با نام او

در آغاز بیانی از معادلات حرکت اجسام "مشهور به مکانیک نیوتنی" که به نظر صحیح‌تر است

داستان از اینجا آغاز می‌شود که برای بیان چرایی حرکت‌هایی که ما در جسم‌ها می‌بینیم، بیان مکانیک نیوتنی به میان آورده می‌شود که چند واژهٔ کلیدی دارد:

قانون‌های اول، دوم و سوم – سرعت - شتاب – نیرو – جرم

مهمترین انگیزهٔ نگارشِ این نوشته، این است که به نظر نگارنده، چگونگیِ بیان مشهور به مکانیک نیوتنی درست نمی‌باشد و این نادرستی سببِ بدفهمی، دیرفهمی و جلوگیری از پیشرفت فهم در فیزیک مربوطه گشته است.

آغازی‌ترین و مهمترین نادرستی در بیان:

درحالیکه یک قانون اساسی بیش‌تر نیست و آن هم، با کمی آسان‌گیری، همان قانون سوم است و همهٔ بقیه از همان، قابل نتیجه‌گیری‌اند، اولاً این اصلِ اساسی در ردیف سوم قرار داده شده است و از همین جا زنجیرهٔ اتصال آن دو به این اصل نیز مفقود شده است. همین نیز در ادامه سببِ نابسامانی در فهم واژه‌های نیرو، جرم و همچنین سرعت و شتاب شده است.

به نظر نگارنده داستان چگونه آغاز شود درست‌تر است؟

اصل اساسیِ که باید به آن تکیه داد و بقیهٔ داستان‌ها را روی آن بنا نمود، اصل ساده و عمومیِ "بده-بستان" است! . جهان آفریدهٔ بخشندهٔ مطلق، آکنده است از بده-بستان‌های بی‌شمار بینِ همهٔ اجزایِ آن که کاملاً در اتصال برخی به برخی دیگر در جریان است. اینکه فکر کنیم اجزای آفرینش اندر کنش و واکنش با یکدیگر(عمل و عکس‌العمل یا تعامل) نیستند، گمانی بسیار نادرست است.

این اصل اساسی بسادگی می‌گوید: امکان ندارد یکی به دیگری چیزی بدهد ولی از خودش به همان اندازه کم نشود. یا به عبارت دیگر اگر یکی به دیگری چیزی را داده است حتماً خودش هم چیزی از آن دیگری ستانده است ولی مجموع داده و ستانده هر یک را که جداگانه نگاه کنید باید خنثی باشد. به زبان اعداد اگر یکی، 2 تا به دیگری داده باشد حتماً از طرف مقابل -2 تا دریافت نموده است تا جمع داده‌اش به دیگری و ستانده‌اش از او صفر بماند.

به عبارتی اگر در یک بده-بستان بین الف و ب ، اندازه‌گیری شما از داده شده به الف و ب به ترتیب a و b باشد و این اندازه‌گیری به دقت صورت پذیرفته باشد، شما باید جمع این دو داده را صفر بیابید.

$$a + b = 0 \rightarrow \ a = -b$$

و البته اگر ستانده‌ها را نیز اندازه‌گیری کنید دوباره به دست می‌آورید:

$$(-a) + (-b) = 0 \rightarrow (-a) = -(-b)$$

در همین کنش‌ها و واکنش‌هاست که داد و ستد بینِ این اجزا انجام می‌پذیرد. حال، هنگامی‌که به حرکتِ اجسام می‌خواهیم بپردازیم، می‌گوییم رفتارشناسیِ حرکت‌های اجسام نیز به همین داد و ستد بین‌شان بازمی‌گردد.

به عبارت دیگر اگر ما بتوانیم به گونه‌ای داد و ستدِ حرکتیِ بین‌شان را حسابرسی کنیم، جزئیاتِ داستان را متوجه شده و به بیان درستِ ارتباط آنها در حرکت‌های شان می‌رسیم.

و اما حرکت یا جابجاییِ اجسامی که بصورت روزانه مشاهده می‌کنیم، اولاً نسبی است یعنی جای هر جسمی نسبت به جای دیگر است که مفهوم می‌یابد و همین‌طور این‌ها ظاهراً در فضای سه بعدی جایگاه و پایه می‌یابند و همچنین اگر بردار جابجاییِ جسمی نسبت به دیگری با زمان و از دید یک دستگاهی تغییری کند، ما از تغییرِ جای نسبی آن دو سخن می‌گوییم و نام آن را هنگامی‌که این فاصلهٔ زمانی را به صفر میل می‌دهیم، سرعت نسبیِ آن دو می‌نامیم و می‌گوییم جابجایی یا حرکت داریم.

پس پذیرفته‌ایم که هرگاه جسمی نسبت به یک جای دیگر و از دیدِ یک دستگاه داده شده‌ای دارای سرعت باشد، می‌گوییم یک حرکت نسبی دارد. و لذا حرکت دادن به آن جسم یعنی سرعتِ او را زیاد یا کم کردن.

حال اگر بخواهیم بر اساس مفاهیم بنیان‌گذاری شده در جبرِ فضاهای برداری، پایه‌ای برای فضای اندازهٔ حرکت اجسام در نظر بگیریم تا بقیهٔ حرکت‌ها را نیز بر پایهٔ آن اندازه‌دار کنیم، کافی است حرکتِ ویژه‌ای از یک جسم نمونه را به عنوان پایه‌ای در این فضا در نظر گرفته و بقیه را بر حسب آن بیان کنیم.

مثلاً یک سنگِ S که ماندگاری خوبی دارد را بر می‌گزینیم و سرعتِ $1m/s$ داشتنِ آن را در راستاهای داده شده، نسبت به یک جای مشخص و از دید یک دستگاه معین را پایهٔ حرکت اجسام می‌نهیم. از این پس همهٔ حرکت‌ها بر حسب این پایه، اندازه می‌یابند. مثلاً اگر گفته شود جسمی دارای اندازهٔ حرکتِ $2(\frac{S \cdot m}{s})$ می‌باشد، یعنی در بده- بستانِ حرکت با اجسام دیگر معادلِ دو برابرِ آن سنگِ S عمل خواهد نمود.

مثلاً هنگامی‌که گفته شود: یک جسمی دارای $\left(\frac{S\cdot m}{s}\right)$ 5 اندازهٔ حرکت است، یعنی در بده-بستان با اجسام دیگر مانندِ آن سنگِ پایه با سرعتِ $5\ m/s$ رفتار خواهد نمود. همین‌جا روشن است که در بده-بستان تغییر اندازهٔ حرکت برای اجسام رخ می‌دهد. البته اصل اساسی می‌گوید که تغییر اندازهٔ حرکتی که یک جسمی به دیگری داده است را در خودش ولی در خلاف جهت ایجاد شده است. و به این ترتیب است که تغییر اندازهٔ حرکت به دلیل جهت دار بودن و سه بعدی بودنِ فضای سرعت، خود نیز سه بعدی می‌گردد. البته در اینجا برای جسم‌های در تعامل، ابعاد در نظر گرفته نشده و آنها را نقطه‌ای دیده‌ایم و اگر غیر از این باشد باید تا جاییکه می‌توانیم آنها را به نقطه‌ای تجزیه نموده و حرکت‌ها را نقطه‌ای ببینیم.

این سنگ مبنا همان سنگی است که آن را سنگِ هزارگرمی نامیده‌ایم و هر جسمِ دیگری با آن در بده بستانِ حرکتی، یکسان باشد، آن را نیز هزارگرمی خطاب می‌کنیم. و حال اگر یک جسمی در تعامل حرکتی با این سنگ مبنا، تغییر سرعتی دو برابرِ آنچه در سنگ مبنا ایجاد کرده است در خودش و در جهت مقابل ایجاد شود، می‌گوییم لابد خودش پانصد گرمی است. چراکه باید به نحوی حاصل اندازهٔ حرکت منتقل شده به خودش دقیقاً به دلیل اصل اساسی، همانی باشد که به سنگ مبنا منتقل شده ولی در خلاف جهت!

از این جاست که می‌گوییم گویی او در تعاملِ حرکتی مانند یک سنگی نصفِ سنگ مبناست و اگر مبنا را $1000\ g$ نامیده‌ایم، پس نامِ او $500\ g$ خواهد بود. و از اینجاست که مفهومِ جرمِ اجسام به میان آمد.

از همان هنگامی که حرکت و به دنبال آن سرعت به پیش آمده است، چالشی در میان است و آن اینکه سرعت اجسام را نسبت به چه نقطه‌ای و از دید چه دستگاهی محاسبه خواهیم نمود؟! یا در یک جمله: مرجع اندازه‌گیریِ سرعت کجاست؟

مثلاً اگر مرجع را یکی از اجسام مورد نظر را بگیرید، آنگاه سرعتِ آن جسم همواره صفر خواهد بود و تغییرات سرعتی هم نخواهیم داشت و یعنی شتاب هم نخواهد یافت و لذا در هیچ تعاملی مشارکت نخواهد داشت که این خلاف فرض است که همهٔ اجسام به هر حال در تعامل با یکدیگرند. حال کسی ممکن است بگوید که آن جسم می‌شود یک استثنا ! حال پرسشی که پیش می‌آید این است به که کدامیک از اجسام، این مقام استثنایی را اعطا کنیم؟! و از اینجاست که به دور باطلی می‌افتیم! برای همین است که پیشنهاد ما این است که به دنبال آن مرجع درستِ مطلق بگردیم و کوشش کنیم به آن نزدیک و نزدیک‌تر شویم و دردسرهای ناشی از استثنا نمودن را مبتلا نشویم.

