنی نتیجه می‌شود که به ازای همسایگی از z، می‌توانیم معادله (۱۸) را برای x و y به عنوان توابعی از z حل کنیم و حاصل نمایشی به صورت زیر است

$$x=x(z), \quad y=y(z), \quad z=z$$

که در آن z به عنوان پارامتر است. این معادلات حداقل بطور موضعی یک منحنی منظم را تعریف می‌کنند.

مثال ۱.۴۶ اشتراک دو رویه درجه دوم $xz-y^2=0$ و $y-z^2=0$ منحنی درجه سوم $x=t^3,\ y=t^2,\ z=t$ همراه با محور xها یعنی $x=t, y=0, z=0$ است، زیرا برای $z\neq 0$ دو معادله را برای x و y برحسب z حل می‌کنیم، داریم

$$y=z^2, \quad x=\frac{y^2}{z}=\frac{z^4}{z}=z^3$$

یا اگر فرض کنیم $z=t$ است، داریم

$$x=t^3, \quad y=t^2, \quad z=t$$

و اگر $z=0$ باشد، آنگاه $y=z^2=0$ و x می‌تواند دلخواه باشد، یعنی محور xها را داریم. مشاهده می‌شود که نقطه $(0,0,0)$ اشتراک این دو منحنی است.

منحنی‌های منظم از کلاس C^m

تعریف ۱۲. منحنی منظم با نمایش پارامتری $\vec{r}=\vec{r}(t)$ تعریف شده روی I را یک نمایش پارامتری

منظم از کلاس C^m $(1\le m)$ نامیم هرگاه $\vec{r}(t)$ روی I از کلاس C^m باشد.

تعریف ۲۲. یک تغییر پارامتر مجاز $t=t(\theta)$ روی I_θ را تغییر پارامتر مجاز از کلاس C^m گوییم هرگاه $t(\theta)$ روی I_θ از کلاس C^m باشد.

تعریف ۲۳. دو نمایش منظم از کلاس C^m تعریف کننده یک منحنی منظم از کلاس C^m هستند، هرگاه این نمایش منظم توسط یک تغییر پارامتر مجاز از کلاس C^m قابل تبدیل به یکدیگر باشند.

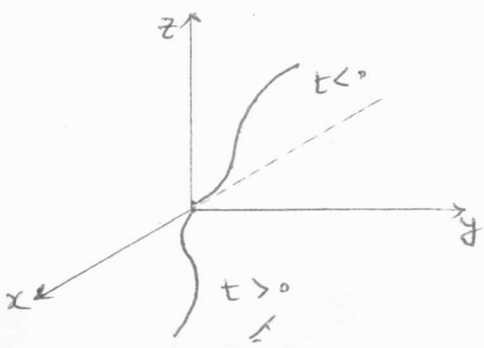
بنابراین یک منحنی منظم از کلاس C^m خانواده ای از نمایش های کلاس C^m است به طوری که هر دو عضو این خانواده توسط یک تغییر پارامتر مجاز از کلاس C^m قابل تبدیل به یکدیگر باشند.
با آنکه یک نمایش $\vec{r}=\vec{r}(t)$ از کلاس C^m برای $l\le m$ نیز از کلاس C^l است، ولی منحنی $\vec{r}=\vec{r}(t)$ از کلاس C^m لزوماً یک منحنی از کلاس C^l برای $l<m$ نیست، زیرا منحنی $\vec{r}=\vec{r}(t)$ از کلاس C^m شامل تنها نمایش های وابسته به $\vec{r}=\vec{r}(t)$ است که توسط تغییر پارامتر مجاز از کلاس C^m حاصل می شوند، در حالی که منحنی $\vec{r}=\vec{r}(t)$ از کلاس C^l برای $l<m$ علاوه بر آن شامل نمایش های وابسته به $\vec{r}=\vec{r}(t)$ می باشد که توسط تغییر پارامتر مجاز از کلاس C^l به دست می آیند نه از کلاس C^m.

مثال ۲۷. تابع برداری $\vec{w}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$ برای $-\infty<t<\infty$ تحلیلی است. بنابراین مارپیچ $\vec{r}=\vec{w}(t)$ را می توان به عنوان یک منحنی تحلیلی منظم در نظر گرفت مشروط به آنکه تنها نمایش هایی را در نظر بگیریم که وابسته به تغییر پارامتر تحلیلی است.

مثال ۲۸. نمایش زیر را در نظر بگیرید

$$\vec r=\begin{cases} t\,\vec i+e^{-1/t^2}\,\vec k & t<0\\ 0 & t=0\\ t\,\vec i+e^{-1/t^2}\,\vec j & t>0\end{cases}$$

این نمایش از کلاس C^∞ است و همراه با تمام نمایش های وابسته به آن از کلاس C^∞ یک منحنی از کلاس C^∞ را تعریف می‌کند (شکل (۲۸)). مشاهده می‌شود که برای $t<0$ منحنی در صفحه xz و برای $t>0$ منحنی در صفحه xy قرار دارد.



شکل ۲۸

طول قوس

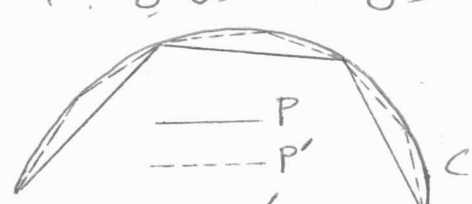
طول یک قوس برحسب طولهای قوس های چندبرقطریی تعریف می‌شود. فرض کنید قوس C، نه لزوماً منظم، توسط $\vec r=\vec r(t)$ برای $a\le t\le b$ داده شده‌است و زیرتقسیم

$$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$$

از فاصله $a\le t\le b$ را درنظر بگیرید. متناظر به این زیرتقسیم، دنباله نقاط

$$\vec r_0=\vec r(t_0),\quad \vec r_1=\vec r(t_1),\ \dots,\ \vec r_n=\vec r(t_n)$$

در $\mathbb{R}^3$ را داریم که از وصل متوالی نقاط متوالی این دنباله، یک قوس چندبرقطریی P حاصل می‌شود (شکل (۲۹)).



شکل ۲۹

طول پاره خط بین دو نقطه متوالی $\vec r_{i-1}$ و $\vec r_i$ برابر $\|\vec r_i-\vec r_{i-1}\|$ است. بنابراین طول P برابر است با

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n}\|\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1}\|=\sum_{i=1}^{n}\|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\| \qquad (19)$$

حال فرض کنید قوس چندبر تقریبی بهتر P' را با اضافه کردن نقاط به دست آوریم. چون طول یک ضلع چندبر کوچکتر یا مساوی مجموع طول های اضلاع دیگر این چندبر است، پس طول P کوچکتر یا مساوی طول P' است.

$$S(P)\leq S(P')$$

بنابراین برای تعریف طول قوس C بهترین انتخاب بزرگترین طول در بین تمام قوس های چندبر تقریبی ممکن است. برای این منظور، ابتدا تعریف زیر را بیان می کنیم

تعریف ۲۴. قوس $\vec{r}=\vec{r}(t)$ برای $a\leq t\leq b$ را اصلاح پذیر نامیم، هرگاه مجموعه S شامل تمام $S(P)$ های ممکن از بالا کراندار باشد. در این حالت مجموعه S دارای یک سوپریمم است که آن را طول قوس $\vec{r}=\vec{r}(t)$ نامیم.

یادآوری می کنیم که یک مجموعه S از اعداد حقیقی را از بالا کراندار گوییم، هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در S، $x\leq M$. در این حالت عدد M را یک کران بالا برای S نامیم.

توجه کنید اگر M یک کران بالایی S باشد، آنگاه هر L با شرط $M\leq L$ نیز یک کران بالایی است. با توجه به خواص اساسی اعداد حقیقی، می دانیم که اگر S دارای یک کران بالایی M باشد آنگاه S دارای کوچکترین کران بالایی یا سوپریمم است، یعنی کران بالایی s به طوری که اگر L هر کران بالایی دیگری باشد، آنگاه $L\geq s$.

طول قوس مستقل از پارامتر است. زیرا فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I_t و $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ روی I_θ دو نمایش C است به طوری که $t=t(\theta)$ یک به یک باشد. برای هر زیرتقسیم $\theta_0<\theta_1<\dots<\theta_{n-1}<\theta_n$ از I_θ زیرتقسیم منحصربفرد $t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n$ از I_t وجود دارد یا وابسته به جهت آن $t_n<t_{n-1}<\dots<t_0$، که در آن برای $i=1,\dots,n$، $t_i=t_i(\theta)$ اما

قوس چندبر P است یا برعکس آن می‌باشد. بنابراین مجموعه S شامل طولهای تمام قوسهای چندبر تقریبی مستقل از پارامتر است و در نتیجه مستقل از سوپریمم S است که طول C می‌باشد.

مثال ۴۹. قوس $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ برای $0 \le t \le 1$ اصلاح‌پذیر است. زیرا زیرتقسیم $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ را در نظر بگیرید، طول قوس چندبر تقریبی برابر است با

$$\begin{aligned}
S(P) &= \sum_{i=1}^{n} \| (t_i\vec{i} + t_i^2\vec{j}) - (t_{i-1}\vec{i} + t_{i-1}^2\vec{j}) \| \\
&= \sum_i \| (t_i - t_{i-1})\vec{i} + (t_i^2 - t_{i-1}^2)\vec{j} \| \\
&\le \sum_i \left[|t_i - t_{i-1}| \|\vec{i}\| + |t_i^2 - t_{i-1}^2| \|\vec{j}\| \right] \\
&\le \sum_i \left[(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1}) \right] \\
&\le \sum_i (t_i - t_{i-1})(1 + t_i + t_{i-1}) \\
&\le 3 \sum_i (t_i - t_{i-1}) = 3
\end{aligned}$$

زیرا $0 \le t_{i-1} < t_i \le 1$ و $1 + t_{i-1} + t_i \le 3$ و $\sum_i (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = 1$. بنابراین برای هر P کمیت $S(P)$ به 3 کراندار است. در اینجا قوس اصلاح‌پذیر است و دارای طولی مساوی با سوپریمم $S(P)$ است.

