با نام او

آزمون پایانی درس جبر خطی (زمستان ۹۶)

از دو پرسش ۲-۱ و ۲-۲ فقط و فقط یکی را پاسخ دهید!!!

۱- **الف**- نشان دهید: هر ماتریسی با یک ماتریسِ بالا مثلثی، تحتِ یک تشابهِ یکانی(*Unitary*) است. یا به عبارت دیگر همواره ماتریسِ یکانیِ U وجود دارد که می‌تواند ماتریسِ دلخواهِ A را به $U^* A U = T$ که بالا مثلثی است، تبدیل کند بگونه‌ای که تمامیِ مقادیر ویژه نیز روی قطر اصلیِ T می‌نشینند.

ب- از الف و اینکه حاصلضربِ هر دو مثلثی، دوباره مثلثی خواهد شد، نشان دهید: هر ماتریسی در معادلهٔ مشخصه‌اش صدق می‌کند(قضیهٔ Cayley-Hamilton).

معادلهٔ مشخصه ; $p_A(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I) = 0$

راهنمایی: در آغاز، بگویید که چرا صدق کردنِ A و T معادل است و سپس کافی است اول $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)$ را بدست آورده و نشان دهید که دو ستونِ اولش، صفر خواهد شد و سپس نتیجه بگیرید که ضربِ سومی تا nامی، بقیهٔ ستون‌ها را نیز صفر خواهد نمود.

۲-۱- اگر S_1 و S_2 دو زیرفضا از یک فضا باشند، از مجموع هر دو بردار دلخواه که یکی از اولی و دیگری از دومی باشد، یک زیرمجموعهٔ دیگری از آن فضا ساخته می‌شود که آن را با $S_1 + S_2$ نمایش می‌دهند. چنانچه این دو هیچ اشتراکی بجز صفرِ جمع برداری نداشته باشند این را جمعِ مستقیمِ دو زیرفضا گویند و بصورت $S_1 \oplus S_2$ نمایش می‌دهند.

الف- نشان دهید $S_1 + S_2$ یک زیرفضاست.

ب- نشان دهید چنانچه این جمع، مستقیم باشد هر برداری در $S_1 \oplus S_2$ فقط و فقط به یک راه بوسیلهٔ دو بردار، یکی از S_1 و دیگری از S_2 قابل بیان است.

۲-۲- **الف**- نشان دهید ماتریسِ A یک ماتریس یکانی است و همهٔ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نظیر را بدست آورید.

ب- ماتریسِ حقیقیِ S را که این ماتریس را قطری‌مانند می‌کند بدست آورده و A را قطری‌مانند کنید. قطری‌مانند کاملاً قطری نیست بلکه قطری-بلوکی است که در عوض همهٔ اعداد حقیقی‌اند!

ج- تعبیر هندسیِ مقدارها و بردارهای ویژهٔ نظیر را بگویید.

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

۳- از فیلمِ سقوط آزادِ یک جسمی می‌خواهیم شتابِ ثقل را در جایی که هستیم، تخمین بزنیم. فیلم سی عکس در ثانیه است و ما چهار عکس را در نظر گرفته و مکان اولیه را نیز صفرِ مکان می‌گیریم. لذا معادلهٔ مکان-زمان خواهد بود:

$$x = (t^2)(0.5g) + (\,t)(v_0) \rightarrow$$

که اگر برای صحیح شدنِ اعداد، طرفین را در 30^2 ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix}35\\79\\134\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}(0.5g) + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(30v_0) = \begin{pmatrix}1 & 1\\4 & 2\\9 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5g\\30v_0\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad c = B\,x$$

الف- تجزیهٔ مقادیر تکینِ B را کاملاً بدست آورید.

ب- بوسیلهٔ این تجزیه، معکوسِ تعمیم‌یافتهٔ B را ارائه نمایید.

ج- بکمک این معکوس، تخمینِ بهینهٔ x و سپس g را بدست آورید.

کمکی در عملیات: سه بردار ویژه‌ای که شاید بدست آوردن‌شان کمی وقت‌گیر باشد، عبارتند از:

$$\begin{pmatrix}0.1218\\0.4213\\0.8987\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.7152\\0.5906\\-0.3738\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.6882\\-0.6882\\0.2294\end{pmatrix}$$

۴- **الف**- مقدارهایِ ویژهٔ ماتریسِ C را بدست آورید.

ب- در الف، دو مقدار ویژهٔ چندباره یکی 0 و دیگری 1 خواهید یافت. اندیسِ هر یک را بیابید و سپس شکلِ جردنِ C را با دلیل حدس بزنید.

ج- ماتریسِ Sی بدست آورید که ماتریسِ C را به شکل جردن ببرد.

$$C = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\0.5 & 0 & 1.5 & -0.5\\0.5 & 1 & 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

در سه پرسش ۲-۲ ، ۳ و ۴ توجه داشته باشید که همهٔ مراحل محاسباتی آورده شود.

و سپاس ویژهٔ خداوند، پروردگارِ جهانیان است!