برای همین می‌گوییم: یک مرجعی هست که در همهٔ موارد و در همهٔ مشاهدات، بدون هیچ استثنایی با اصل اساسیِ بده-بستان در حرکت، همراهی و هماهنگی دارد. و لازم است همواره ما به دنبال آن گشته و کوشش کنیم تا آن را هر چه دقیق‌تر برای کارهای خودمان تعیین کنیم. این مرجع را مطلق یا اینرسی نامیده‌اند.

کوشش‌هایی برای تعیین مرجعِ مطلق

هرگاه مرجعی را برای اندازه‌گیری تغییر اندازهٔ حرکت یا همان شتاب بگیریم، نمی‌دانیم تا چه حد به مرجع مطلق نزدیک است و مناسب است یا خیر؟! پس بیایید ببینیم از رویِ هر مرجعی که بر می‌گزینیم، چگونه می‌توان مرجع مطلق را بدست آورد و تا جاییکه ممکن است تعیین نمودا؟ و حداقل برای همان محدوده و شرایط مورد نظر کار ما را راه بیاندازد.

پس برای nتا جسم که در بده-بستان با یکدیگرند، نسبت به مرجع مطلق داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(D_i^2 r_{Ik}) = 0$$

به عنوان نمونه اگر فقط دو تا جسم در تعامل باشند که این می‌تواند به این معنی باشد که تعامل هر یک از آن دو با بقیه بگونه‌ای صفر شده است و حال داریم:

$$m_1(D_i^2 r_{I1}) + m_2(D_i^2 r_{I2}) = 0 \quad \text{یا} \quad m_1(D_i^2 r_{I1}) = -\, m_2(D_i^2 r_{I2})$$

که یعنی همان اصل اساسی: اندازه حرکت ستانده شده توسط 1 چیزی نیست جز همان اندازه حرکتِ از دست دادهٔ 2 .

از همین جاست که به همین اندازه‌حرکتِ داد و ستد شده بینِ این دو جسم، نامِ نیرو داده شده است. و می‌گوییم: جسمِ یک، نیرویِ

$$F_{21} = -\, m_2(D_i^2 r_{I2}) \quad \text{یا} \quad m_1(D_i^2 r_{I1})$$

را از جسمِ دو دریافت نموده و از همین رو در آن تغییرِ اندازه حرکتِ

$$m_1(D_i^2 r_{I1})$$

رخ داده است. سپس می‌نویسیم:

$$m_1(D_i^2 r_{I1}) = F_{21} \quad \text{یا} \quad D_i^2 r_{I1} = f_{21}$$

در برابریِ پایانی، f_{21} شتاب داده شده از جسمِ 2 به جسمِ 1 است ابته از دید مرجع مطلق.

این به این درد می‌خورد که حالا شما می‌توانید دربارهٔ داد و ستدهای گوناگونی که بین دو جسم‌ها رخ می‌دهد، مطالعه نموده و قاعده و قانونی بیابید و از آن پس در تعاملات دیگر نیز آن الگو را بکار بندید. نیروهای بینِ اجسامِ باردارِ الکتریکی و مغناطیسی و یا الکترومغناطیسی و گرانش عمومی و ... از همین برابری نتیجه شده و الگوی ریاضی یافته‌اند.

فرض کنید ما از جسمِ یک کوشش نموده‌ایم با روندی کاملاً یکسان دوباره بسازیم. حال این دو جسم را در تعاملِ با یکدیگر به گونه‌ای قرار می‌دهیم تا بقیهٔ تعاملات با آن دو کاملاً خنثی شده باشند و ما با توجه به مشاهدات نظرمان این باشد که این دو فقط با هم در تعامل‌اند. حال توجه کنید که داریم:

$$(D_i^2 r_{I1}) - (D_i^2 r_{2I}) = D_i^2 (r_{I1} + r_{I2}) = 0$$

که یک پاسخ سادهٔ آن برای نقطهٔ مرجع، میانِ دو نقطه است:

$$r_{I1} = r_{2I}$$

در ادامه با استفاده از همان مفهوم شتاب داده شده توسط 2 به 1، برای همهٔ تعاملات دیگران با جسمِ 1 می‌توان نوشت:

$$D_i^2 r_{I1} = \sum f_{K1}$$

اکنون توجه کنید که همهٔ این شتاب‌ها از دید مرجع مطلق است و اگر بخواهیم مرجع را برای اندازه‌گیری شتابِ 1 تغییر داده و مثلاً هر جای دیگری مانندِ j بگذاریم، این تغییر، به طرف دیگر نیز به گونه‌ای باید منتقل گردد تا برابری بماند.

$$D_j^2 r_{J1} = \left(\sum f_{K1}\right) + \delta$$

در ادامه کوشش کنیم تا δ را بیابیم:

$$\delta = D_j^2 r_{J1} - D_i^2 r_{I1} = D_j^2 r_{J1} - D_i^2 r_{J1} + \left(D_i^2 r_{J1} - D_i^2 r_{I1}\right) = \left(D_j^2 r_{J1} - D_i^2 r_{J1}\right) + D_i^2 r_{JI}$$

توجه داشته باشید که آنچه در بالا برای فرق بین شتاب جسمِ 1 از دیدِ دو مرجع بدست آمد، بطور مشابه برای هر جسمِ Kیی درست است:

$$\left(D_j^2 r_{JK} - D_i^2 r_{JK}\right) + D_i^2 r_{JI}$$

که اگر نقطهٔ K و J یکی باشند، یعنی جسمِ مورد نظر به عنوان نقطهٔ مرجع گرفته شده است، داریم:

$$D_i^2 r_{KI}$$

تمرین – الف- هنگامی‌که این دو یکی نباشند ولی از دید دستگاه نامطلق ثابت باشند، چه می‌شود؟ ب- اگر علاوه بر فرضِ الف، سرعت دورانی دستگاه نامطلق نسبت به مطلق ثابت باشد، چه می‌شود؟

در ادامه توجه می‌کنیم که این δ برای همهٔ تک تکِ f_{K1} ها نیز بر قرار است. یعنی هرگاه کسی بخواهد هر یک از آنها را جداگانه از دید مرجعِ دیگر ببیند، همین فرق را خواهد دید! حال بیایید عبارتِ سمت راست را دو بخش نموده و بخواهیم یکی را از دید مرجع مطلق و دیگری را از دید مرجع نامطلق ببینیم:

$$D_j^2 r_{J1} = \left(\sum_{K \neq L} f_{K1}\right) + (f_{L1} + \delta)$$

اکنون می‌توان بخشِ دوم را گفت که شتاب داده شده از جسمِ L به جسمِ 1 ولی از دیدِ مرجعِ نامطلقِ j,J و آن را از این پس بجای f مثلاً با حرفِ g نمایش داده و بنویسیم:

$$D_j^2 r_{J1} = \left(\sum_{K \neq L} f_{K1}\right) + g_{L1}$$

و یا با دسته‌بندیِ جابجا بنویسیم:

$$D_j^2 r_{J1} = \left(\left(\sum_{K \neq L} f_{K1}\right) + \delta\right) + (f_{L1})$$

و بجایِ عبارتِ اول اکنون بنویسیم:

$$D_j^2 r_{J1} = g_{(All-L)1} + f_{L1}$$

که g_1 نشسته است برایِ شتابِ داده شده از همه به غیر از جسمِ L ام به جسمِ 1 ولی از دیدِ نامطلق و البته f_{L1} نشسته است برای شتاب داده شده از جسمِ Lام به جسمِ 1 از دیدِ مطلق! و البته بسادگی می‌توان دید که این دو بخش نمودن به هر شکلی ممکن است و نکتهٔ نادرستی به نظر نمی‌رسد. که این یعنی بسادگی L را یک دسته‌ای از اجسامِ در تعامل با 1 می‌گیریم.

انچه در بالا گذشت کمک می‌کند تا ما از یک مرجع نامطلقِ مناسب آغاز نموده و آرام آرام به مرجع مطلق مناسب، برسیم.

در آغاز به پر برخوردترین و ساده‌ترین پدیده یعنی داستانِ سقوطِ آزاد اجسام در اطراف‌مان و زمین، می‌پردازیم. اهمیت این داستان در این است که در سقوط آزاد ما جسم را در هیچ قیدی و بندی به هیچ جسمِ دیگری نمی‌بینیم و به نظرمان می‌رسد که جسم می‌تواند آزادانه به حرکتی که می‌خواهد ادامه دهد و همین آزادیِ جسم در حرکت است که صفت آزاد را داده و چون سقوط است یعنی از بالا به پایین است، نامِ سقوط یافته است و از همین رو، سقوطِ آزاد نام گرفته است! ولی آنچه بیشتر ما را راغب می‌کند این است که این حرکت قابل اندازه‌گیری از دید زمین است و تقریباً نزدیک به دقیقاً با یک شتابِ بسیار ثابتی سقوط انجام می‌شود حدودِ $9.8\,m/s^2$ به سمتِ پایین. و از برابری بالا می‌توان نوشت:

$$D_e^2 r_{E1} = g_{(All)1}$$

البته باید طرفِ راست را بخوانیم: برآیندِ شتاب‌های داده شده از همه، به جسمِ 1 ولی از دیدِ زمین!

