که:

$$\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]=\widehat{A}\widehat{B}-\widehat{B}\widehat{A}=\begin{pmatrix}۰&۰&۱\\۰&۰&۱\\-۱&-۱&۰\end{pmatrix}\neq ۰$$

علت این امر بواسطه آن است که برای صفر شدن جابجاگر $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$، تمام ویژه کت‌های دو عملگر باید مشترک باشند. به عنوان مثال برای دو عملگر $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ در این تمرین به راحتی می‌توان دید که

$$|a_۲=۰\rangle=\begin{pmatrix}۰\\۰\\۱\end{pmatrix}\ ,\ |a_۳=۱\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\۱\\۰\end{pmatrix}$$

$$B|a_۲=۰\rangle=\begin{pmatrix}۱\\۱\\۱\end{pmatrix}\neq|a_۲=۰\rangle\ ;\ B|a_۳=۱\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۲\\۳\\۲\end{pmatrix}\neq|a_۳=۱\rangle$$

اگر تمامی ویژه کت‌های دو عملگر مشترک باشند، از نوتاسیون $|a_i,b_i\rangle$ به عنوان ویژه کت‌های مشترک دو عملگر $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ استفاده می‌کنیم. منظور از این نوع نوشتار آن است که:

$$\widehat{A}|a_i,b_i\rangle=a_i|a_i\rangle\ \ ;\ \ \widehat{B}|a_i,b_i\rangle=b_i|a_i\rangle$$

حال نشان می‌دهیم که در صورت وجود ویژه کت‌های مشترک، دو عملگر جابجاپذیرند. برای آنکه نشان دهیم عملگری برابر صفر است، باید نشان دهیم که اثر آن بر روی هر عضو از فضای برداری برابر صفر خواهد شد. برای اینکار کافی است نشان دهیم اثر عملگر بر روی پایه‌های فضای برداری صفر است. اگر پایه‌ها را ویژه کت‌های مشترک عملگر $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned}\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]|a_i,b_i\rangle&=\widehat{A}\widehat{B}|a_i,b_i\rangle-\widehat{B}\widehat{A}|a_i,b_i\rangle=\widehat{A}\left(b_i|a_i,b_i\rangle\right)-\widehat{B}\left(a_i|a_i,b_i\rangle\right)\\&=b_i\widehat{A}|a_i,b_i\rangle-a_i\widehat{B}|a_i,b_i\rangle=\left(b_ia_i-a_ib_i\right)|a_i,b_i\rangle=۰\end{aligned}$$

□

تمرین ۳۴.۲ نشان دهید اگر $\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]=۰$ باشد، $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ دارای ویژه کت‌های مشترک هستند.

پاسخ برای نشان دادن مطلب فوق، سه حالت ممکن برای عملگرهای $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ را در نظر می‌گیریم:

حالت اول): $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ غیر تبهگن باشند.

می خواهیم نشان دهیم ویژه کت‌های $\widehat{A}$، ویژه کت‌های $\widehat{B}$ هم هستند. ویژه کت عملگر $\widehat{A}$ را به صورت $|a_i\rangle$ در نظر بگیرید. با توجه به اینکه $\widehat{A}\widehat{B}=\widehat{B}\widehat{A}$ است داریم:

$$A\left(B|a_i\rangle\right)=B\left(A|a_i\rangle\right)=B\left(a_i|a_i\rangle\right)=a_i\left(|a_i\rangle\right)\qquad(۸۱.۲)$$

حال با توجه به نتیجه تمرین ۸۰.۲ و در نظر گرفتن عدم تبهگنی عملگر $\widehat{A}$ داریم:

$$B|a_i\rangle = \alpha|a_i\rangle \tag{۸۲.۲}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که $|a_i\rangle$ ویژه کت عملگر $\widehat{B}$ نیز می‌باشد.

حالت دوم): یکی از دو عملگر، مثلا $\widehat{B}$، تبهگن باشد.