مثال ۵۰. منحنی

$$x = t$$
$$y = \begin{cases} t\cos\frac{1}{t} & 0 < t \le 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

همانگونه که در شکل (۲۰) نشان داده شده، اصلاح‌پذیر نیست. زیرا با استفاده از زیرتقسیم

$$0,\ 1/(N-1)\pi,\ \dots,\ 1/2\pi,\ 1/\pi,\ 1$$

داریم

$$\begin{aligned}
S(P) = &\left\| \frac{1}{(N-1)\pi}\vec{i} + \frac{1}{(N-1)\pi}[\cos(N-1)\pi]\vec{j} \right\| \\
&+ \left\| \left[\frac{1}{(N-2)\pi} - \frac{1}{(N-1)\pi}\right]\vec{i} + \left[\frac{1}{(N-2)\pi}\cos(N-2)\pi - \frac{1}{(N-1)\pi}\cos(N-1)\pi\right]\vec{j} \right\| \\
&+ \dots + \left\| \left[1 - \frac{1}{\pi}\right]\vec{i} + \left[\cos 1 - \frac{1}{\pi}\cos\pi\right]\vec{j} \right\|
\end{aligned}$$

اگر جملات اول و آخر را حذف کنیم، آن گاه

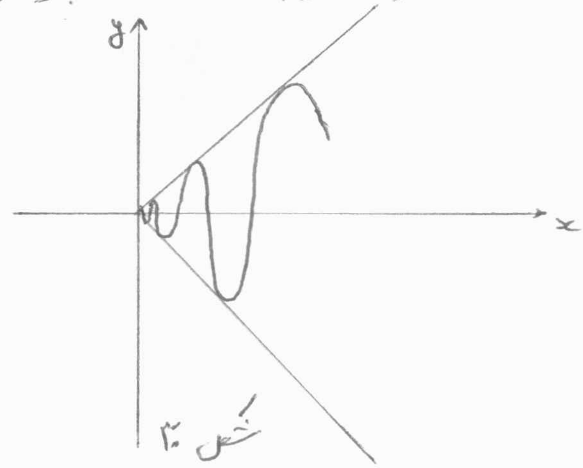
$$S(P) \geq \sum_{n=1}^{N-2} \left\| \left[\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi}\right]\vec{i} + \left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi\right]\vec{j} \right\|$$

$$\geq \sum_{n=1}^{N-2} \left\| \left[\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi\right]\vec{j} \right\|$$

$$= \sum_{n=1}^{N-2} \left| (-1)^n \frac{1}{n\pi} - (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\pi} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{N-2} \left| \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{(n+1)\pi} \right| \geq 2\sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n+1}$$

اما $\sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n+1}$ واگرا است. یعنی $S(P)$ را می‌توان به دلخواه برای Nهای به اندازه کافی بزرگ، بزرگ اختیار کرد. در نتیجه منحنی اصلاح‌پذیر نیست.



شکل ۳۰

قضیه ۱۷. قوس منظم $\vec{r} = \vec{r}(t)$، برای $a \leq t \leq b$ اصلاح‌پذیر است و طول آن توسط انتگرال

$$s = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

اثبات. زیرتقسیم دلخواه $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$S(P) = \sum_i \|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}\| = \sum_i \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_i \|(x(t_i) - x(t_{i-1}))\vec{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\vec{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\vec{j}\|$$

$$\leq \sum_i \left[|x(t_i) - x(t_{i-1})| + |y(t_i) - y(t_{i-1})| + |z(t_i) - z(t_{i-1})| \right]$$

$$\leq \sum_i \left[|x'(\theta_i)|(t_i - t_{i-1}) + |y'(\theta_i')|(t_i - t_{i-1}) + |z'(\theta_i'')|(t_i - t_{i-1}) \right]$$

که در آن از قضیه مقدار میانگین لاگرانژ برای $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ استفاده کرده‌ایم. چون $x'(t)$،

$y'(t)$ و $z'(t)$ روی فاصله بسته $a \le t \le b$ پیوسته اند، پس روی $a \le t \le b$ کرانداراند،
مثلا $|x'(t)| \le M_1$ ، $|y'(t)| \le M_2$ و $|z'(t)| \le M_3$. بنابراین

$$S(P) \le (M_1+M_2+M_3)\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1}) \le (M_1+M_2+M_3)(b-a)$$

بنابراین $S(P)$ برای هر زیرتقسیم دلخواه از $[a,b]$ به $(M_1+M_2+M_3)(b-a)$ کراندار است یعنی قوس منظم $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی $a \le t \le b$ اصلاح پذیر است.

حال فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است. چون $x'(t)$ ، $y'(t)$ و $z'(t)$ روی $a \le t \le b$ پیوسته اند پس روی $[a,b]$ پیوسته یکنواخت هستند. یعنی $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که

$$
\begin{aligned}
|x'(t)-x'(t')| &< \frac{\varepsilon}{9(b-a)}\\
|y'(t)-y'(t')| &< \frac{\varepsilon}{9(b-a)} \qquad (۲۰)\\
|z'(t)-z'(t')| &< \frac{\varepsilon}{9(b-a)}
\end{aligned}
$$

برای هر $|t-t'|<\delta$. همچنین طبق تعریف انتگرال، δ_2 وجود دارد به طوری که برای $|t_i-t_{i-1}|<\delta_2$
داریم

$$\left|\int_a^b \|\vec{r}'(t)\|dt-\sum_{i=1}^{n}\Big([|x'(\theta_i)|+|y'(\theta_i)|+|z'(\theta_i)|](t_i-t_{i-1})\Big)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad t_{i-1}\le\theta_i\le t_i \qquad (۲۱)$$

حال فرض کنید $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. پس زیرتقسیم $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ و چندبر تقریبی P وجود دارد به طوری که $(t_i-t_{i-1})<\delta$ و

$$|S-S(P)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (۲۲)$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
I=\left|S-\int_a^b\|\vec{r}'(t)\|dt\right| &\le |S-S(P)|+\left|S(P)-\int_a^b\|\vec{r}'(t)\|dt\right|\\
&\le \frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum_{i=1}\|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\|-\int_a^b\|\vec{r}'(t)\|dt\right|\\
&\le \frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum\|(x(t_i)-x(t_{i-1}))\vec{i}+(y(t_i)-y(t_{i-1}))\vec{j}+(z(t_i)-z(t_{i-1}))\|-\int_a^b\|\vec{r}'(t)\|dt\right|
\end{aligned}
$$

حال از قضیه مقدار میانگین نتیجه می شود که

$$I\le\frac{\varepsilon}{3}+\left|\sum_i\|x'(t_i')\vec{i}+y'(t_i'')\vec{j}+z'(t_i''')\vec{k}\|(t_i-t_{i-1})-\int_a^b\|\vec{r}'(t)\|dt\right|$$

و با اضافه و کم کردن $\sum_i\|\vec{r}'(t_i)\|(t_i-t_{i-1})$ داریم

$$I \le \frac{\epsilon}{3} + \left|\sum_i \vec r\,'(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \vec r\,'(t)\,dt\right|$$
$$+ \left|\sum_i \left[\|x'(t_i')\vec i + y'(t_i'')\vec j + z'(t_i''')\vec k\| - \|\vec r\,'(t_i)\|\right](t_i - t_{i-1})\right|$$

با استفاده از (۲۱) و نامساوی $\big||a|-|b|\big| \le |a+b|$ داریم

$$I < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\sum_i \left[|x'(t_i')-x'(t_i)| + |y'(t_i'')-y'(t_i)| + |z'(t_i''')-z'(t_i)|\right](t_i-t_{i-1})$$

نهایتاً با استفاده از (۲۰)

$$I<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3(b-a)}\sum_i(t_i-t_{i-1})<\epsilon$$

چون ϵ دلخواه است پس

$$I=\left|s-\int_a^b\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|dt\right|=0$$

یا

$$s=\int_a^b\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|dt=\int_a^b\|\vec r\,'(t)\|\,dt$$

مثال ۱۸. طول قسمتی از قوس مارپیچ $\vec r=(a\cos t)\vec i+(b\sin t)\vec j+bt\,\vec k$ برای $0\le t\le 2\pi$ را بدست آورید.

حل.

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2)^{1/2}\,dt=2\pi(a^2+b^2)^{1/2}$$

طول قوس به عنوان یک پارامتر

فرض کنید $\vec r=\vec r(t)$ یک منحنی منظم روی I است. تابع

$$s=s(t)=\int_{t_0}^t\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|dt \qquad (۲۲)$$

را در نظر بگیرید. اگر $t\ge t_0$ آنگاه $s\ge 0$ و s برابر با طول قوس قسمتی از منحنی بین $\vec r(t_0)$ و $\vec r(t)$ می‌باشد. اگر $t<t_0$ آنگاه $s<0$ و برابر با منفی طول قوس قسمتی از منحنی بین $\vec r(t_0)$ و $\vec r(t)$ می‌باشد.

از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌شود که (۲۲) دارای مشتق ناصفر پیوسته

به صورت

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|dt=\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|$$

است. بنابراین تابع $s=s(t)$ یک تغییر پارامتر مجاز روی I است. علاوه بر آن $s(t)$ از کلاس C^m روی I است هرگاه $\vec r(t)$ از کلاس C^m باشد. در نتیجه طول قوس s را می‌توان در امتداد منحنی به عنوان یک پارامتر اختیار کرد.

توجه کنید که یک نمایش برحسب طول قوس منحصر بفرد نیست، زیرا وابسته به انتخاب نقطه ابتدایی t_0 (که در آن $s=0$) و جهت حرکت منحنی است، یعنی

$$s(t)=\int_{t}^{t_0}\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|dt=-\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|dt$$

بنابراین یک نمایش $\vec r=\vec r(s)$ روی I_s تعریف می‌کنیم و آن را نمایش برحسب پارامتر طول قوس یا یک نمایش طبیعی نامیم هرگاه $\left\|\frac{d\vec r}{ds}\right\|=1$.

قضیه ۱۸. فرض کنید $\vec r=\vec r(s)$ یک نمایش طبیعی منحنی C است. در این صورت

الف) $|s_2-s_1|$ طول قوس قسمتی از منحنی C بین $\vec r(s_1)$ و $\vec r(s_2)$ است.

ب) اگر $\vec r=\vec r^*(s^*)$ هر نمایش طبیعی دیگری از منحنی C باشد، آنگاه $s=\pm s^*+c$ که در آن c ثابت است.