در ادامه به داستان شاقول می‌پردازیم. نخِ شاقول جلویِ شتابی را که اگر نخ را پاره کنیم، فوراً برای سنگِ شاقول آغاز می‌شود، گرفته است. از طرفی آن شتابِ جلوگیری شده شتابی است که از طرفِ همهٔ جهان به غیر از نخ، به سنگ داده می‌شود ولی نخ منفیِ آن را داده است و لذا سنگ از دید زمین ساکن است. پس اگر سنگ را جسمِ 1 بگیریم، و مرجع نامطلق را زمین، داریم:

$$D_e^2 r_{E1} = 0 = g_{(All-L)1} + f_{L1}$$

که در اینجا L همان نخ است. اکنون از این برابری بسیار بهره می‌بریم. اول دقت کنید که شتابِ جلوگیری شده را می‌توان با از بین بردنِ نخ اندازه‌گیری نمود چراکه از دیدِ مرجع زمین است و ما روی زمین بآسانی با مثلاً با فیلم‌برداری می‌توانیم شتاب را نسبت به زمین اندازه‌گیری کنیم. و جالب‌تر اینکه آنچه اندازه‌گیری شده است همان منفیِ شتابی است که نخ از دید مطلق به سنگ می‌دهد!

$$f_{L1} = -g_{e1}$$

از این پس شتاب ناشی از همه به هر جسمی مانند 1 را از دیدِ زمین، بصورت بالا با g_e نمایش می‌دهیم. البته یک نکتهٔ بسیار باریک و زیبا در این استدلال بالا نهفته است و آن اینکه ما فرض نموده‌ایم، این g در فاصلهٔ زمانیِ پیش از پاره شدنِ نخ و پس از آن، یکسان باقی مانده است. در واقع امیدواریم، این شتاب اندازه‌گیری شده اکنون با ساعتی بعد و روزی و روزهایی بعد، فرق نکند! از این هم مهمتر اسن است که تجربه نشان داده است که این شتاب ثابت برای همهٔ اجسامِ باندازهٔ کافی کوچکتر از ابعادِ زمین نیز یکسان

است. توجه باید داشت که این اساساً لزومی ندارد ولی خداوند متعال این مهم را برای زیست ما در زمین ایجاد نموده است و نام آن را در قرآن کریم، قرار، گذارده است: الله الذی جعل لکم الارض قراراً

پس می‌توان گفت که نخ جلوی شتابِ مشخصِ بالا را که همه به آن سنگِ آزمون در حال دادن هستند را گرفته است. و همان‌گونه که آمد، بسیار بسیار جالب است که این شتابِ جلوگیری شده برای همهٔ انواع اجسام ثابت است. پس نخ بسته به سنگی که به آن بسته شده گاه جلوی شتابِ سنگ آزمون را گرفته و گاه جلوی شتابِ سنگ دیگری را گرفته است. این تغییر اندازه‌حرکت گرفته شده از هر یک را پیشتر نیروی وارده از طرفِ نخ به سنگ‌ها نامیدیم. پیش‌تر گفتیم مفهوم جرم هر جسم از مقایسهٔ برابریِ تغییرِ اندازه‌حرکتِ در تعاملِ یکی با دیگری باید بدست آید.

اکنون این شتاب ثابتی که همهٔ اجسام مورد نظرمان در زمین دارند، محمل فوق‌العاده‌ای است که برای مقایسه در اختیارمان قرار گرفته است. توجه می‌کنیم که هر چند شتاب‌های جلوگیری شده یکسان‌اند ولی اندازه‌حرکت‌های جلوگیری شده یکسان نیستند یعنی:

$$f_{L1} = f_{L2} \quad , \quad F_{L1} \neq F_{L2}$$

اکنون کافی است آزمایشی ترتیب دهیم تا نسبتِ F_{L1} و F_{L2} را به دست دهد. این آزمون سال‌ها پیش که شاید دوریِ آن را نتوان بسادگی یافت، ترتیب داده شده و به دستگاهی که امروز ما آن را ترازو(یِ دو کفه‌ای) می‌نامیم، رسیده است. و این نیرو، نامِ وزن به خود گرفته و ترازو نیز دستگاهی است که این دو وزن را با هم محک می‌زند که کدام بیشتر و یا کمتر است و برابری نیز هنگامی است که ترازو مستقیم به هیچ سمتی نپیچد. الگوریتم دقیق این است که ابتدا با برابری، سنگ‌های هم‌وزن ایجاد نموده و از برابریِ دو سنگ هم وزن با سنگ دیگر سنگ‌های با وزن دو برابر و غیره ایجاد نموده و هر یک را بر حسب سنگِ آزمون نام بگذاریم. بدین سان، سنگ‌های یک کیلویی، دو و چند کیلویی و یا حتی یک گرمی و غیره باندازهٔ کافی می‌سازیم. و سپس هر سنگ دلخواه را با برابر کردن با چندی از سنگ‌های پیش‌تر نام‌گذاری شده، وزن نموده و وزن‌اش را می‌یابیم. و مثلاً می‌یابیم:

$$1550 \ gm/s^2$$

و از اینجا نتیجه می‌گیریم که آن سنگ ما معادلِ 1550 برابر سنگ یک گرمی در تعاملِ حرکتی بوده است و سپس می‌گوییم پس این سنگ جرمی برابر با 1550 گرم دارد و می‌نویسیم:

$$m_2 = 1550 \ g$$

از همین رو بسیار متداول است که دلیلِ نابرابریِ Fها در بالا را به نابرابریِ mها نسبت می‌دهند ولی توجه داشته باشید که این گویش درست نیست بلکه باید گفته شود که به دلیل نابرابری‌ای که در نیروها می‌بینیم، به نابرابریِ mها پی می‌بریم.

در اینجا یک بار دیگر چکیدهٔ داستان را دوباره می‌آوریم:

$$D_e^2 r_{E1} = 0 = g_1 + f_{L1} \ \dashrightarrow\ f_{L1} = -g_1$$

$$D_e^2 r_{E2} = 0 = g_2 + f_{L2} \ \dashrightarrow\ f_{L2} = -g_2$$

و چون از اندازه‌گیری‌ها دیده‌ایم:

$$g_{e1} = g_{e2} = g_e$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\dashrightarrow \quad f_{L1} = f_{L2} = -g_e$$

از طرف دیگر در ترازو می‌بینیم:

$$(F_{L1} = m_1 f_{L1} = -m_1 g_e) \neq (F_{L2} = m_2 f_{L2} = -m_2 g_e)\ ,\ \ F_{L2} = 1550\ F_{L1}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$m_2\ g_e = 1550\ m_1\ g_e \qquad \dashrightarrow \qquad m_2 = 1550\ m_1$$

آموزهٔ دیگر از همین آزمایش شاقول:

با توجه به خم‌پذیریِ نخ، می‌توان استدلال کرد که راستایِ نخ، ناچار در راستایِ f_L ها خواهد ایستاد و این را با راستایِ اندازه‌گیری شده از شتابِ g_e می‌توان مقایسه نموده و درستیِ آن را آزمود. از همین رو می‌توان گفت که ما با شاقول راستایِ شتابی را که همه از دیدِ مطلق به سنگ می‌دهند را یافته‌ایم و رویِ جاهای گوناگون زمین می‌توانیم آن را نشان دهیم.

آموزهٔ دیگر

توجه کنید با کمک مفهومِ شتابِ آزاد و این واقعیت که این شتاب با توجه به همان «قرار» بودنِ زمین، الگوی ریاضیِ بسیار دقیقی دارد، اکنون می‌توان در تعاملات گوناگونی که یک جسم می‌تواند داشته باشد، به کشفِ چگونگیِ کنش و واکنش مربوطه پرداخت. توجه می‌کنیم که در برابریِ:

$$D_e^2 r_{E1} = g_{e1} + f_{L1}$$

سمتِ چپ را می‌توان اندازه‌گیری نمود و در سمت راست، الگویِ g_e را بکار گرفته و در نقطهٔ 1 آن را بدست می‌آوریم، و از این راه، f_{L1} را می‌یابیم و به این ترتیب چگونگیِ کنش و واکنشِ جسمِ یک را با جسمِ L یا با مجموعهٔ اجسامِ L را کشف و الگوسازی می‌کنیم.

یک نمونهٔ بسیار سادهٔ آن نیرویِ اصطکاک است که به همین روش الگوسازی شده است. هنگامی که کششِ جسم روی جسم دیگر صورت می‌پذیرد، کافی است سهمِ شتابِ آزاد حذف شود و آنچه می‌ماند همان نیرویِ اصطکاک است.

توجه کنید که انواعِ نیروهای بین اجسامی که بارهای الکتریکی دارند یا دو قطبی‌های مغناطیسی و یا نیروهای الکترومغناطیسی و حتی گرانش عمومیِ اجسام، به این ترتیب کشف شده و الگوی ریاضی یافته‌اند.

جالب توجهِ فوق‌العاده است که بدانیم، همهٔ این نیروها، در نتیجهٔ آزمون‌های بسیار بدست آمده‌اند ولی یک ویژگی مشترک در آنها بدست آمده است و آن اینکه: از دیدِ مرجعی داده می‌شوند که فقط و فقط از جای نسبیِ دو جسم بدست می‌آید!! مثلاً نیروی اصطکاک فقط به جایِ دو سطح نسبت به هم و به سرعتِ نسبی‌شان بستگی دارد و این سرعت نسبی یعنی سرعت برداری که جای یکی را به دیگری وصل می‌کند از دیدِ دستگاهِ چسبیده به یکی از آن دو که اگر دستگاه و یا نقطه را جابجا کنیم فقط علامت نیرو عوض می‌شود که این نیز همواره باید بگونه‌ای باشد که برای هر یک نیروی مقاوم در برابر حرکت نسبی باشد.

و این یعنی برای تعیینِ آنها معطلِ یافتنِ مرجعِ مطلق نیستید! اینگونه نیست که چون شما هنوز نتوانسته‌اید مرجع مطلق را بیابید پس نمی‌توانید آن نیروها را نیز مشخص کنید بلکه نیروها بگونه‌ای تعریف‌شان بدست آمده که بستگی به مرجع مطلق و یا مرجعی به غیر از آنچه از جای نسبیِ آن دو بدست می‌توان آورد، ندارند.