ابتدا برای تاکید بر یک نکته مهم فرض کنید ویژه کت‌های راست بهنجار عملگر $\widehat{B}$ را با توجه به روش تمرین ۲۷.۲ یافته‌ایم. چنانکه بیان شد تعداد ویژه کت‌های عملگر $\widehat{B}$ متناظر با ویژه مقدار تبهگن، بی شمار است. همچنین می‌دانیم که ممکن است بتوانیم بیش از یک دسته ویژه کت راست بهنجار از روی ویژه کت‌های تبهگن بسازیم. بدین ترتیب مشخص نیست که کدام یک از این دسته ویژه کت‌های راست بهنجار ویژه کت $\widehat{A}$ هم باشند.

با این وجود، به جای بررسی ویژه کت‌های تبهگن می‌توان از عملگر غیر تبهگن $\widehat{A}$ استفاده کرد. از آنجا که $\widehat{A}$ غیر تبهگن است، اثبات ارائه شده در حالت اول برقرار بوده و لذا ویژه کت‌های عملگر $\widehat{A}$ خودبخود ویژه کت عملگر $\widehat{B}$ نیز هستند. به عبارتی، برخی از ویژه کت‌های عملگر $\widehat{A}$ ترکیب خطی ویژه کت‌های تبهگن عملگر $\widehat{B}$ هستند.

در این حالت تمرین ۸۰.۲ را مجدد بررسی می‌کنیم. فرض کنید ویژه مقدارِ تبهگنِ عملگر $\widehat{B}$، b_k باشد. رابطه زیر، با توجه به تبهگنی ویژه مقدار b_k، منجر به مشخص شدن $|?\,\rangle$ نخواهد شد:

$$B|?\,\rangle = b_k|\rangle \tag{۸۳.۲}$$

با این وجود در صورتیکه اثر $\widehat{A}$ را بر روی $|?\,\rangle$ بدانیم:

$$A|?\,\rangle = a_i|\rangle \tag{۸۴.۲}$$

کت $|?\,\rangle$ به طور کامل شناخته شده خواهد بود:

$$|?\,\rangle = \alpha|a_i, b_k\rangle$$

به عبارت دیگر در رابطه ۸۳.۲ تنها می‌توان گفت که $|?\,\rangle$ ترکیب خطی‌ای از ویژه کت‌های تبهگن است. اما با توجه به رابطه ۸۴.۲ مشخص می‌شود که $|?\,\rangle$ آن ترکیب خطی‌ای است که ویژه کت $\widehat{A}$ با ویژه مقدار a_i است. از آنجا که وجود ویژه مقادیر متفاوت برای عملگر $\widehat{A}$ (عدم تبهگنی) باعث تفکیک ویژه کت‌های تبهگن $\widehat{B}$ می‌شود، فرآیند یافتن عملگر $\widehat{A}$ به قسمی که

$\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]=۰$ شود را "شکست تبهگنی" یا "یافتن زیر فضای غیر تبهگن" می‌نامند.
حالت سوم): هر دو عملگر تبهگن باشند.
برای پرهیز از پیچیدگی در نوشتار، در اینحالت فرض کنید عملگر $\widehat{B}$ دارای تبهگنی ۳ گانه برای ویژه مقدار b_k است.

$$B|b_k^{(i)}\rangle=b_k|b_k^{(i)}\rangle\ \ ;\ \ i=۱,۲,۳$$

همچنین فرض کنید که ویژه کت‌های $|b_k^{(i)}\rangle$ مطابق روش ارائه شده در تمرین ۲۷.۲ راست بهنجار ساخته شده باشند. مانند حالت دوم، این ویژه کت‌ها لزوما ویژه کت $\widehat{A}$ نیستند و باید ترکیب خطی خاصی ار آنها به گونه‌ای انتخاب شود که ویژه کت $\widehat{A}$ هم باشند. این ترکیب خطی خاص را به صورت $\alpha|b_k^{(۱)}\rangle+\beta|b_k^{(۲)}\rangle+\gamma|b_k^{(۳)}\rangle$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که این ترکیب خطی باید به گونه‌ای ساخته شود که ویژه کت $\widehat{A}$ نیز باشد بنابراین:

$$\widehat{A}\left(\alpha|b_k^{(۱)}\rangle+\beta|b_k^{(۲)}\rangle+\gamma|b_k^{(۳)}\rangle\right)=a\left(\alpha|b_k^{(۱)}\rangle+\beta|b_k^{(۲)}\rangle+\gamma|b_k^{(۳)}\rangle\right)\qquad(۸۵.۲)$$