ج) اگر $\vec r=\vec r^*(t)$ نمایشی برای منحنی C در همان جهت $\vec r=\vec r(s)$ باشد آنگاه $\frac{ds}{dt}=\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|$. در غیر این صورت $\frac{ds}{dt}=-\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|$.

اثبات. الف) اگر $s_1\le s_2$ آنگاه طول قوس برابر است با

$$\int_{s_1}^{s_2}\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|ds=\int_{s_1}^{s_2}1\,ds=s_2-s_1=|s_2-s_1|$$

اگر $s_1>s_2$ آنگاه طول قوس برابر است با

$$\int_{s_2}^{s_1}\left\|\frac{d\vec r}{ds}\right\|ds=\int_{s_2}^{s_1}ds=s_1-s_2=|s_2-s_1|$$

ب) فرض کنید $s=s(s^*)$ آنگاه $\frac{d\vec r}{ds^*}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{ds^*}$ و $\left\|\frac{d\vec r}{ds^*}\right\|=\left\|\frac{d\vec r}{ds}\right\|\left|\frac{ds}{ds^*}\right|$

اما $1=\left\|\frac{d\vec r}{ds^*}\right\|=\left\|\frac{d\vec r}{ds}\right\|$. بنابراین $\left|\frac{ds}{ds^*}\right|=1$ یا $\frac{ds}{ds^*}=\pm1$ یا $s=\pm s^*+c$ (c ثابت)

ج) از قانون زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

پس $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| \left|\frac{ds}{dt}\right|$ چون $\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = 1$ پس

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

حال اگر $s = s(t)$ توسط انتگرال (۲۲) تعریف شود، آنگاه $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$ یک نمایش طبیعی است، زیرا

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| \left|\frac{dt}{ds}\right| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| / \left|\frac{ds}{dt}\right| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| / \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = 1$$

مثال ۵۲. نمایش طبیعی مارپیچ

$$\vec{r} = (a\cos t)\vec{i} + (a\sin t)\vec{j} + bt\,\vec{k}$$

را به دست آورید.

حل. داریم

$$s = \int_0^t \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_0^t (a^2+b^2)^{1/2}\, dt = (a^2+b^2)^{1/2}\, t$$

حال اگر قرار دهیم $t = (a^2+b^2)^{-1/2} s$ ، نمایش طبیعی زیر را داریم

$$\vec{r} = a\cos\left((a^2+b^2)^{-1/2} s\right)\vec{i} + a\sin\left((a^2+b^2)^{-1/2} s\right)\vec{j} + b(a^2+b^2)^{-1/2} s\,\vec{k}$$

نمادگذاری. از این قسمت به بعد مشتق‌گیری نسبت به پارامتر طبیعی s را با نقطه و مشتق‌گیری نسبت به هر پارامتر دیگری را با همان نماد ′ نمایش می‌دهیم. برای مثال

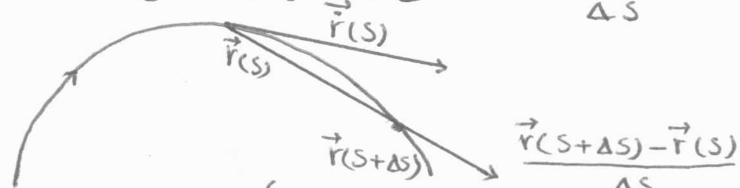
$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \quad \vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{r}\,'' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

بردار یکه مماس

فرض کنید $\vec r=\vec r(s)$ نمایش طبیعی منحنی منتظم C است. مشتق $\dot{\vec r}(s)=\frac{d\vec r}{ds}$ را برای تعریف جهت مماس بر C در نقطه $\vec r(s)$ مورد استفاده قرار می‌دهیم. این مطلب با مشاهده هندسی هماهنگی دارد، زیرا

$$\dot{\vec r}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec r(s+\Delta s)-\vec r(s)}{\Delta s}$$

و $\frac{\vec r(s+\Delta s)-\vec r(s)}{\Delta s}$ قاطع بر منحنی C نشان داده شده در شکل (۳۱) است.



شکل ۳۱

بردار $\dot{\vec r}$ نیز بردار یکه است زیرا در یک نمایش طبیعی داریم $\|\dot{\vec r}\|=\|\frac{d\vec r}{ds}\|=1$.
اگر $\vec r=\vec r(s^*)$ نمایش طبیعی دیگری برای C باشد آن‌گاه از قضیه (۱۸) داریم $s=\pm s^*+$ ثابت
و

$$\frac{d\vec r}{ds^*}=\frac{d\vec r}{ds}\frac{ds}{ds^*}=\pm\frac{d\vec r}{ds}$$

یعنی $\frac{d\vec r}{ds^*}$ دارای همان جهت یا مخالف $\frac{d\vec r}{ds}$ است، وابسته به اینکه $\vec r=\vec r(s^*)$ هم‌جهت یا مختلف‌الجهت $\vec r=\vec r(s)$ باشد. بنابراین $\dot{\vec r}$ یک کمیت جهت‌پذیر است. همان‌گونه که در شکل (۳۱) نشان داده شده، در جهت صعود s است.

بردار $\dot{\vec r}(s)$ بردار یکه مماس بر منحنی جهت‌دار $\vec r=\vec r(s)$ در $\vec r(s)$ است و آن را با

$$\vec t=\vec t(s)=\dot{\vec r}(s)$$

نمایش می‌دهیم.

مثال ۵۴. در امتداد مارپیچ $\vec r=a\cos t\,\vec i+a\sin t\,\vec j+bt\,\vec k$ ، $a,b\neq 0$ داریم

$$\frac{d\vec r}{dt}=-a\sin t\,\vec i+a\cos t\,\vec j+b\vec k$$

و $\|\frac{d\vec r}{dt}\|=(a^2+b^2)^{1/2}$. بنابراین

$$\vec t=\frac{d\vec r}{ds}=\frac{d\vec r}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{d\vec r}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=\frac{d\vec r}{dt}\Big/\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\,\vec i+a\cos t\,\vec j+b\vec k)$$

که در آن از این واقعیت که $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\|$، استفاده کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که در امتداد مارپیچ بردار یکه مماس $\vec{t}$ زاویه ثابت $\theta = \cos^{-1}(\vec{t}\cdot\vec{k}) = \cos^{-1} b(a^2+b^2)^{-1/2}$ با محور zها می‌سازد.

مشابه بردار یکه مماس، دیگر کمیت‌های هندسی در امتداد منحنی برحسب یک نمایش طبیعی تعریف می‌شوند. با توجه به قانون زنجیره‌ای و رابطه $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\vec{r}}{dt}\|$ این کمیت‌ها را همگی می‌توانند برحسب یک پارامتر دلخواه نیز به دست آیند.

اگر $\vec{r}=\vec{r}(t)$ یک نمایش دلخواه منحنی C هم‌جهت با $\vec{r}=\vec{r}(s)$ باشد، آنگاه

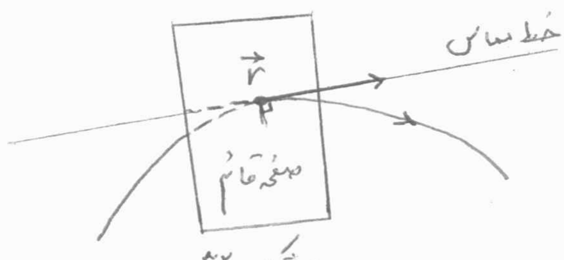
$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = t\ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = t\ \|\vec{r}\,'\|$$

بنابراین بردار یکه مماس برحسب پارامتر دلخواه t نیز قابل محاسبه است و داریم

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|}$$

خط مماس و صفحه قائم

تعریف ۲۵. خط مستقیم گذرنده از نقطه $\vec{r}$ روی منحنی منظم C موازی با بردار مماس در $\vec{r}$ را خط مماس به C در $\vec{r}$ نامیم (شکل (۴۲)).



شکل ۴۲

از معادله برداری خط، نتیجه می‌شود که خط مماس در نقطه $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$ توسط

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{t}_0 \qquad -\infty < k < \infty$$

داده می‌شود که در آن $\vec{t}_0 = \vec{t}(t_0)$ بردار یکه مماس در $\vec{r}_0$ است.

تعریف ۲۶. صفحه گذرنده از $\vec{r}$ متعامد به خط مماس در $\vec{r}$ را صفحه قائم به C در $\vec{r}$ نامیم.

از معادله برداری صفحه، نتیجه می‌شود که معادله صفحه قائم در $\vec{r}_0$ توسط

$$(\vec{r}-\vec{r}_{\circ}).\vec{t}_{\circ}=0$$

مناسب‌تر این است که متغیر دومی مانند $\vec{R}$ را برای نمایش نقاط روی یک شکل در ارتباط با $\vec{r}=\vec{r}(t)$ در معادلات بکار ببریم. با توجه به این متغیر، معادله خط مماس بر یک نقطه دلخواه $\vec{r}$ روی C را به صورت

$$\vec{R}=\vec{r}+k\vec{t} \qquad -\infty<k<\infty \tag{۲۴}$$

اعلام کنیم و معادله صفحه قائم در $\vec{r}$ از الفبم

$$(\vec{R}-\vec{r}).\vec{t}=0 \tag{۲۵}$$

بنویسیم.

نهایتاً، توجه داریم که $\vec{r}'$ موازی با $\vec{t}$ است. پس خط مماس و صفحه قائم عبارتند از

$$\vec{R}=\vec{r}+k\vec{r}' \qquad -\infty<k<\infty$$

$$(\vec{R}-\vec{r}).\vec{r}'=0$$

مثال ۵۴. خط مماس بر منحنی $\vec{r}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ در $t=1$ را بدست آورید.

حل. معادله خط مماس عبارت است از

$$\vec{R}=\vec{r}(1)+k\vec{r}'(1) \qquad -\infty<k<\infty$$

یا

$$\vec{R}=(1+k)\vec{i}+(1+2k)\vec{j}+(1+3k)\vec{k} \qquad -\infty<k<\infty$$

مثال ۵۵. در مثال ۵۴ معادله صفحه قائم بر منحنی داده شده در $t=1$ را بدست آورید.