و به عنوان یک نمونهٔ دیگر نیروی بین اجسام باردار الکتریکی است که فقط به امتداد بردار جابجایی یکی به دیگری بستگی دارد و نه چیزی دیگر از جاها! دقت کنید منظور ما این نیست که این نیروها به چیزهای دیگری بستگی ندارند بلکه فقط آن بستگی‌هایی که به جایِ آنها برمی‌گردد منظور است مثلاً نیروی بین اجسامِ باردار، حتماً به مقدارِ بارها نیز بستگی دارد.

ولی نکتهٔ بسیار بسیار مورد تأکید این است که این نیروها، در برابریِ اساسیِ ما که در طرفِ راست قرارشان داده‌ایم، شتابِ جسم مورد نظرمان را در طرفِ چپ فقط و فقط از دید مرجع مطلق می‌دهند.

یک نکته

آنچه دربارهٔ شتابِ آزاد از دیدِ زمین گفته شد و همچنین برابریِ بدست آمده از آن، قابل گسترش به شتابِ آزاد از دید هر مرجع دیگری نیز هست. یعنی اگر کسی شتابِ آزاد از دیدِ مرجعِ j,J را در لحظهٔ مربوطه بداند، می‌تواند برابریِ بالا را بطور مشابه نوشته و بویژه اگر الگوی درستی از آن بیابد، می‌تواند مشابه بالا بکار بندد.

$$D_j^2 r_{J1} = g_{j1} + f_{L1}$$

در واقع لطفِ بزرگ خداوند که زمین را برای ما «قرار» کرده است، سبب شده تا ما الگویِ بسیار دقیقِ تقریباً تغییر ناپذیر با زمانی یافته و بکار بندیم وگرنه این برابری برای هر مرجعِ دلخواهِ j,J یی نیز درست است.

بویژه این برای خودِ مرجعِ مطلق نیز درست است:

$$D_i^2 r_{I1} = g_{i1} + f_{L1}$$

ولی برای کاربردی کردنِ آن لازم است برای g_i در جاهایِ گوناگون الگوی ریاضیِ مناسبی یافت.

کوششی که دانشمندان برای یافتنِ شتابِ آزاد اجسامِ بزرگ مانندِ سیارات منظومهٔ خورشیدی داشته‌اند، منجر به کشفِ نیرویِ گرانشِ عمومی شده است.

پیمایش شتاب‌سنج‌ها

باید شتاب‌های گوناگون داده و بواسطهٔ بی‌قراری‌های نسبیِ بینِ بدنه و جرم آزمون، پیمانهٔ مربوطه را تعیین نموده تا پیمایش، کامل گردد. اما یکی از بهترین و ساده‌ترین راه‌ها این است که از شتابِ وزن یا همان شتاب آزاد که دقیقاً می‌توان آن را اندازه‌گیری نمود، استفاده کرد. به این ترتیب که چون می‌دانیم با سقوط آزاد، شتاب چیست پس جلوگیری کننده‌اش هم دارای همان مقدار شتاب‌دهندگی است. حال حساسهٔ شتاب

را در راستای همین شتاب، بصورت ساکن قرار می‌دهیم. چیزی که شتاب‌سنج حس می‌کند ناچار، معادلِ شتاب آزاد است ولی در جهت مخالف و این خود بهترین نوع پیمایش را سامان می‌بخشد.

البته نباید فراموش کنید که همهٔ این اندازه‌گیری‌ها نسبت به یک جایی در زمین و از دید دستگاهی چسبیده به زمین انجام می‌گیرد. روشن است که امیدواریم اندازه‌گیریِ مشابه در جاهای دیگر و در دستگاه‌های دیگر نیز بطور مشابه پیمایش گردد و پیمایش پیشین دست نخورد چراکه فقط به شتاب‌های نسبی بین بدنه و جرم آزمون بستگی دارد.

اما هرچند این فرض را معمولاً در نظر می‌گیرند ولی همین‌جا گوشزد می‌کنیم که لزومی ندارد چنین فرضی درست باشد. دلیل ما برای این بی‌اعتمادی این است که چه کسی می‌تواند مطمئن باشد که ویژگی‌های اجزای داخلی و بدنهٔ حساسه و چگونگیِ تعاملشان در همه جا یکسان بماند. ما یک بی‌قراریِ نسبیِ یکسانی را بین بدنه و جرم آزمون ایجاد می‌کنیم ولی حالا که شرایط حاکم بر حساسه تغییر کرده از کجا معلوم که باز هم همان علامت‌هایی که دریافت می‌کردیم، دریافت گردد. مثلاً شرایط محیطِ اطراف باید تا جاییکه ممکن است یکسان حفظ گردد. لذاست که حداقل انتظار داریم دما، فشار و .... یکسان نگاه داشته شوند.

اندازه‌گیری شتاب‌های گرانشی یا شتاب‌های آزاد

اندازه‌گیری شتاب در سقوط آزاد و به دور از تعامل با هوا، یک نمونه از اندازه‌گیریِ شتاب‌های آزاد یا گرانشی است. روشن است که در این اندازه‌گیری کوشش بر این است که نیروهای الکتریکی، مغناطیسی و الکترومغناطیسی و غیره که شناختی نسبت به آنها در دست است، در کار نباشند و فقط نیرویی که نامِ گرانشیِ جرمی عمومی گرفته است، در کار باشد.

حال در هر جایی که این اطلاعات مورد نیاز باشد تا در برابری بالا به عنوانِ g_B قرار داده شود، لازم است پیش‌تر اندازه‌گیری شده باشد. اما نکتهٔ قابل توجه این است که هیچ لزومی ندارد تا در هنگام بکارگیریِ برابری، این مقدارِ شتاب با هنگامیکه پیش‌تر اندازه‌گیری شده است، یکی باشد چراکه اجرام جهان، در هر زمان، در موقعیت جدیدی نسبت به زمین قرار می‌گیرند. به همین دلیل همواره درجه‌ای از تقریب در کار است.

هم‌اکنون سنجش شتابِ سقوط آزاد در جاهای گوناگون زمین و با دقت بسیار بالا، خود یک حرفه است و دستگاه‌های فوق‌العاده خاصی نیز برای آن ساخته شده‌اند. اعدادی که شما به همین نام می‌شناسید، از چنین دقت بسیار بالایی برخوردار نیستند و دقت آنها محدود به همان ارقامی است که داده می‌شوند.

گرانش جزر و مدی، دستگاه مطلقِ زمینی

توجه کنید که از دید یک دستگاه چسبیده به زمین، خورشید و حتی ماه دور آن می‌چرخد و تأثیر خورشید از یک طرف زمین به طرف مقابل می‌تواند براحتی در g تأثیر قابل ملاحظه‌ای داشته باشد. البته بخوبی می‌دانید که هر چه به سطح زمین نزدیک‌تر باشیم این تأثیر کمتر خواهد شد.

لذاست که در چنین شرایطی ترجیح داده می‌شود، دستگاهی را مرجع بگیرند که با خورشید نچرخد یا بقولی چسبیده به خورشید باشد. البته اصطلاح چسبیده به خورشید هرچند قابل فهم به نظر می‌رسد ولی اگر گفته شود با خورشید نسبت به زمین نمی‌چرخد عملیاتی‌تر است.

حال اگر نقطهٔ مرجع را هر نقطه‌ای روی زمین بگیریم دیگر نمی‌تواند مناسب باشد چراکه حالا نقاط مختلف، نتیجهٔ مختلفی برای g ببار خواهند آورد. به همین منظور پیشنهاد می‌گردد تا مرکز جرم زمین را نقطهٔ مرجع قرار دهیم. چنین مرجعی را مرجع مطلقِ زمینی می‌گویند و برای ناوبری‌های دور و برِ زمین، همین را مطلق می‌گیرند و با زیرنویس i نمایش می‌دهند.

ممکن است کسی بگوید با چنین دستگاهی ماه نیز دور آن می‌چرخد و باز هم می‌تواند مناسب نباشد که این خود هر چند تا حدودی صحیح است ولی فعلاً باید گفت که تأثیر آن کمتر از خورشید است و لذا ترجیح دارد ولی به این موضوع در قسمت بعدی می‌پردازیم.

تمرین- به دست آورید که برای هر نقطهٔ چسبیده به زمین، g چه مقداری تغییر خواهد نمود؟ (نسبت به وقتی که دستگاه را چسبیده به زمین می‌گیرند)

بیایید پیش از هر گفتگوی بیشتری دربارهٔ g ، ببینیم، مرجع گرفتن مرکز زمین با مرجع گرفتنِ هر نقطهٔ دیگری که شاید مناسب‌تر باشد، چه اختلافی هست. این نقاط، نقاطی هستند که در فواصل به مراتب دورتر از زمین ناچار از گزینش آنها به عنوان مرجع خواهیم بود، مانند خورشید وقتی بخواهیم در منظومهٔ آن، بیان بالا را بکار بریم و یا ستارگان دور دست‌تر در کهکشان راه شیری.

لذا بیایید یک نقطهٔ بسیار دور دست و یک دستگاه نسبتاً ثابت از دیدگاه همان دوردست‌ها را مرجع گرفته و ببینیم گزینش مرکز زمین به عنوان مرجع با گزینشِ آن نقطه و آن دستگاه چه اختلافی درست می‌تواند بکند.

