

با نام او

آزمون پایانی درس جبر خطی (زمستان ۹۵)

۱- الف- نشان دهید برای هر ماتریس $A_{m \times n}$: بُعد دامنه برابر است با بُعد فضای پوچی بعلاوه بُعد بُرد.
ب- نشان دهید فضای پوچی هر ماتریسی، متمم متعامد فضای سطری آن است و سپس استدلال کنید که رتبه هر ماتریس با رتبه ترانزپوزیته اش یکسان است.

۲- الف- ماتریس $A_{n \times n}$ حقیقی است و $x \in R^n$. نشان دهید A را می توان به صورت مجموع دو بخش متقارن و پاد متقارن نوشت و سپس نشان دهید اگر A مثبت نیمه معین باشد آنگاه همه مقادیر ویژه بخش متقارن A ، نامنفی هستند.

ب- مقادیر ویژه بخش متقارن A به ترتیب از کمینه تا بیشینه، λ_1 تا λ_n نام گذاری شده اند. نشان دهید برای همه x هایی که بزرگی اقلیدسی شان واحد است: $\|x\|_2 = 1$ ، داریم:

$$\lambda_1 \leq x^T A x \leq \lambda_n$$

۳- معادله ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

الف- روش rref را اجرا نموده و نتیجه بگیرید که این معادله پاسخ ندارد.
ب- تجزیه مقادیر تکین A را کاملاً بدست آورید. بوسیله این تجزیه، معکوس تعمیم یافته A را ارائه نمایید. بکمک این معکوس، x ی بدست آورید که فاصله Ax با b هر چند صفر نمی شود ولی کمترین گردد.

$$Ax = b ; A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۴- الف- مقادیر ویژه ماتریس B را بدست آورید.

ب- اگر مقدار ویژه چندباره ای دارد، اندیس آن را بیابید و سپس شکل جردن B را با دلیل حدس بزنید.
ج- ماتریس S ی بدست آورید که ماتریس B را به شکل جردن ببرد.

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

در دو پرسش ۳ و ۴ توجه داشته باشید که همه مراحل محاسباتی آورده شود.

و سپس ویژه خداوند پروردگار جهانیان است!