حل. $(\vec{R}-\vec{r}(1))\cdot\vec{r}'(1)=0$

$$(x-1)+(y-1)(2)+(z-1)(3)=0$$

یا $x+2y+3z=6$ معادله صفحه قائم مورد نظر است.

انحنا

فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(s)$ یک منحنی منتظم از کلاس ≥ 2 است. در این صورت بردار مماس به منحنی یعنی $\vec{t}=\vec{t}(s)=\dot{\vec{r}}(s)$ از کلاس C^1 است و می‌توان از آن مشتق گرفت

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\dot{\vec{t}}(s)=\ddot{\vec{r}}(s)$$

با آن که بردار یکه مماس $\vec{t}$ وابسته به جهت منحنی C است، $\dot{\vec{t}}$ مستقل از جهت است.
زیرا فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(s^*)$ یک نمایش طبیعی دیگر C است. بردار یکه مماس $\vec{t}^*=\frac{d\vec{r}}{ds^*}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $s=\pm s^*+$ ثابت و

$$\frac{d\vec{t}^*}{ds^*}=\frac{d}{ds^*}\left(\frac{d\vec{r}}{ds^*}\right)=\frac{d}{ds^*}\left(\pm\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\pm\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\frac{ds}{ds^*}$$
$$=(\pm 1)^2\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\frac{d\vec{t}}{ds}$$

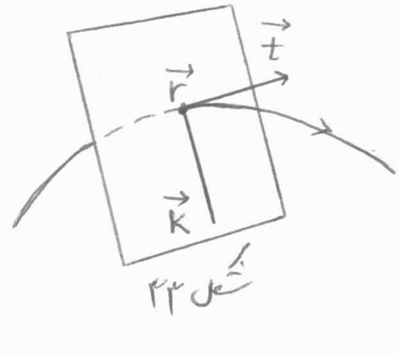
بنابراین $\dot{\vec{t}}$ مستقل از جهت است.

تعریف ۲۷. بردار $\dot{\vec{t}}(s)$ را بردار انحنای C در نقطه $\vec{r}(s)$ نامیم و با

$$\vec{k}=\vec{k}(s)=\dot{\vec{t}}(s)$$

نمایش می‌دهیم.

چون $\vec{t}$ یک بردار یکه است، پس $\vec{k}=\dot{\vec{t}}$ عمود بر $\vec{t}$ است و بنابراین موازی با صفحه قائم است. وقتی این بردار ناصفر باشد، جهت آن در جهت چرخیدن منحنی است، همان گونه که در شکل (۳۳) دیده می‌شود.



شکل ۳۳

تعریف ۲۸.
مقدار بردار انحنا را با

$$|k|=\|\vec{k}(s)\| \qquad (۲۶)$$

نشان داده و آن را انحنای منحنی C در $\vec{r}(s)$ نامیم. عکس انحنا را با

$$\rho = \frac{1}{|k|} = \frac{1}{\|\vec{k}(s)\|} \qquad (۲۷)$$

نمایش داده و شعاع انحنا در $\vec{r}(s)$ نامیده می‌شود.

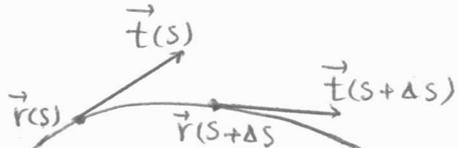
نقطه‌ای روی C که در آن بردار انحنا $\vec{k}=\vec{0}$ باشد را نقطه عطف نامیم، در نتیجه در نقطه عطف منحنی مقدار انحنا $|k|$ صفر و شعاع انحنای ρ بینهایت است.

در قضیه زیر ثابت می‌کنیم که انحنا برابر با نرخ تغییر جهت مماس نسبت به طول قوس است. بنابراین در امتداد یک منحنی که تغییر جهت مماس نسبت به طول قوس روان باشد، مثلاً یک دایره با شعاع کوچک، انحنا مقداری بزرگ است یا به طور معادل شعاع انحنا مقداری کوچک است.

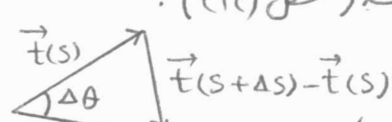
قضیه ۱۹. فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(s)$ از کلاس ≥ 2 بوده و $\Delta\theta$ نشان دهنده زاویه بین بردار یکه مماس $\vec{t}(s)$ در $\vec{r}(s)$ و بردار یکه مماس $\vec{t}(s+\Delta s)$ در یک نقطه نزدیک به آن یعنی $\vec{r}(s+\Delta s)$ با $\Delta s>0$ است (شکل   را ببینید) در این صورت انحنای منحنی برابر است با

$$|k| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

یعنی، $|k|$ اندازه نرخ تغییر جهت بردار یکه مماس نسبت به طول قوس است.



اثبات. چون $\vec{t}$ بردار یکه است، پس $\|\vec{t}(s+\Delta s)-\vec{t}(s)\|$ قاعده مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع به طول ۱ می‌باشد (شکل (۳۴)).



شکل ۳۴

بنابراین

$$\|\vec{t}(s+\Delta s)-\vec{t}(s)\| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta + o(\Delta\theta)$$

که در آن از بسط تیلور تابع سینوس استفاده کرده‌ایم. در نتیجه

$$|k| = \|\dot{\vec t}\| = \left\|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec t(s+\Delta s)-\vec t(s)}{\Delta s}\right\|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{t(s+\Delta s)-t(s)}{\Delta s}\right\|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta + o(\Delta\theta)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\left(1+\frac{o(\Delta\theta)}{\Delta}\right)\right]$$

چون $\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\theta = 0$ در نتیجه $\lim_{\Delta s\to 0}\frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 0$ و

$$|k| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

مثال ۵۶. در امتداد دایره‌ای به شعاع a به معادله برداری

$$\vec r = a\cos t\,\vec i + b\sin t\,\vec j \qquad a>0$$

انحنا و شعاع انحنا را بدست آورید.

حل. $\frac{d\vec r}{dt} = -a\sin t\,\vec i + a\cos t\,\vec j$

و $\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\| = a$ ، پس

$$\vec t = \frac{d\vec r}{dt}\Big/\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\| = -\sin t\,\vec i + \cos t\,\vec j$$

و

$$\vec k = \dot{\vec t} = \frac{d\vec t}{ds} = \frac{d\vec t}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec t}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec t}{dt}\Big/\left\|\frac{d\vec r}{dt}\right\|$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\cos t\,\vec i + \sin t\,\vec j\right)$$

باید توجه کرد که جهت $\vec k$ بطرف مبدا است. انحنا ثابت می‌باشد و

$$|k| = \|\vec k\| = \frac{1}{a}$$

و شعاع انحنای منحنی $\rho = \frac{1}{|k|} = a$. بنابراین شعاع انحنای یک دایره برابر با شعاع دایره است.

مثال ۵۷. در امتداد مارپیچ

$$\vec r(t) = a\cos t\,\vec i + a\sin t\,\vec j + bt\,\vec k, \qquad a>0,\ b\neq 0$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

و $\|\vec{k}\| = \|\dot{\vec{t}}\| = 0$ ، بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲۰. یک منحنی منتظم از کلاس ≥ 2 خط مستقیم است اگر و تنها اگر انحنای آن متحد صفر باشد.

در قضیه بعد، فرمولی برای تعیین انحنای یک منحنی برحسب پارامتر دلخواه، به طور مستقیم ارائه می دهد.

قضیه ۲۱. اگر $\vec{r} = \vec{r}(t)$ یک نمایش دلخواه منحنی از کلاس ≥ 2 باشد آن گاه

$$|k| = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}.$$

اثبات. r' و r'' را به دست می آوریم.

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{\vec{r}} s'$$

$$\vec{r}'' = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} s') = \dot{\vec{r}}\frac{ds'}{dt} + s'\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \dot{\vec{r}} s'' + (s')^2 \ddot{\vec{r}}$$

پس

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = (\dot{\vec{r}} s') \times (\dot{\vec{r}} s'' + \ddot{\vec{r}}(s')^2)$$
$$= (s')^3 (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) = \|\vec{r}'\|^3 (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})$$

بنابراین

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = \|\vec{r}'\|^3 \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \|\vec{r}'\|^3 \|\dot{\vec{r}}\| \|\ddot{\vec{r}}\| \sin\measuredangle(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})$$

اما $\dot{\vec{r}} = \vec{t}$ و $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{t}}$ برهم عمودند و $\|\dot{\vec{r}}\| = 1$ و $\|\ddot{\vec{r}}\| = \|\dot{\vec{t}}\| = |k|$. بنابراین

$$|k| = \frac{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

بردار یکه قائم اصلی

چون منحنی C از کلاس ≥ 2 است، بردار انحنا $\vec{k} = \dot{\vec{t}} = \ddot{\vec{r}}$ بطور پیوسته در امتداد منحنی

C تغییر می‌کند، در حالی که بردار یکه در جهت $\vec{k}$ یعنی

$$\vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$$

ممکن است تعریف نشده باشد زیرا بردار $\vec{k}$ می‌تواند $\vec{0}$ باشد و امکان پرش نیز وجود دارد. بنابراین معمولاً $\vec{u}_k$ را در نظر نمی‌گیریم، اما یک بردار یکه موازی $\vec{k}$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم به طریقی که بطور پیوسته در امتداد C تا جایی که امکان داشته باشد، تغییر کند. این بردار را معمولاً با $\vec{n}=\vec{n}(s)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹. فرض کنید C منحنی از کلاس ≥ 2 است. بردار یکه موازی با بردار انحنا را بردار یکه قائم اصلی به C در نقطه $\vec{r}(s)$ نامیم. بردار $\vec{n}$ تا حد امکان در امتداد منحنی C به طور پیوسته تغییر می‌کند.

توجه کنید اگر هیچ نقطه عطفی روی C وجود نداشته باشد، یعنی برای هر s، $\vec{k}(s)\neq\vec{0}$، قرار می‌دهیم

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}(s)}{\|\vec{k}(s)\|}$$

$\vec{n}$ بردار یکه در جهت $\vec{k}$ است. در ضمن در امتداد یک خط مستقیم، $\vec{k}\equiv\vec{0}$، بردار یکه قائم اصلی $\vec{n}$ تعریف نشده است.