حال با این مرجع بسیار دوردست که اینبار، آن را با زیرنویس i ، نمایش می‌دهیم، معادلات را می‌نویسیم:

$$D_i^2\, r_{IB} = D_i^2\, r_{IE} + D_i^2\, r_{EB} = f_B + g_B$$

حال دقت می‌کنیم که $D_i^2\, r_{IE}$ چیزی نیست جز شتاب آزاد در مرکز زمین که آن را از این پس با g_E نشان می‌دهیم، لذا داریم:

$$D_i^2\, r_{EB} = f_B + g_B - g_E = f_B + g'_B$$

پس فرقِ مورد نظر، بینِ g_B و g'_B خلاصه شده است. حال توجه می‌کنیم که gها ناشی از همهٔ اجرام هستند لذا چنین می‌نویسیم:

$$g'_B = g_B^{All} - g_E^{All} = g_B^{Earth} + g_B^{Others} - g_E^{Earth} - g_E^{Others}$$

حال می‌دانیم که تعریف مرکز جرم زمین یعنی $g_E^{Earth} = 0$ ، پس خواهیم داشت:

$$g'_B = g_B^{Earth} + \left(g_B^{Others} - g_E^{Others}\right) = g_B^{Earth} + \delta g_{BE}^{Others}$$

توجه می‌کنید که g'_B عبارت است از «شتاب گرانشی ناشی از زمین به تنهایی» بعلاوهٔ «اختلاف شتاب گرانشی ناشی از بقیهٔ اجرام آسمانی در نقطهٔ B و مرکز زمین». همانگونه که پیشتر نیز اشاره شد، این اختلاف در نزدیکی زمین ناچیز است ولی به هر حال برای همهٔ کاربردها قابل صرف نظر نمی‌باشد. این اختلاف عامل اصلی جزر و مد دریاها و رودخانه‌ها است. چون زمین در حال گردش است، گاهی دریاها در سمتی هستند که این اختلاف گرانش با گرانش زمین جمع و گاهی تفریق می‌گردد و لذا گاهی مد و گاهی جزر صورت می‌پذیرد. وزنی که ما اندازه‌گیری می‌کنیم نیز می‌تواند همین تفاوت را در طول شبانه روز نشان دهد. البته عمدهٔ جرمی که گویا در این فرق، تأثیر بسزایی دارد، ماه زمین است.

به هرحال اگر بخواهیم مرکز زمین را معیار قرار داده و انتگرالگیری، منجر به سرعت و مکان نسبت به مرکز زمین گردد باید در سمت راست معادله، بجای g از g' استفاده نمود و اگر نتوانید و بخواهید فقط از اثر زمین و الگوی گرانشی ناشی از فقط آن، استفاده کنید، در این صورت است که شما باندازهٔ δg_{EB}^{Others} دچار اشتباه خواهید گشت.

حال چنانچه توجه دارید مشتق‌گیری هنوز هم از دید یک دستگاه غیر چرخان نسبت به دوردست‌ها، صورت می‌پذیرد. به این منظور دستگاهی را در نظر می‌گیرند که محور سوم آن به محور همین دوران منطبق باشد و دو محور دیگر آن همراه با چرخش وضعی زمین به دور خود از دید خورشید یا ستارگان دوردست، که حرکت وضعی یا $Spin$ نامیده می‌شود، نمی‌چرخد و در نتیجه سرعت دوران دستگاهِ چسبیده به زمین، نسبت به این دستگاه را ω_{ie} می‌نامیم که اندازهٔ آنرا با ω_e نمایش می‌دهیم و همانطور که می‌دانید تقریباً برابر 2π رادیان در یک شبانه روز است.

تمرین- سعی کنید با توجه به سایه راهی برای تعیین همان محور سوم یا محور $Spin$ زمین بیابید. سپس در ادامه سعی کنید تا برای تعیین سرعت دورانی مربوط نیز راهی یافته و بگویید چرا این مقداری ثابت تلقی می‌گردد.

تمرین- برای یک نقطهٔ Bیِ چسبیده به زمین g_B^{Earth} را از دید دو دستگاه چسبیده به زمین و مطلقِ زمینی به دست آورید.

پاسخ: چون سرعت دورانی این دو دستگاه نامتغیر است لذا عبارت شتابِ مماسی از اختلاف شتاب حذف می‌گردد. همین‌طور عبارت شتاب کوریولیس نیز که ناشی از سرعت نسبی دو نقطهٔ مرجع از دید دستگاه چسبیده به زمین است نیز صفر است چراکه این سرعت نسبی صفر است. پس فقط می‌ماند شتاب جانب مرکز که عبارت است از : $\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r_{EB})$ که اگر r_{EB} را در هر یک از دو دستگاه بصورت $[x\ \ y\ \ z]^T$ بیان گردد، به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y\omega_e \\ x\omega_e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\omega_e^2 \\ -y\omega_e^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که همواره به سمت محور سوم و باندازهٔ فاصله‌اش از آن محور ضربدر ω_e^2 است: $\omega_e^2\ \sqrt{x^2 + y^2}$.

تمرین- برای یک شاقول، یک بار با مرجع گرفتنِ دستگاه چسبیده به زمین و بار دیگر با مرجع گرفتن دستگاه اینرسی زمینی، بیان نیوتنی را بنویسید و بطور کامل شرح دهید.

پاسخ: ابتدا مرجع را چسبیده به زمین می‌گیریم. می‌بینیم که سمت چپ، شتاب نسبت به هر نقطه از زمین و از دید دستگاه چسبیده به زمین صفر است. و اما سمت راست نیز دو شتاب داریم یکی شتابِ آزاد از دیدِ دستگاه چسبیده به زمین است و دیگری جلوگیری کننده از آن که از طرف نخِ شاقول به وزنهٔ آن وارد می‌گردد. این دو شتاب لابد با هم برابر شده‌اند که شتابِ حاصل نهایی صفر است. پس می‌نویسیم:

$$D_e^2\, r_{EB} = f_B + g_{e_B} \quad \rightarrow \quad 0 = f_B + g_{e_B} \ \rightarrow \quad f_B = -g_{e_B}$$

فراموش نکنید که راستایی که شاقول می‌ایستد تعیین کنندهٔ راستایِ g_{e_B} خواهد بود. حال دستگاه را غیرچرخان نسبت به خورشید گرفته و دوباره بیان می‌کنیم. حال از دیدِ این دستگاه، شتابِ وزنهٔ شاقول صفر نبوده و همان مقداری است که در تمرین پیشین محاسبه گردید. لذا سمت چپ معادله، ناصفر بوده و برابر است با $\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r_{EB})$. اما حالا ببینیم f_B چه به دست خواهد آمد. دقت می‌کنیم که اگر آزمون سقوط آزاد صورت گیرد، به غیر از شتابی که در آزمون قبلی یعنی g_{e_B} به دست آمد، همین عبارتِ شتابِ بالا اشاره شده اضافه خواهد شد. یعنی خواهیم داشت:

$$g_{i_B} = g_{e_B} + \ \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r_{EB}) \ \rightarrow$$

پس باید بنویسیم:

$$\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r_{EB}) = f_B + g_{i_B} = f_B + g_{e_B} + \ \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r_{EB}) \ \rightarrow$$

لذا دوباره به دست می‌آید که

$$f_B = -g_{e_B}$$

الگوی ریاضی برای گرانش دور و بر زمین

دانستیم که بر اساس هر دستگاه و نقطهٔ مرجعی، لازم است g در دور و بر زمین، جاییکه می‌خواهد ناوبری گردد، اندازه‌گیری یا محاسبه و یا به هر حال به نحوی تعیین گردد. هرگاه بتوان الگویی محاسباتی برای g ارائه نمود، کار ناوبری بسیار ساده‌تر خواهد گردید.

در اینجا منظور این است که بر حسب تمام جاهای ممکن در دور و بر زمین عبارتی و یا الگوریتم محاسبه‌ای در اختیار داشته باشیم که فوراً جاگذاری نموده و gی آنجا را به دست آوریم. در واقع گویی جدولِ

اندازه‌گیریِ ما بتواند در عبارتی ریاضی خلاصه گردد. از این پس بین مقدار واقعی که می‌تواند در هر لحظه اندازه‌گیری و تعیین گردد با مقداری که هر الگوی ریاضی‌ای می‌تواند بدهد، یک فرق نمایشی خواهیم داشت. اولی را همچنان با حرفِ g و دومی را با حرف γ نمایش می‌دهیم.

همگی می‌دانیم که ساده‌ترین الگویی که معمولاً در مسائل ساده و محلی استفاده می‌گردد، دارای مقدار تقریبیِ $\gamma = 9.8\frac{m}{s^2}$ است و جهت آن نیز بوسیلۀ شاقولِ محلی تعیین می‌گردد که آن نیز برای تمام جاها یکسان تلقی می‌گردد. اما همه می‌دانیم که این الگوی بسیار ساده برای ارتفاعات بالاتر از سطح زمین کاملاً نادرست می‌شود و در جاهای گوناگونِ سطح زمین نیز دارای بی‌دقتیِ قابل ملاحظه‌ای می‌شود.