با ضرب داخلی رابطه فوق در برایِ $|b_k^{(۲)}\rangle$، $|b_k^{(۱)}\rangle$ و $|b_k^{(۳)}\rangle$ خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix}A_{۱۱}&A_{۱۲}&A_{۱۳}\\A_{۲۱}&A_{۲۲}&A_{۲۳}\\A_{۳۱}&A_{۳۲}&A_{۳۳}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\qquad(۸۶.۲)$$

که در آن

$$A_{ij}=\langle b_k^{(i)}|A|b_k^{(j)}\rangle\ \ ;\ \ i,j=۱,۲,۳\qquad(۸۷.۲)$$

به عبارت دیگر کافی است در زیر فضای جدیدی که پایه‌های آن ویژه کت‌های تبهگن عملگر $\widehat{B}$ هستند، نمایش ماتریسی $\widehat{A}$ را یافت. عناصر تشکیل دهنده ویژه کت‌های این ماتریس، ضرائب بسط ترکیب خطی خاصی خواهند بود که ویژه کت $\widehat{A}$ نیز هستند.

نکته مهمی که در حل رابطه ۸۶.۲ وجود دارد آن است که با توجه به تبهگن بودن عملگر $\widehat{A}$، ممکن است سه ویژه مقدار متناظر با رابطه ویژه مقداری ۸۶.۲، منجر به یافتن سه ویژه مقدار متفاوت نشود. اگر حل رابطه ۸۶.۲ سه ویژه مقدار متفاوت را نتیجه دهد، تبهگنی عملگر $\widehat{B}$ با استفاده از عملگر $\widehat{A}$ شکسته شده است. در غیر اینصورت برای آنکه تبهگنی به طور کامل شکسته شود، باید عملگر دیگری مانند $\widehat{C}$ یافت به قسمی که $\left[\widehat{A},\widehat{C}\right]=\left[\widehat{B},\widehat{C}\right]=۰$ و سپس به دنبال ترکیب خطی خاصی گشت که ویژه کت همزمان هر سه عملگر باشند. در یک فضای n

بعدی می‌توان مجموعه‌ای از عملگرهای $\left\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, ..., \widehat{M}\right\}$ یافت که با یکدیگر جابجا شوند و دارای ویژه کت مشترک به قسمی باشند که تبهگنی را به طور کامل بشکنند. این مجموعه را "مجموعه کامل عملگرهای جابجاپذیر" نامند.

تمرین ۳۵.۲ برای دو عملگر، زیر عملگر تبدیلی را بیابید که بتواند هر دو عملگر را همزمان قطری کند.

$$\widehat{A} \doteq \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{pmatrix} \quad , \quad \widehat{B} \doteq \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

پاسخ ابتدا مطابق روشی که آموختیم ویژه کت‌ها و ویژه مقادیر این دو عملگر را می‌یابیم:

$$|a_۱ = -۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۱ \end{pmatrix} ; |a_۲ = ۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} ; |a_۳ = ۳\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$|b_۱ = ۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} \quad ; \quad |b_۲ = ۰\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲\alpha^۲ + \beta^۲}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

مطابق حالت دوم در تمرین ۳۴.۲، ویژه کت‌های عملگر غیر تبهگن $\widehat{A}$ خودبخود ویژه کت $\widehat{B}$ هم هستند.

$$\widehat{B}|a_۱\rangle = ۰|a_۱\rangle = ۰; \widehat{B}|a_۲\rangle = ۰; \widehat{B}|a_۳\rangle = ۲|a_۳\rangle$$