وقتی $\vec{n}(s)$ اختیار شده باشد، تابع پیوسته $k(s)$ در امتداد C وجود دارد به طوری که

$$\vec{k}(s) = k(s)\,\vec{n} \qquad (۲۸)$$

در نقاطی روی منحنی C که $\vec{n}$ هم‌جهت با $\vec{k}$ باشد، داریم $k=\|\vec{k}\|$. در نقاطی که $\vec{n}$ مختلف‌الجهت با $\vec{k}$ است، داریم $k=-\|\vec{k}\|$. در نقطه عطف، $\vec{k}=\vec{0}$ و $k=0$.

تعریف ۳۰. کمیت $k(s)$ تعریف شده توسط معادله (۲۸) نیز انحنای C در نقطه $\vec{r}(s)$ نامیده می‌شود.

اگر (۲۸) را در $\vec{n}$ ضرب کنیم و با استفاده از $\vec{n}\cdot\vec{n}=\|\vec{n}\|^2=1$ داریم

$$k = \vec{k}(s)\cdot\vec{n}(s) \qquad (۲۹)$$

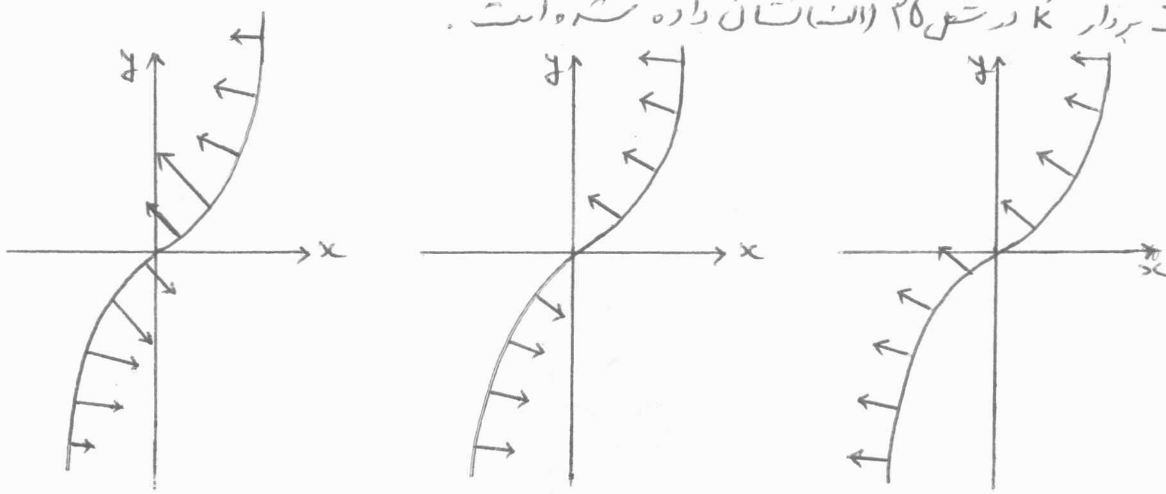
مثال. در امتداد منحنی درجه سوم $\vec{r}=t\,\vec{i}+\frac{1}{3}t^3\,\vec{j}$، (شکل) داریم

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + t^2\vec{j}, \qquad \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = (1+t^4)^{1/2}, \qquad \vec{t} = \frac{d\vec{r}/dt}{\|d\vec{r}/dt\|} = (1+t^4)^{-1/2}(\vec{i}+t^2\vec{j})$$

و

$$\vec{k} = \dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \Big/ \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = -2t(1+t^4)^{-2}(t^2\vec{i}-\vec{j})$$

جهت بردار $\vec{k}$ در شکل ۲۵ (الف) نشان داده شده است.



(الف) بردار $\vec{k}$

(ب) بردار $\vec{u}_{\vec{k}} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$

(ج) بردار $\vec{n} = \begin{cases} -\vec{u}_k & t<0 \\ \vec{j} & t=0 \\ \vec{u}_k & t>0 \end{cases}$

شکل ۲۵

در $t=0$، $\vec{k}=\vec{0}$ و نقطه عطف داریم. در اینجا $\vec{u}_{\vec{k}}$ دارای یک پرش است، شکل ۲۵ (ب).

زیرا حد $\vec{u}_k$ وقتی $t \to 0$ عبارت است از

$$\lim_{t\to 0^+} \vec{u}_{\vec{k}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t}{|t|\,(1+t^4)^{1/2}}(t^2\vec{i}-\vec{j}) = \lim_{t\to 0} \frac{-(t^2\vec{i}-\vec{j})}{(1+t^4)^{1/2}} = \vec{j}$$

$$\lim_{t\to 0^-} \vec{u}_{\vec{k}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t}{|t|\,(1+t^4)^{1/2}}(t^2\vec{i}-\vec{j}) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\vec{i}-\vec{j}}{(1+t^4)^{1/2}} = -\vec{j}$$

در محاسبه حدود بالا از

$$\frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

استفاده کرده‌ایم. حال اگر قرار دهیم

$$\vec{n}=\begin{cases} -\vec{k}/\|\vec{k}\| & t<0 \\ \vec{j} & t=0 \\ \vec{k}/\|\vec{k}\| & \end{cases} = -(1+t^4)^{-1/2}(t^2\vec{i}-\vec{j})$$

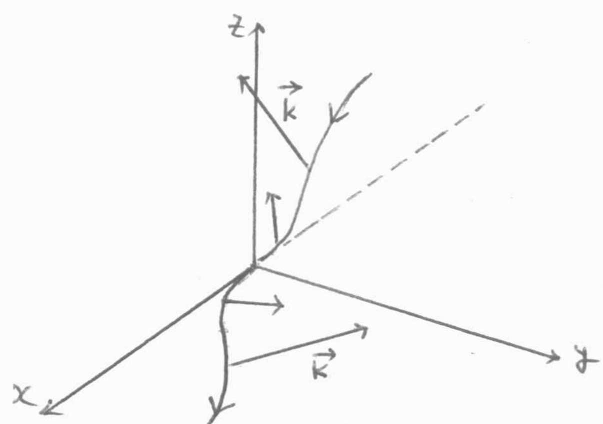
$\vec{n}$ در امتداد منحنی C بطور پیوسته تغییر می‌کند، شکل ۳۵ (ج). برای این $\vec{n}$ از معادله (۲۹) داریم

$$k=\vec{k}\cdot\vec{n}=\left[-2t(1+t^4)^{-2}(t^2\vec{i}-\vec{j})\right]\cdot\left[-(1+t^4)^{-1/2}(t^2\vec{i}-\vec{j})\right]$$
$$=2t(1+t^4)^{-3/2}$$

مثال ۵۸. منحنی C از کلاس C^{∞} زیر را در نظر بگیرید

$$\vec{r}=\begin{cases} t\vec{i}+e^{-1/t^2}\vec{k} & t<0 \\ \vec{o} & t=0 \\ t\vec{i}+e^{-1/t^2}\vec{j} & t\ \ 0 \end{cases}$$

همان گونه که در شکل (۳۶) نمایش داده شده است، منحنی برای $t<0$ در صفحه xz و برای $t>0$ در صفحه xy قرار دارد. در نتیجه برای $t<0$ بردار $\vec{K}$ در صفحه xz است و برای $t>0$ بردار $\vec{k}$ در صفحه xy قرار دارد. در اینجا تعریف $\vec{n}$ برای پیوستگی در $t=0$ غیرممکن است زیرا $\vec{k}$ از صفحه xz به صفحه xy پرش می‌کند.



شکل ۳۶

همان گونه که در مثال بالا دیده می‌شود، حتی یک منحنی از کلاس C^{∞} ممکن است دارای یک نرمال اصلی معین در نقطه عطف نباشد. بهر حال، اگر منحنی تحلیلی باشد، همواره یک بردار

قائم اصلی وجود دارد.

قضیه ۲۲. اگر $\vec{r}(s_0)$ یک نقطه عطف روی منحنی تحلیلی $\vec{r}=\vec{r}(s)$ بوده و $\vec{r}$ یک خط مستقیم نباشد آن‌گاه یک بردار یکه قائم اصلی پیوسته $\vec{n}(s)$ به منحنی در یک همسایگی s_0 وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $\vec{r}^{(k)}(s_0)$ اولین مشتق ناصفر $\vec{r}(s)$ در s_0 از مرتبه $1<k$ است. چون $\vec{r}=\vec{r}(s)$ یک خط مستقیم نیست، چنین مشتق ناصفری وجود دارد. در واقع $2<k$، زیرا در یک نقطه عطف داریم $\dot{\vec{t}}(s_0)=\ddot{\vec{r}}(s_0)=\vec{0}$. بنابراین

$$\vec{r}=\vec{r}(s_0)+\dot{\vec{r}}(s_0)(s-s_0)+\frac{\vec{r}^{(k)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k+\frac{\vec{r}^{(k+1)}(s_0)}{(k+1)!}(s-s_0)^{k+1}+\cdots$$

در نتیجه

$$\vec{t}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}(s_0)+\frac{\vec{r}^{(k)}(s_0)}{(k-1)!}(s-s_0)^{k-1}+\frac{\vec{r}^{(k+1)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^{k}+\cdots$$

و

$$\vec{k}=\dot{\vec{t}}=\frac{\vec{r}^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}(s-s_0)^{k-2}+\frac{\vec{r}^{(k+1)}(s_0)}{(k-1)!}(s-s_0)^{k-1}+\cdots$$

$$=(s-s_0)^{k-2}\left[\frac{\vec{r}^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}+\frac{\vec{r}^{(k+1)}(s_0)}{(k-1)!}(s-s_0)+\cdots\right]$$

$$=(s-s_0)^{k-2}\,\vec{\omega}(s)$$

که در آن $\vec{\omega}(s)$ در s_0 تحلیلی است و $\vec{\omega}(s_0)=\frac{\vec{r}^{(k)}(s_0)}{(k-2)!}\neq\vec{0}$. چون $\vec{\omega}(s)$ در s_0 پیوسته است، پس همسایگی $S_\delta(s_0)$ وجود دارد به طوری که برای هر $s\in S_\delta(s_0)$ داریم $\vec{\omega}(s)\neq\vec{0}$. حال بردار $\vec{n}=\frac{\vec{\omega}(s)}{\|\vec{\omega}(s)\|}$ را در نظر می‌گیریم. برای s در $S_\delta(s_0)$، بردار $\vec{n}$ دارای طول واحد و پیوسته است و $\vec{k}=\dot{\vec{t}}$ مضرب اسکالری از $\vec{n}$ است، زیرا

$$\vec{k}=(s-s_0)^{k-2}\vec{\omega}(s)=(s-s_0)^{k-2}\|\vec{\omega}(s)\|\frac{\vec{\omega}(s)}{\|\vec{\omega}(s)\|}=(s-s_0)^{k-2}\|\vec{\omega}(s)\|\vec{n}=\kappa(s)\vec{n}$$

که نتیجه مورد نظر است. توجه کنید برای این بردار $\vec{n}$، $\kappa=\|\vec{k}\|$ اگر k زوج باشد (زیرا $(s-s_0)^{k-2}\geqslant 0$)، در غیر این صورت

$$\kappa=\begin{cases}\|\vec{k}\| & s\geqslant s_0\\ -\|\vec{k}\| & s<s_0\end{cases}$$

خط قائم اصلی و صفحه بوسان

تعریف ۴۱. خط مستقیم گذرنده از نقطه $\vec{r}$ روی منحنی C موازی با بردار قائم اصلی را خط قائم اصلی به C در $\vec{r}$ نامیم.