الگوی مبنایی، الگویی است که بر اساس دوری و نزدیکی اجسام از یکدیگر بنا نهاده شده است و صادق ال محمد که بخشش سرشار خداوند بر او و آلش باد، آن را به همراه موضوعات مرتبط به مسیرها(مدارها)ی دیده شده از سیاره و ستارگان آسمانی، راهنمایی نموده‌اند. این توضیح تنها بخش بسیار جزئی از نامه‌ای است که ایشان در پاسخ به درخواست یکی از پیروانشان فرستاده است که آن جزء عبارت است از:

... فَنَظَرَتِ الْعَيْنُ إِلَى خَلْقٍ مُتَّصِلٍ بَعْضُهُ بِبَعْضٍ فَدَلَّتِ الْقَلْبَ عَلَى مَا عَايَنَتْ وَ تَفَكَّرَ الْقَلْبُ حِينَ دَلَّتْهُ الْعَيْنُ عَلَى مَا عَايَنَتْ مِنْ مَلَكُوتِ السَّمَاءِ وَ ارْتِفَاعِهَا فِي الْهَوَاءِ بِغَيْرِ عَمَدٍ يُرَى وَ لَا دَعَائِمَ تُمْسِكُهَا لَا تُؤَخَّرُ مَرَّةً فَتَنْكَشِطَ وَ لَا تُقَدَّمُ أُخْرَى فَتَزُولَ وَ لَا تَهْبِطُ مَرَّةً فَتَدْنُوَ وَ لَا تَرْتَفِعُ أُخْرَى فَتَنْأَى لَا تَتَغَيَّرُ لِطُولِ الْأَمَدِ وَ لَا تَخْلُقُ لِاخْتِلَافِ اللَّيَالِي وَ الْأَيَّامِ وَ لَا تَتَدَاعَى مِنْهَا نَاحِيَةٌ وَ لَا يَنْهَارُ مِنْهَا طَرَفٌ مَعَ مَا عَايَنَتْ مِنَ النُّجُومِ الْجَارِيَةِ السَّبْعَةِ الْمُخْتَلِفَةِ بِمَسِيرِهَا لِدَوَرَانِ الْفَلَكِ وَ تَنَقُّلِهَا فِي الْبُرُوجِ يَوْماً بَعْدَ يَوْمٍ وَ شَهْراً بَعْدَ شَهْرٍ وَ سَنَةً بَعْدَ سَنَةٍ مِنْهَا السَّرِيعُ وَ مِنْهَا الْبَطِيءُ وَ مِنْهَا الْمُعْتَدِلُ السَّيْرِ ثُمَّ رُجُوعُهَا وَ اسْتِقَامَتُهَا وَ أَخْذُهَا عَرْضاً وَ طُولًا وَ خُنُوسُهَا عِنْدَ الشَّمْسِ وَ هِيَ مُشْرِقَةٌ وَ ظُهُورُهَا إِذَا غَرَبَتْ وَ جَرَى الشَّمْسُ وَ الْقَمَرُ فِي الْبُرُوجِ دَائِبَيْنِ لَا يَتَغَيَّرَانِ فِي أَزْمِنَتِهِمَا وَ أَوْقَاتِهِمَا ...

... پس نگاه می‌کند چشم به آفرینشی که متصل است برخی از آن به برخی، پس به این ترتیب قلب را به آنچه می‌بیند، رهنمون می‌کند و قلب همان هنگام که چشم، او را به دیدنی‌هایش رهنمون می‌سازد، به آنها فکر می‌کند. دیدنی‌هایی از ملکوتِ آسمان و بالا برده شدنش در هوا، نه به وسیلۀ ستونی که دیده شود و نه آوندهایی که نگه دارندش، حتی یک بار هم پس نمی‌افتد که در نتیجه از جا کنده شود و یا پیش نمی‌افتد که در نتیجه از جا در رفته و از بین رود، و نیز، حتی یک بار هم فرو نمی‌افتد که در نتیجه نزدیک شود و یا بالاتر نمی‌رود که در نتیجه روگردانده و دور شود. و این شرایط دگرگون نمی‌گردد در پیِ طولانی شدنِ این

جریان. همچنین نوآوری‌ای در این داستان رخ نمی‌دهد با آمد و شدِ شب‌ها و روزها. و همچنین ناحیه‌ای از آن دیگری را نه به خود می‌خواند و نه می‌راند به طرفی. در کنارِ این معاینه‌ها معاینه‌های فراوانِ دیگری است از سیاره و ستارگان روانِ هفتگانهٔ پشت سر هم، با توجهِ به مسیرهاشان (که) بواسطهٔ دوران فلک و جابجایی‌شان در برج‌هاشان(است) روز به روز و ماه به ماه و سال به سال در حالِ رخ دادن هستند. برخی از آنها روندی سریع و برخی کُند و برخی میانه دارند. سپس بازگشت دوباره‌شان و پایداری‌شان در مسیر خودشان با عرض و طولِ معین در آسمان. و همچنین ناپدید شدن‌شان نزد خورشید درحالیکه او نمایان و نورافشان است و پدیداری‌شان هنگامیکه خورشید غروب می‌کند. همچنین خورشید و ماه در برج‌ها روان‌اند بصورت دو کوک بی‌آنکه تغییری در این دو زمان و وقت‌هاشان بوجود آورند ... !

دقت کنید که سیاره‌ها و ستارگان آسمان بهترین الگو برای شتاب آزادند که خداوند به قول امام صادق که بر ایشان درود، برای معاینه ما قرار داده است. در جایی دیگر شاگردی از ایشان می‌پرسد چگونه می‌گویید این سیارات همه در حال گردش در بروج خودشان‌اند درحالیکه اگر در حال گردش باشند باید از مسیر خود در روند؟! و ایشان پاسخ می‌دهند: آیا تاکنون آتش‌گردانه را دیده‌ای؟ که شاگرد می‌گوید خیر! و امام می‌فرمایند برو ببین و بدان که خداوند نفرموده که ستون‌هایی نیست بلکه فرموده ستون‌هایی که شما بتوانید ببینید، نیست! و بلکه آسمان پر است از این ستون‌های نامرئی!!

این معاینه و تفکر در طی سالیان طولانی منجر به الگوی تناسبِ عکس با مربعِ دوری و نزدیکی(فاصله) گردید. و اگر فرض گردد که زمین یک کرهٔ همگن است با شعاعی معین و بر اساس همین و اینکه اجرام بزرگ دیگر باندازهٔ کافی از ما دور هستند، عبارتی ریاضی برای gیِ اطرافِ آن به دست می‌آید:

$$\gamma(r_{EB}) = \frac{K}{(r_{EB})^2}$$

که ثابتِ K با آزمایش باید به دست آید. همین جا روشن است که لازم است برای تعیین r_{EB} ، مرکز کره یعنی E ، نسبت به نقاط دیگر تعیین گردد. این مرکز باید از روی نقاط معینِ دیگر روی زمین یا نقاط دیگرِ مرجع تعیین گردد تا بتوان از این الگو استفاده نمود که این به خودی خود نیاز به اندازه‌گیری‌های دقیق و متعددی دارد.

در واقع نداشتن یک الگوی ریاضیِ شامل، همواره شما را مجبور به اندازه‌گیری‌های مکرر و مفصل می‌نماید که جداول بزرگی را باید سامان ببخشید. درحالیکه اگر موفق شوید الگویی پیدا کنید که به جدول شما بتواند خورانده شود و از آن پس آن الگو، گویای جدول شما باشد، خواهید توانست بجای همهٔ آن جداول مفصل، آن الگو که این بار به سادگی، همان نتایج را در بر دارد، بکار برید.

در واقع کاری که رخ داده چیزی نبوده جز یک جور طی شدن فرآیندِ شناسایی. در شناسایی فرآیند به این ترتیب است که ابتدا الگویی ریاضی‌ای گمان زده می‌شود سپس سعی می‌گردد که دیده شود آیا جدول‌ها و مشاهدات به این الگویِ پیشنهادی می‌خورد یا خیر. اگر خورد که مورد پذیرش قرار می‌گیرد وگرنه الگویی مناسب‌تر جستجو می‌شود و به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا به الگویی هر چه فراگیرتر برسد.

زمین را در تمامی الگوها همگن فرض می‌کنیم و ضمناً از تمامی گرانشهای جزر و مدی و تحرکات جرمی در زمین که عبارتهای متغیر با زمان ایجاد می‌کنند، صرف نظر می‌گردد(نشان داده‌اند که اینها حداکثر مقادیری در حدودِ $0.1\ \mu g$ ایجاد می‌کنند).

الگوی کروی

حال برای سادگی ابتدا فرض کنید که زمین کروی است و الگوی ریاضیِ پیشنهادی بالا را نیز مبنا قرار دهید. به این ترتیب به سادگی برای پتانسیل ناشی از میدان گرانش بدون اثر شتاب جانب مرکز داریم: $U(r) = \frac{K}{r}$ که r همان فاصله در مختصات کروی می‌باشد. از طرفی می‌دانید که دیورژانس پتانسیل در هر نقطه، بردار شتابِ مورد نظر را در آن نقطه می‌دهد. پس به این ترتیب بردار شتابی را که این الگو پیشنهاد می‌دهد، خواهد بود:

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{K}{r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \rightarrow \quad \gamma^T = \frac{K}{r^3}(-x \quad -y \quad -z)$$

$$\gamma_B = -\frac{K}{r^3}\, r_{EB}$$

که نتیجه به همان شکلی است که انتظار داشتیم: درست در امتداد بردار مکان، در خلاف جهت آن و دقیقاً به اندازهٔ $\frac{K}{r^2}$.

همان‌گونه که پیشتر نیز گفته شد، این الگو شتاب جانب مرکز ناشی از حرکت وضعی زمین از دید خورشید و ستارگان دوردست را در بر نداشته و لذا برای g_{i_B} مناسب است و از این رو بهتر است بنویسیم:

$$\gamma_{i_B} = -\frac{K}{r^3}\, r_{EB} \qquad , \qquad \gamma_{e_B} = -\frac{K}{r^3}\, r_{EB} - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times r_{EB})$$

اکنون اگر سطح پتانسیل را از دید زمین بررسی می‌کنیم و سطح هم‌پتانسیل را روی سطحِ ایستاده نسبت به زمین می‌خواهیم دنبال کنیم و آن را معیار اندازه‌گیری‌های دیگر قرار دهیم، لازم است به عبارت پتانسیل در بالا عبارتی ناشی از پتانسیل شتاب جانب مرکز که در الگوی گرانش عمومی لحاظ نشده نیز اضافه گردد. این عبارت خواهد بود از $\frac{1}{2}\omega_e^2\, r^2\, sin^2\, \varphi$. و از این رو خواهیم داشت:

$$U_e(r,\varphi) = \frac{K}{r} + \frac{1}{2}\omega_e^2\, r^2\, sin^2\,\varphi$$

که φ در مختصات کروی تعریف شده است. از این پس بدلیل اینکه این الگو در ادامه نیز ادعا دارد که این K را می توان تعبیر نمود به حاصل‌ضرب ثابتی جهانی در جرم زمین لذا با نمادِ GM نمایش خواهیم داد.