حال از منظر ویژه کت‌های عملگر $\widehat{B}$ به حل مسئله توجه کنید (فرض کنید فراموش کرده‌ایم که بهترین راهِ یافتن ویژه کت‌های مشترک، استفاده از عملگر غیر تبهگن است). مطابق روش ارائه شده در حالت سوم تمرین ۳۴.۲، ابتدا دو ویژه کت متعامد و بهنجار از ویژه کت‌های تبهگن را در نظر بگیرید. به عنوان مثال با انتخاب $\beta = ۰$ در ویژه کت‌هایی که به شکل $|b_۲\rangle$ هستند، خواهیم داشت:

$$|b_۲^{(۱)}\rangle = |b_۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix} \quad ; \quad |b_۲^{(۲)}\rangle = |b_۳\rangle = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

ویژه کت $|b_۲^{(۲)}\rangle$ به قسمی تعیین شده که بر $|b_۲^{(۱)}\rangle$ عمود باشد.

حال در زیر فضای $|a_۲\rangle$ و $|a_۳\rangle$ عناصر عملگر $\widehat{A}$ را می سازیم:

$$\begin{pmatrix} \langle a_۲|\widehat{A}|a_۲\rangle & \langle a_۲|\widehat{A}|a_۳\rangle \\ \langle a_۳|\widehat{A}|a_۲\rangle & \langle a_۳|\widehat{A}|a_۳\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & ۰ \end{pmatrix}$$

حال ویژه مقادیر و ویژه کت‌های این عملگر را می‌یابیم. برای ویژه کت‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} ۱-\lambda & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & -\lambda \end{vmatrix} = ۰ \rightarrow \lambda(\lambda-۱)-۲=۰ \rightarrow \lambda = ۲, -۱$$

چنانکه دیده می‌شود این دو ویژه مقدار، ویژه مقادیر عملگر $\widehat{A}$ هستند. ویژه کت‌های متناظر با این ویژه مقدار برابرند با:

$$|\lambda=۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{pmatrix} \sqrt{۲} \\ ۱ \end{pmatrix} \quad ; \quad |\lambda=۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -\sqrt{۲} \end{pmatrix}$$

بنابراین ترکیب خطی ویژه کت‌های تبهگن که ویژه کت $\widehat{A}$ نیز هستند به صورت زیر می‌باشند:

$$|a=۲\rangle = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}|b_۲\rangle + \frac{۱}{\sqrt{۳}}|b_۳\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$|a=-۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۳}}|b_۲\rangle - \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}|b_۳\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۶}}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

که مشخصا همان ویژه کت‌هایی هستند که از ابتدا یافته بودیم. حال با استفاده ویژه کت‌های مشترک، ماتریس تبدیل $\widehat{U}$ را می‌سازیم.

$$\widehat{U} = \frac{۱}{\sqrt{۶}}\begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۲} & \sqrt{۳} \\ -۲ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۱ & -\sqrt{۲} & \sqrt{۳} \end{pmatrix}$$

می‌توان به راحتی دید که این عملگر یکانی است. اگر تبدیل $\widehat{U}$ را بر روی دو ماتریس $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$\widehat{U}^\dagger\widehat{A}\widehat{U} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{pmatrix} \quad ; \quad \widehat{U}^\dagger\widehat{B}\widehat{U} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \qquad \square$$

۷.۲ توابع عملگری

می‌خواهیم همانند توابع اسکالر مانند $\sin\alpha$، $\tan\alpha$ و e^α، توابع عملگری $\widehat{F}\left(\widehat{\Omega}\right)$ را تعریف کنیم. توابعی که مورد استفاده قرار میدهیم توابعی هستند که بتوان آنها را به صورت سری توانی از عملگر $\widehat{\Omega}$ نوشت:

$$\widehat{F}\left(\widehat{\Omega}\right) = \sum_{n=۰}^{\infty} c_n\widehat{\Omega}^n \qquad (۸۸.۲)$$