معادله خط قائم اصلی در $\vec{r}$ عبارت است از

$$\vec{R}=\vec{r}+\lambda\vec{n} \qquad -\infty<\lambda<\infty \tag{۴۰}$$

تعریف ۴۲. صفحه موازی با بردار یکه مماس و بردار یکه قائم اصلی را صفحه بوسان به C در $\vec{r}$ نامیم.

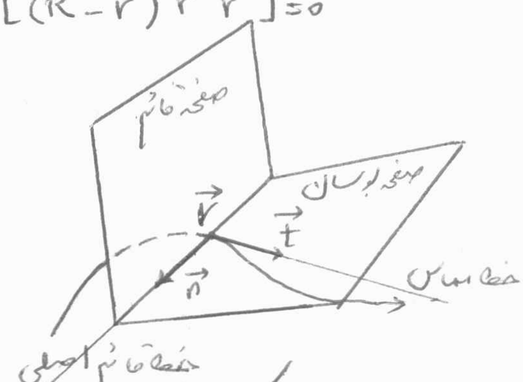
معادله صفحه بوسان در $\vec{r}$ توسط حاصل ضرب اسکالر مخلوط

$$[(\vec{R}-\vec{r})\,\vec{t}\,\vec{n}]=0 \tag{۴۱}$$

به دست می‌آید. اگر از $\vec{t}=\dot{\vec{r}}$ و $\dot{\vec{t}}=\ddot{\vec{r}}$ موازی با $\vec{n}$ استفاده کنیم، آنگاه در نقطه‌ای که $\kappa\neq 0$ معادله صفحه بوسان به صورت

$$[(\vec{R}-\vec{r})\,\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}]=0 \tag{۴۲}$$

به دست می‌آید.



شکل ۳۷

مثال ۵۹. مارپیچ $\vec{r}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

$$\vec{r}\,'=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}, \qquad \|\vec{r}\,'\|=\sqrt{2}$$

$$\vec{t}=\frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}\right)$$

$$\vec{K}=\dot{\vec{t}}=\frac{\vec{t}\,'}{\|\vec{r}\,'\|}=-\frac{1}{2}\left(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}\right)$$

چون برای هر t، $\vec{K}\neq\vec{0}$ پس

$$\vec{n}=\frac{\vec{K}}{\|\vec{K}\|}=-\left(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}\right)$$

معادله قائم اصلی در $t=\frac{\pi}{2}$ عبارت است از

$$\vec{R} = \vec{r}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \lambda \vec{n}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty<\lambda<\infty$$

یا

$$\vec{R} = (1-\lambda)\vec{j} + \frac{\pi}{2}\vec{k}$$

و معادله صفحه بوسان در $t=\frac{\pi}{2}$ عبارت است از

$$\left[\left(\vec{R}-\vec{r}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\ \vec{t}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\ \vec{n}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right]=0$$

یا

$$\det\begin{bmatrix} x & -1/\sqrt{2} & 0 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z-\frac{\pi}{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

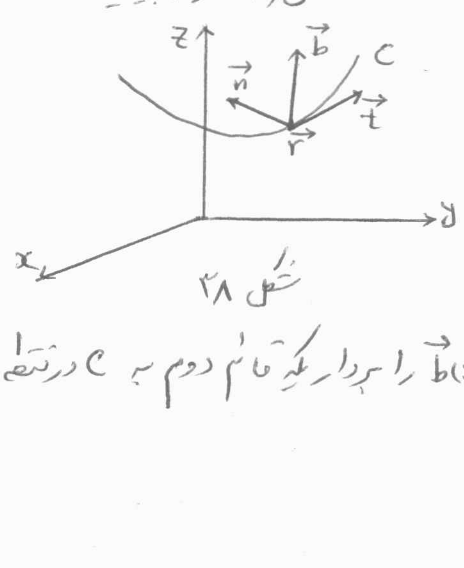
یا $x + z = \frac{\pi}{2}$.

قائم دوم و کنج متحرک

فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(s)$ یک منحنی منظم از کلاس ≥ 2 است و در امتداد C بردار $\vec{n}$ پیوسته باشد. در این صورت در هر نقطه روی C دو بردار یکه قائم پیوسته یعنی بردار یکه مماس t و بردار قائم اصلی یکه $\vec{n}$ داریم. حال بردار

$$\vec{b}(s)=\vec{t}(s)\times\vec{n}(s)$$

را در نظر بگیرید. بوضوح $\vec{b}$ پیوسته است و دارای طول یک می‌باشد و سه‌تایی $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ یک سه‌تایی متعامد یکه راستگرد است، شکل (۳۸) را ببینید.



شکل ۳۸

تعریف ۳۳. بردار $\vec{b}(s)$ را بردار یکه قائم دوم به C در نقطه $\vec{r}(s)$ و سه‌تایی $(\vec{t}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s))$

را کنج متحرک C نامیم. خط مستقیم گذرنده از $\vec{r}$ موازی با $\vec{b}$ را خط قائم دوم به C در $\vec{r}$ گوییم.

از معادله برداری خط، نتیجه می‌شود که معادله قائم دوم در $\vec{r}$ به صورت

$$\vec{R}=\vec{r}+\lambda\vec{b} \qquad -\infty<\lambda<\infty \qquad (۴۳)$$

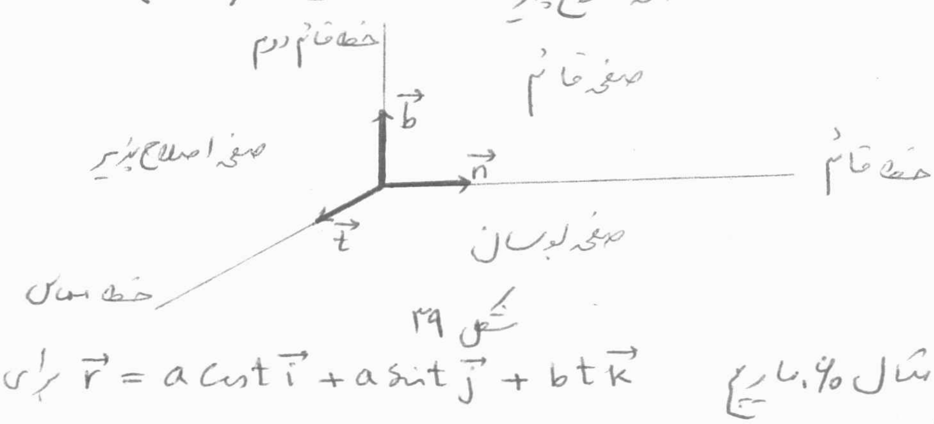
است.

تعریف ۴۴. صفحه گذرنده از $\vec{r}$ روی C موازی با $\vec{t}$ و $\vec{b}$ را صفحه اصلاح پذیر در $\vec{r}$ نامیم. معادله صفحه اصلاح پذیر در $\vec{r}$ عبارت است از

$$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}=0 \qquad (۴۴)$$

بنابراین در هر نقطه $\vec{r}$ روی C سه خط و سه صفحه می‌توان مشخص کرد:

$\vec{R}=\vec{r}+\lambda\vec{t}$	خط مماس
$\vec{R}=\vec{r}+\lambda\vec{n}$	خط قائم اصلی
$\vec{R}=\vec{r}+\lambda\vec{b}$	خط قائم دوم
$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{t}=0$	صفحه قائم
$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{b}=0$	صفحه بوسان
$(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}=0$	صفحه اصلاح پذیر



شکل ۳۹

مثال ۷۰. منحنی $\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$ برای $a>0$ و $b\neq 0$ را در نظر بگیرید.

$$\vec{t}=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}+b\vec{k})$$

$$\vec{k}=-\frac{a}{a^2+b^2}(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j})\,،$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} = -(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j})$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & -a(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t & -\cos t \\ \vec{j} & a(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t & -\sin t \\ \vec{k} & b(a^2+b^2)^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (a^2+b^2)^{-1/2}(b\sin t\,\vec{i} - b\cos t\,\vec{j} + a\,\vec{k})$$

معادله خط قائم دوم در $t = t_0$ به صورت

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda\,\vec{b}(t_0) \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

$$\vec{R} = (a\cos t_0 + \lambda b(a^2+b^2)^{-1/2}\sin t_0)\vec{i} + (a\sin t_0 - \lambda b(a^2+b^2)^{-1/2}\cos t_0)\vec{j} \quad \text{یا}$$

$$+ (bt_0 + a\lambda(a^2+b^2)^{-1/2})\vec{k} \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

است، اگر از تغییر متغیر $\theta = k(a^2+b^2)^{-1/2}$ استفاده کنیم، معادله خط قائم دوم عبارت است از:

$$\vec{R} = (a\cos t_0 + \theta b\sin t_0)\vec{i} + (a\sin t_0 - \theta b\cos t_0)\vec{j} + (bt_0 + \theta a)\vec{k} \qquad -\infty < \theta < \infty$$

معادله صفحه اصلاح پذیر در $t = t_0$ به صورت

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{n}(t_0) = 0$$

یا

$$(x - a\cos t_0)(-\cos t_0) + (y - a\sin t_0)(-\sin t_0) = 0$$

یا

$$x\cos t_0 + y\sin t_0 = 0$$

است. مشاهده می‌شود که صفحه اصلاح پذیر موازی محور z ها است.