تمرین – سطوح هم‌پتانسیل در یک میدان یعنی چه؟

پاسخ: در جایی از میدان نیرویِ مورد نظر، جسمی که آن نیرو وارد می‌شود را در نظر بگیرید. حال اگر جسم به گونه‌ای حرکت کند که کارِ آن نیرو، صفر بماند، می‌گوییم آن جسم در سطحِ هم‌پتانسیل با جایِ آغازین مانده است. و در واقع همهٔ جاهاییکه بتواند برود و هم‌چنان کاری انجام نشود را سطح هم‌پتانسیل با جای آغازین و البته سطح هم‌پتانسیل با هم خوانده می‌شود.

برای اینکه کارِ نیرویی در هنگام حرکت صفر باشد، لازم است این نیرو بر مسیر حرکت عمود بماند. به عنوان نمونه در میدان یک بار الکتریکی این نیرو در راستایِ شعاعی به سمتِ آن بار است. از همین رو پتانسیلِ آن مشابهِ میدان گرانش عمومی متناسب با عکس فاصله از آن بار است و سطوح هم‌پتانسیل سطوحی کروی با شعاعِ یکسان هستند.

می‌خواهیم توجه کنیم که اکنون که شتاب جانب مرکز را نیز افزوده‌ایم، سطوح هم پتانسیل، مانند قبل، کروی نخواهند بود هر چند که بسیار نزدیک به یک کره هست. این را با تحلیل سادهٔ زیر می‌توان دید.

فرض کنید سطح هم پتانسیلِ برابر $\frac{GM}{b}$ را بخواهیم در حالت جدید به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$\frac{GM}{b} = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega_e^2\, r^2\, sin^2\,\varphi$$

وقتی عبارت دوم را اضافه نکرده بودیم، جواب بسیار ساده $r = b$ بود. حال چنانچه توجه کنید مجبور است r عددی بزرگتر از b به دست آید تا

$$\frac{GM}{b} - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}\omega_e^2\, r^2\, sin^2\,\varphi \geq 0$$

البته می‌دانید که چون مقدار سمت راست بسیار کوچک است، لذا مقدار r نیز فقط کمی بزرگتر از b خواهد بود. هم‌چنین این انحرافِ جزئی، بستگی به φ نیز دارد و هر چه به استوا نزدیک می‌شویم ($\varphi \to \frac{\pi}{2}$)، بیشتر خواهد شد. به این ترتیب سطح هم پتانسیل جدید شبیه یک بیضوی خواهد بود که بسیار نزدیک همان کرهٔ قبلی است که کمی در استوا تخت شده است.

تمرین- اندازه‌گیری شتاب آزاد روی زمین در قطب، عددی حدود 9.83 را داده است. با توجه به آن و با گرفتن $GM = 3.98 \times 10^{14}$ که می‌تواند از برخی دیده‌های نجومی به دست آید، ابتدا شعاعی برای زمین حدس بزنید(یعنی یک b بدهید). سپس شعاع هم‌پتانسیل با قطب را در استوا به دست آورید و سپس بگویید، شتاب جانب مرکز چند در صد موجب افزایش شعاع در استوا نسبت به قطب می‌گردد.

تمرین- اندازه‌گیری شتاب آزاد روی زمین در استوا نیز عددی حدود 9.78 داده است. حال با توجه به آن، تخمینی برای شعاع زمین در استوا بدهید(یعنی یک a بدهید).

تمرین- با بکارگیریِ دیورژانس در مختصات کروی بردار این میدان را به دست آورید.

پاسخ:

$$\gamma_{e_B} = \nabla U_e = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad \frac{1}{r sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega_e^2\, r^2\, sin^2\varphi\right) =$$

$$\left(r\omega_e^2\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi \quad 0 \quad -\frac{GM}{r^2} + r\omega_e^2\, sin^2\varphi\right)$$

چنانچه ملاحظه می‌کنید، این بار نه تنها بردار بدست آمده، از امتداد بردار مکان، انحرافی یافته بلکه حالا در امتداد افق و نصف النهار نیز اندک ناصفری یافته است. همین نشان می‌دهد که عمودِ به این میدان دیگر یک کره نبوده و کمی تخت‌تر از یک کره خواهد بود که این خود پیشنهاد دهندهٔ الگوی بیضوی بجای کروی است. بردار بدست آمده را بردار گرانش عمودی یا نرمال می‌نامند و سطح هم پتانسیلی که به این ترتیب محاسبه می‌شود را سطح هم پتانسیلِ مبنا می‌نامند.

الگویِ بیضوی

توجه کردید که تحلیل بالا القا می‌کند که گویا بهتر است زمین کروی فرض نشود تا سطحِ واقعیِ زمین به سطحِ هم‌پتانسیل نزدیک گردد. جالب‌تر این است که مشاهدات گوناگون و اندازه‌گیری‌های هندسی نیز تا حدود زیادی به بیضوی بودنِ زمین اشاره دارند. حال اگر با فرض بیضوی بودن زمین و نه کروی بودن آن، همان بحث بالا را دوباره تکرار کنیم، این بار تنها چیزی که رخ می‌دهد این است که الگوی میدان گرانش ناشی از یک جسم کروی که پیشتر بسادگی داده می‌شد به یک الگوی ریاضی نسبتاً پیچیده تبدیل می‌گردد که بصورت زیر قابل بیان است:

$$U(r,\varphi) = \left(\frac{GM}{r}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \; J_{2n}\; P_{2n}(cos\,\varphi)\right) + \frac{1}{2}\,\omega_e^2\, r^2\, sin^2\varphi\right)$$

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \; \frac{3\, e^{2n-2}}{(2n+1)(2n+3)} \left((1-n)e^2 + 5n\, J_2\right)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \rightarrow$$

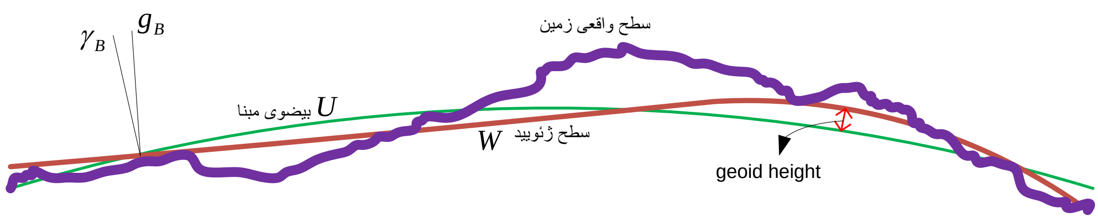
$$P_2(x)\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad , \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Pها، همان چند جمله ایهای لژاندر($Legendre$) می‌باشند و Jها نیز همگی از روی J_2، ساخته می‌شوند. e نیز خروج از مرکز بیضوی یعنی $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

چنانچه ملاحظه می‌کنید این مدل سه پارامتر دارد: a (شعاع بزرگ بیضوی)، GM ، J_2 تختیت دینامیکی $\frac{J_{po}-J_{eq}}{J_{po}}$ که عبارت است از نسبت اختلاف ممان اینرسی‌های دو محور بیضوی به یکی از آنها(ممان اینرسی قطبی و ممان اینرسی استوایی). عدد اخیر می‌تواند به نوعی به خروج از مرکز بیضی مربوط باشد بطوریکه از GM و J_2، می‌توان تختیت هندسی $\frac{a-b}{a} = f = \frac{1}{298.257222101}$ را بدست آورد.

می‌توان نشان داد که مستقل از اینکه a چقدر انتخاب شود، همواره سطح بیضوی مفروض که سطح زمین فرضی است، یک سطح هم پتانسیل خواهد بود و به این ترتیب بردار شتاب همواره در نقاط روی این بیضوی، عمود(نرمال) بر سطح آن خواهند بود.

واقعیت این است که همهٔ ارزش عبارات به دست آمدهٔ بالا به این است که بتواند با سطح هم پتانسیل موجود روی سطح زمین هماهنگ باشد. سطح هم پتانسیل واقعی روی سطح زمین که هماهنگ است با متوسط سطح تراز اقیانوس‌ها، یک سطح هم پتانسیل واقعی روی سیارهٔ زمین می‌سازد که به آن سطح تراز جغرافیایی ($geoid$) می‌گویند و شتاب واقعی، برداری است که به آن سطح عمود است (میدان واقعی و شتاب واقعی در شکل، بترتیب با W و g نشان داده شده‌اند).