تاب یا انحنای دوم

فرض کنید $\vec{r} = \vec{r}(s)$ یک منحنی منظم از کلاس ≥ 3 است و در امتداد c بردار $\vec{n}(s)$ از کلاس C^1 باشد. می‌توان از $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ مشتق گرفت، داریم

$$\dot{\vec{b}}(s) = \dot{\vec{t}}(s) \times \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \times \dot{\vec{n}}(s) = \kappa(s)(\vec{n}(s) \times \vec{n}(s)) + \vec{t}(s) \times \dot{\vec{n}}(s) = \vec{t}(s) \times \dot{\vec{n}}(s) \qquad (۳۵)$$

چون $\vec{n}$ بردار یکه است، پس $\dot{\vec{n}}$ عمود بر $\vec{n}$ بوده و بنابراین موازی با صفحه اصلاح پذیر است. در نتیجه $\dot{\vec{n}}$ ترکیب خطی از $\vec{t}$ و $\vec{b}$ است، مثلا

$$\dot{\vec{n}}(s) = \mu(s)\,\vec{t}(s) + \tau(s)\,\vec{b}(s)$$

با جایگذاری در (۳۵) داریم

$$\dot{\vec{b}}(s) = \vec{t}(s) \times [\mu(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)] = \tau(s)\,[\vec{t}(s)\times\vec{b}(s)]$$

یا

$$\dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s)\,\vec{n}(s) \qquad (۳۶)$$

زیرا $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ یک سه تایی متعامد یکه راستگرد است، پس $\vec{t}\times\vec{b} = -\vec{n}$.

تعریف ۳۶. تابع پیوسته $\tau(s)$ تعریف شده توسط (۳۶) را انحنای دوم یا تاب منحنی C در $\vec{r}(s)$ نامیم.

توجه کنید اگر معادله (۳۶) را در $\vec{n}$ ضرب نقطه ای کنیم، فرمول

$$\tau = -\dot{\vec{b}}(s)\cdot\vec{n}(s) \qquad (۳۷)$$

حاصل می شود. علامت τ مستقل از $\vec{n}$ و جهت منحنی C است و بنابراین یک خاصیت ذاتی منحنی می باشد، زیرا، ابتدا فرض کنید $\vec{n}$ را با $\vec{n}^* = -\vec{n}$ عوض کنیم، آن گاه

$$\vec{b}^* = \vec{t}\times\vec{n}^* = \vec{t}\times(-\vec{n}) = -\vec{b}$$

و از معادله (۳۷) داریم

$$\tau^* = -\dot{\vec{b}}^*\cdot\vec{n}^* = -(-\dot{\vec{b}})\cdot(-\vec{n}) = -\dot{\vec{b}}\cdot\vec{n} = \tau$$

بنابراین τ مستقل از جهت $\vec{n}$ است. حال فرض کنید تغییر جهتی روی C داشته باشیم، یعنی $s = -s^* + $ ثابت. در این صورت $\vec{t}^* = -\vec{t}$، همچنین

$$\vec{b}^* = \vec{t}^*\times\vec{n} = -(\vec{t}\times\vec{n}) = -\vec{b}$$

و

$$\frac{d\vec{b}^*}{ds^*} = \frac{d\vec{b}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = -\frac{d\vec{b}}{ds}(-1) = \frac{d\vec{b}}{ds}$$

بنابراین

$$\tau^* = -\frac{d\vec{b}^*}{ds^*}\cdot\vec{n} = -\frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{n} = \tau$$

مثال ۱۸: مجدداً مارپیچ $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$ را برای $a>0$ و $b\neq 0$ در نظر بگیرید، داریم

$$\vec{b} = (a^2+b^2)^{-1/2}\left(b\sin t\,\vec{i} - b\cos t\,\vec{j} + a\,\vec{k}\right)$$

پس

$$\dot{\vec{b}} = \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{b}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|} = (a^2+b^2)^{-1}\left(b\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}\right)$$

بنابراین

$$\tau = -\dot{\vec{b}}\cdot\vec{n} = -(a^2+b^2)^{-1}\left(b\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}\right)\cdot\left(-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}\right)$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

یعنی تاب ثابت است. توجه کنید که اگر $b>0$ (پس $\tau>0$) آنگاه مارپیچ یک منحنی راستگرد است، شکل ۴۰ (الف). اگر $b<0$ (پس $\tau<0$) آنگاه منحنی یک مارپیچ چپگرد است، شکل ۴۰ (ب). چون علامت τ یک خاصیت ذاتی است، نتیجه می‌گیریم که این دو منحنی نمی‌توانند ملکی [?] روی هم قرار گیرند.

الف) مارپیچ راستگرد $\tau>0$ ب) مارپیچ چپگرد $\tau<0$
شکل ۴۰

اگر در امتداد منحنی $\vec{r} = \vec{r}(s)$ تاب متحد صفر باشد، یعنی اگر $\tau \equiv 0$ آنگاه

$$\dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n} = \vec{0}$$

بنابراین $\vec{b}_0 =$ ثابت $= \vec{b}$. حال

$$\frac{d}{ds}(\vec{r}\cdot\vec{b}_0) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{b}_0 = \vec{t}\cdot\vec{b}_0$$

را در نظر بگیرید. چون $\vec{t}$ و $\vec{b}_0$ متعامدند، پس $\frac{d}{ds}(\vec{r}\cdot\vec{b}_0)=0$ و با انتگرال‌گیری داریم

$$\vec{r}\cdot\vec{b}_0 = \text{ثابت} \qquad (۳۸)$$

یعنی $\vec{r}=\vec{r}(s)$ یک منحنی مسطح واقع در صفحه $\vec{r}\cdot\vec{b}_0=$ ثابت است. بالاخص $\vec{r}=\vec{r}(s)$ در صفحه بوسان قرار دارد. عکس این نتیجه نیز برقرار است. بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲۳. یک منحنی از کلاس ≥ 3 که در امتداد آن $\vec{n}$ از کلاس C^1 است یک منحنی مسطح است اگر و تنها اگر تاب آن متحد صفر باشد.

همواره فرض براین است که منحنی ها از کلاس ≥ 3 است و در امتداد منحنی بردار $\vec{n}$ از کلاس C^1 می‌باشد، مگر خلاف آن را بیان کنیم. در چنین حالتی τ پیوسته است و k، $\vec{t}$، $\vec{n}$ و $\vec{b}$ از کلاس C^1 هستند.

قضیه ۲۴. در یک نقطه روی منحنی $\vec{r}=\vec{r}(t)$ با فرض $k\neq 0$ داریم

$$\tau=\frac{[\vec{r}'\,\vec{r}''\,\vec{r}''']}{\|\vec{r}'\times\vec{r}''\|^2}$$

اثبات. برای منحنی $\vec{r}$ داریم

$$\vec{\dot r}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\vec{r}'\vec{\dot t}$$

$$\vec{\ddot r}=\frac{d}{ds}(\vec{r}'\vec{\dot t})=\vec{r}'\vec{\ddot t}+\left(\frac{d}{ds}\vec{r}'\right)\vec{\dot t}=\vec{r}'\vec{\ddot t}+\vec{r}''\vec{\dot t}^2$$

$$\vec{\dddot r}=\frac{d}{ds}(\vec{r}'\vec{\ddot t}+\vec{r}''\vec{\dot t}^2)=\vec{r}'\vec{\dddot t}+\vec{r}''\vec{\dot t}\vec{\ddot t}+\vec{r}''2\vec{\dot t}\vec{\ddot t}+\vec{r}'''\vec{\dot t}^3$$
$$=\vec{r}'\vec{\dddot t}+3\vec{r}''\vec{\dot t}\vec{\ddot t}+\vec{r}'''\vec{\dot t}^3$$

بنابراین

$$[\vec{\dot r}\,\vec{\ddot r}\,\vec{\dddot r}]=(\vec{r}'\vec{\dot t})\cdot(\vec{r}'\vec{\ddot t}+\vec{r}''\vec{\dot t}^2)\times(\vec{r}'\vec{\dddot t}+3\vec{r}''\vec{\dot t}\vec{\ddot t}+\vec{r}'''\vec{\dot t}^3)$$
$$=(\vec{r}'\vec{\dot t})\cdot(3\vec{\ddot t}^2\vec{\dot t}(\vec{r}'\times\vec{r}'')+\vec{\ddot t}\vec{\dot t}^3(\vec{r}'\times\vec{r}''')+\vec{\dot t}^2\vec{\dddot t}(\vec{r}''\times\vec{r}')+\vec{\dot t}^5(\vec{r}''\times\vec{r}'''))$$
$$=\vec{\dot t}^2\vec{\ddot t}^2[\vec{r}'\vec{r}'\vec{r}'']+\vec{\ddot t}\vec{\dot t}^4[\vec{r}'\vec{r}'\vec{r}''']+\vec{\dot t}^3\vec{\dddot t}[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}']+\vec{\dot t}[\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''']$$

چون $[\vec{r}'\vec{r}'\vec{r}'']=0$ پس

$$[\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r}] = \dot{t}^{6}\,[\vec r\,'\,\vec r\,''\,\vec r\,''']$$

یا

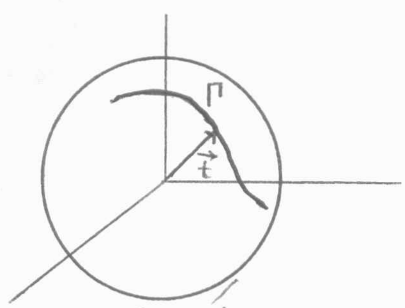
$$[\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r}] = \frac{[\vec r\,'\,\vec r\,''\,\vec r\,''']}{\|\vec r\,'\|^{6}}$$

چون $\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|\vec r\,'\|}$ پس از $k = \frac{\|\vec r\,' \times \vec r\,''\|}{\|\vec r\,'\|^{3}}$ و با توجه به $[\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r}] = k^2\tau$
داریم

$$\tau = \frac{[\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r}]}{k^2} = \frac{[\vec r\,'\,\vec r\,''\,\vec r\,''']}{k^2\|\vec r\,'\|^{6}} = \frac{[\vec r\,'\,\vec r\,''\,\vec r\,''']}{\|\vec r\,' \times \vec r\,''\|^{2}}$$

نشانگرهای کروی

بردارهای یکه مماس به منحنی C یک منحنی Γ روی کره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدا تولید می‌کنند، شکل (۴۱) را ببینید. منحنی Γ را یک نشانگر کروی $\vec t$ می‌نامیم.



شکل ۴۱

اگر $\vec r = \vec r(s)$ نمایش طبیعی C باشد آنگاه $\vec r_1 = \vec t(s) = \dot{\vec r}(s)$ نمایش Γ است. در هر حال، در حالت کلی s پارامتر طبیعی در امتداد $\vec r_1 = \vec t(s)$ نیست، زیرا

$$\left\|\frac{d\vec r_1}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec t}{ds}\right\| = \|\dot{\vec t}\| = |k|$$

در واقع $\vec r_1 = \vec t(s)$ نمایش طبیعی Γ است اگر و تنها اگر انحنا، $|k| \equiv 1$، در امتداد منحنی $\vec r = \vec r(s)$ یک باشد.

به طور مشابه می‌توان نشانگر کروی بردار یکه قائم $\vec r_2 = \vec n(s)$ و نشانگر کروی $\vec r_3 = \vec b(s)$ از قائم یکه دوم را در نظر گرفت.

مثال ۴۲. مارپیچ $\vec r = a\cos t\,\vec i + a\sin t\,\vec j + bt\,\vec k$ برای $0 < a$ و $b \neq 0$ را در نظر بگیرید.

$$\vec t=(a^2+b^2)^{-1/2}(-a\sin t\,\vec i+a\cos t\,\vec j+b\vec k)$$

$$\vec n=-(\cos t\,\vec i+\sin t\,\vec j)$$

$$\vec b=(a^2+b^2)^{-1/2}(b\sin t\,\vec i-b\cos t\,\vec j+a\vec k)$$

مشاهده می‌شود که $\vec b, \vec n, \vec t$ دارای مولفهٔ ثابت نسبت به $\vec k$ می‌باشند، بنابراین تصویرهای کروی دوایری حول محور zها هستند. شعاع نشانگر کروی $\vec t$ و در نتیجه شعاع انحنای

$$\rho_{\vec t}=\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^{1/2}=\frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

شعاع‌های انحنای نشانگرهای کروی برای $\vec n$ و $\vec b$ برابرند با $\rho_{\vec n}=1$ و

$$\rho_{\vec b}=\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

معادلات فرنه - سِره

در امتداد منحنی $\vec r=\vec r(s)$، بردارهای $\vec t$، $\vec n$ و $\vec b$ در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}\dot{\vec t}&=\kappa\vec n\\ \dot{\vec n}&=-\kappa\vec t+\tau\vec b\\ \dot{\vec b}&=-\tau\vec n\end{aligned}\qquad(۳۹)$$

معادلات در (۳۹) را معادلات فرنه - سِره منحنی نامیم. این معادلات در توسعه نظریه منحنی‌ها نقش اساسی دارند. معادلات اول و سوم همان معادلات (۲۸) و (۳۶) هستند.
برای به دست آوردن معادله سوم از $\vec n=\vec b\times\vec t$ مشتق می‌گیریم

$$\dot{\vec n}=\dot{\vec b}\times\vec t+\vec b\times\dot{\vec t}=-\tau(\vec n\times\vec t)+\vec b\times(\kappa\vec n)=(-\tau)(-\vec b)+\kappa(-t)$$

$$=-\kappa\vec t+\tau\vec b$$

اگر معادلات فرنه را به فرم ماتریسی بنویسیم، داریم

$$\begin{aligned}\dot{\vec t}&=0\vec t+\kappa\vec n+0\vec b\\ \dot{\vec n}&=-\kappa\vec t+0\vec n+\tau\vec b\\ \dot{\vec b}&=0\vec t-\tau\vec n+0\vec b\end{aligned}\Rightarrow\begin{pmatrix}\dot{\vec t}\\ \dot{\vec n}\\ \dot{\vec b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\ -\kappa&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec t\\ \vec n\\ \vec b\end{pmatrix}$$

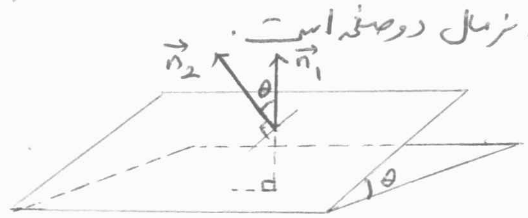
ضمیمه

۱. اگر $\vec{w}$ برداری دلخواه و وابسته خطی نسبت به بردارهای موازی و مستقل در معادله برداری صفحه π باشد، آنگاه $\vec{w}$ موازی با صفحه π است.

حل. فرض کنید π صفحه گذرنده از $\vec{a}$ موازی با بردارهای مستقل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد. بنابراین معادله برداری صفحه π به صورت $\vec{x}=h\vec{u}+k\vec{v}+\vec{a}$ است که در آن h و k اعداد حقیقی دلخواهند. حال فرض کنید $\{\vec{w},\vec{v},\vec{u}\}$ وابسته خطی باشند. پس اسکالرهای α و β و γ که باهم صفر نیستند وجود دارند به طوری که $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$. اگر $\gamma=0$ آنگاه $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$، اما چون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقل اند پس $\alpha=\beta=0$ که با انتخاب α و β و γ در تناقض است. پس باید $\gamma\neq 0$ و در نتیجه $\vec{w}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{v}$. در نتیجه $\vec{w}$ در صفحه گذرنده از $\vec{u}$ و $\vec{v}$ قرار دارد. چون صفحه π موازی با بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ است پس $\vec{w}$ موازی با صفحه π می‌باشد.

۲. دو صفحه باهم موازی اند هرگاه بردارهای نرمال دو صفحه باهم موازی باشند. به عنوان مثال صفحات $x+2y-3z=4$ و $2x+4y-6z=3$ موازی‌اند، زیرا بردارهای نرمال $\vec{n}_1=\langle 1,2,-3\rangle$ و $\vec{n}_2=\langle 2,4,-6\rangle$ موازی‌اند، $\vec{n}_2=2\vec{n}_1$.

اگر دو صفحه موازی نباشند، فصل مشترک دو صفحه یک خط مستقیم است. زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین بردارهای نرمال دو صفحه است.



مثال. الف) زاویه بین صفحات $x+y+z=1$ و $x-2y+3z=1$ را بدست آورید.

ب) معادلات متقارن خط فصل مشترک این دو صفحه را تعیین کنید.

حل. الف) بردارهای نرمال صفحات عبارت از

$$\vec{n}_1=\langle 1,1,1\rangle,\qquad \vec{n}_2=\langle 1,-2,3\rangle$$

است و بنابراین θ زاویه بین صفحات به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}=\frac{2}{\sqrt{42}}\Rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)\simeq 72^\circ$$

ب) برای یافتن خط L، نخست نقطه‌ای روی L را تعیین می‌کنیم. می‌توان محل برخورد(های) خط با صفحه xy با قرار دادن $z=0$ در معادلات دو صفحه را به دست آورد. پس در معادلات دو صفحه داده شده، قرار می‌دهیم $z=0$ و به دستگاه

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

می‌رسیم، که جواب آن $x=1$ و $y=0$ است. پس نقطه $(1,0,0)$ روی L قرار دارد.
حال چون خط L روی دو صفحه قرار دارد پس بر هر دو بردار نرمال صفحات عمود است. بنابراین بردار $\vec{v}$ موازی با L توسط ضرب خارجی بردارهای نرمال به دست می‌آید:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 5\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

بنابراین معادلات متقارن خط L را می‌توان به صورت

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

نوشت.

توضیح. چون یک معادله خطی برحسب x، y و z نشان دهنده یک صفحه است و دو صفحه غیرموازی یکدیگر را در یک خط تلاقی می‌کنند، در نتیجه دو معادله خطی می‌توانند یک خط را نتیجه دهند. نقاط (x,y,z) برقرار در معادلات $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ و $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ نشان دهنده خط فصل مشترک صفحات (اگر موازی نباشند) است.

همواره می‌توان دو صفحه یافت (حداقل) که فصل مشترک آن دو صفحه، خط داده شده L باشد.
اگر معادلات متقارن خط L به صورت

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

باشد، آن گاه این خط، فصل مشترک دو صفحه

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \quad , \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

است.

مسئله. فرمولی برای فاصله D نقطه $P_1(x_1,y_1,z_1)$ تا صفحه $ax+by+cz=d$ به دست آورید.

حل. فرض کنید $P_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطه دلخواهی از صفحه داده شده بوده و $\vec{b}$ بردار متناظر به $\overrightarrow{P_0P_1}$ است. بنابراین

$$\vec{b}=\langle x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0\rangle$$

فاصله D از P_1 تا صفحه برابر با قدر مطلق تصویر اسکالری $\vec{b}$ بر روی بردار قائم $\vec{n}=\langle a,b,c\rangle$ از صفحه است، بنابراین

$$D=\|\vec{b}\|\,|\cos\theta|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{n}\|}$$

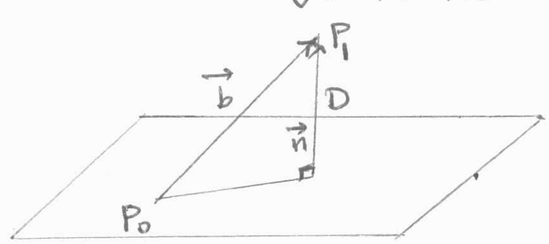
$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

حال چون P_0 در صفحه قرار دارد، پس مختصات آن در معادله صفحه صدق می‌کند یعنی

$$ax_0+by_0+cz_0=d$$

بنابراین فرمول D را می‌توان به فرم زیر اعلام کرد.

$$D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



مثال. فاصله نقطه $(2,3,4)$ تا صفحه $5x+y-z=1$ را به دست آورید.

حل. با توجه به فرمول D داریم

$$D=\frac{|5(2)+1(3)-1(4)-1|}{\sqrt{5^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$