شکل

حال به منظور اینکه الگوی بیضوی پیشنهادی بالا، هر چه ممکن است به واقعیت نزدیکتر باشد، لازم است پارامتر a چنان انتخاب گردد که بیضوی حاصل، نزدیکترین بیضوی به سطح تراز باشد. خوشبختانه این برازش با موفقیت بسیار خوبی انجام‌پذیر است، بگونه‌ای که فاصلهٔ عمودی سطح تراز واقعی از بیضوی حاصل که آنرا انحرافِ ژئویید $geoid\ undulation$ یا ارتفاع ژئویید $geoid\ height$ می‌گویند از حدود چند ده متر تجاوز نمی‌کند و حداکثر آن که درست در جنوب شبه قارهٔ هند اتفاق می‌افتد، $110-$ است. عددهای آخرین بیضوی مبنایی که به نام $geodetic\ Reference\ System$ 1980 یا به اختصار $GRS80$ بیان می‌شود، بصورت زیر است:

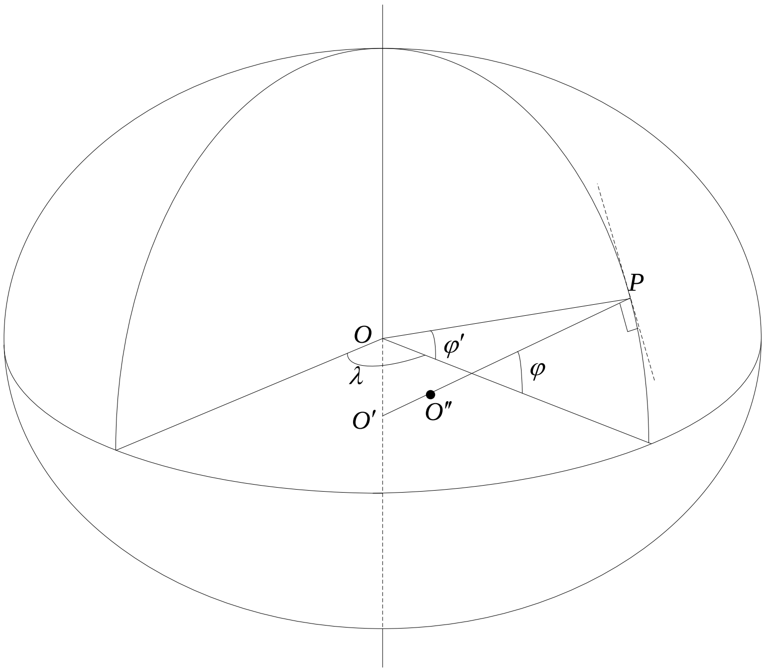
$$a = 6378137\ m\ ,\quad J_2 = 1.08263 \cdot 10^{-3}\ ,\quad GM = 3.98005 \cdot 10^{14}\ \frac{m^3}{s^2},$$
$$\omega_e = 7.292115 \cdot 10^{-5}\ \frac{rad}{s}$$

تمرین- کوشش کنید با یک الگوریتم آزمون و خطا و با توجه به اندازه‌گیری‌های داده شده در تمرین‌های پیشین، به یک اعداد مشابهی دست یابید. البته اعداد شما حتماً به دقت اعداد بالا نخواهد بود ولی شاید در دو رقم اول اعشار به تشابهی دست یابید.

تمرین- کوشش کنید برای محاسبهٔ شتاب در حالت کلی عبارتی بدهید و برای قطب و استوا آن را به دست آورید. اعداد خود را با اعدادی که از مراجع به دست می‌آورید مقایسه کنید تا از صحت محاسبات‌تان مطمئن گردید.

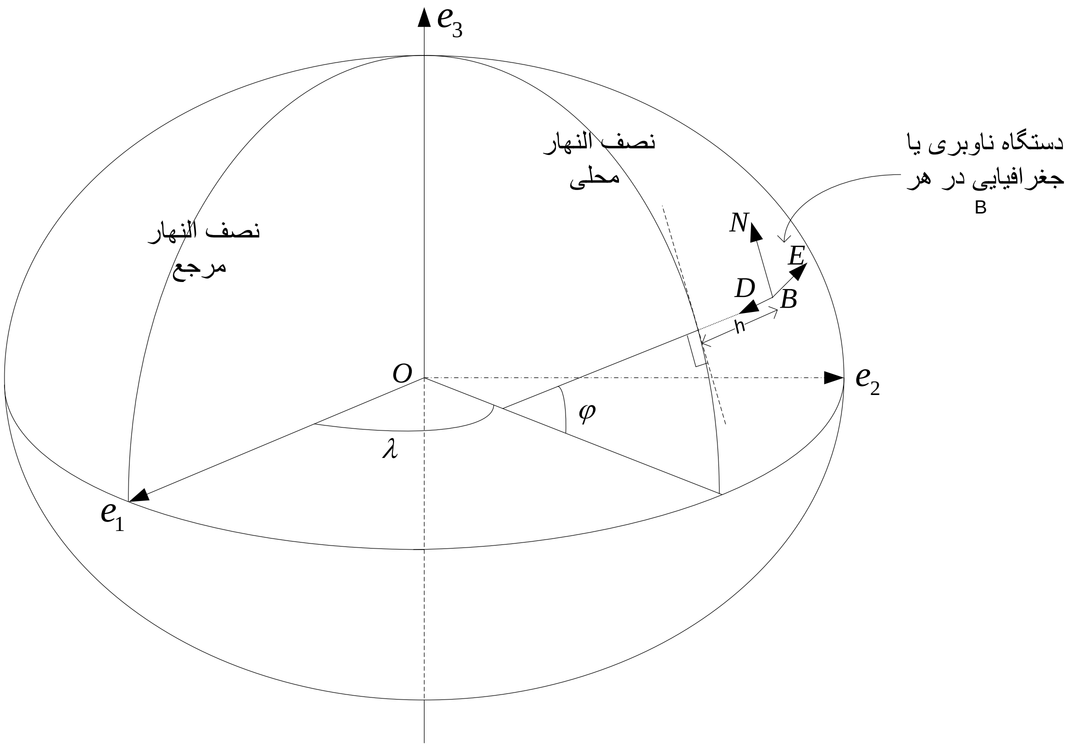
دستگاه ناوبری یا دستگاه جغرافیایی

بر اساس الگوی بیضوی، می‌توان دستگاه حامل برداری چسبیده به زمین تعریف نمود که بسیار شبیه دستگاه کروی است. مشخصات این دستگاه در شکل مربوطه نشان داده شده است. محور ۳ی آن عمود بر سطح بیضوی مبنا و به طرف درون زمین یا اصطلاحاً پایین $Dawn$ است. محور۲ نیز شرق را نشانه می‌رود(مشرق $East$ یعنی مکانی که از آن سمت خورشید اشراق می‌کند) . محور۱ از راستگردی به دست خواهد آمد که همواره جاییکه به شمال $North$ جغرافیایی معروف شده است را نشانه می‌رود و به این ترتیب دستگاه شمال-شرق-پایین($North - East - Dawn$ یا NED) شکل می‌گیرد.



$r = PO$ Geocentric Radius
$R_N = PO'$ Radius of Curvature in the Prime Vertical
$R_M = PO''$ Radius of Curvature in the Meridian
φ' Geocentric Latitude
φ Geodetic Latitude
λ Geodetic Longitude
P
O
O'
O''

شکل



e_3
نصف النهار محلی
نصف النهار مرجع
دستگاه ناوبری یا جغرافیایی در هر B
N
E
D
B
h
O
e_2
e_1

تمرین – ماتریس تبدیل از دستگاه ناوبری به زمین را بدست آورید. ${}_{e}^{n}C$ ؟

تمرین - $^{e}r_{EB} = [r_1 \ \ r_2 \ \ r_3]'$ را بر حسب $h\,,\varphi\,,\lambda$ بدست آورید. و سپس فکر کنید چگونه می‌توان معکوس این مسأله را حل نمود. سپس نشان دهید برابری‌های زیر درست هستند.

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\left(1 + \frac{e^2 N \sin\varphi}{r_3}\right)\right)$$

$$\lambda = \tan^{-1}\frac{r_2}{r_1}$$

$$h = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{\cos\varphi} - N$$

که در آنها:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \quad ,e = \frac{c}{a} \ \ ,e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 2f - f^2$$

در سال ۱۹۸۹ شخصی بنامِ *Borkowski* با φی آغازین زیر که معادلِ $h = 0$ هست، راه حلِ بازگشتی‌ای که با دو یا سه بار به نتیجهٔ بسیار خوبی می‌رسید را پیشنهاد داد.

$$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\left(\frac{1}{1 - e^2}\right)\right)$$

تمرین – سعی کنید سرعت و شتابِ $^{e}r_{EB}$ را از دید دستگاه چسبیده به زمین، بر حسب $h\,,\varphi\,,\lambda$ و مشتقاتشان بدست آورید.

شتابِ آزاد از دید زمین در نقاط مختلفِ دور و بر زمین (الگو و واقعیت)

شتاب آزاد از دید زمین بر اساس مدل در تمامی نقاط دارای مؤلفهٔ شرقی نخواهد بود که این بدلیل تقارنی است که در مدل مفروض است و این یعنی همواره:

$${}^{n}\nabla U = {}^{n}\gamma = (\gamma_N \ \ 0 \ \ \gamma_D)^T$$

مؤلفهٔ شمالی آن نیز در روی بیضوی مبنا دقیقاً صفر است ولی با افزایش ارتفاع دیگر صفر باقی نمی‌ماند که رابطهٔ تقریبی زیر تا ارتفاع $20km$ خطایی کمتر از $0.1\mu g$ دارد:

$\gamma_N = -8.08 \cdot 10^{-6}\, h_{km} \sin 2\varphi$

اما برای مؤلفهٔ پایینی روی بیضوی مبنا دقیقاً از عبارت زیر تبعیت می‌کند:

$$\gamma_D(\varphi) = \frac{a\gamma_a \cos^2\varphi + b\gamma_b \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

$$b = 6356752.3141\, m \quad , \gamma_a = 9.7803267715\, \frac{m}{s^2} \quad , \gamma_b = 9.8321863685\, \frac{m}{s^2}$$

و رابطهٔ تقریبی زیر که تا ارتفاع $20km$ خطایی کمتر از $0.15\mu g$ دارد، نیز برای ارتفاعات مختلف می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد:

$$\gamma_D(\varphi, h) = \gamma_D(\varphi, 0)\left(1 - \frac{2}{a}(1 + f + m - 2f\sin^2\varphi)h + \frac{3}{a^2}h^2\right) \ , \qquad m = \frac{\omega_e^2 a^2 b}{GM}$$

برای روابط دقیق‌تر حاصل از مدل بیضوی می‌توانید به ($NIMA$ 1997) مراجعه کنید.

شتاب واقعی را نیز می‌توان به صورت ${}^{n}\nabla W = {}^{n}g = (g_N \ \ g_E \ \ g_D)^T$ نمایش داد که در شکل مربوطه چگونگی آن در دستگاه ناوبری نمایش داده شده است.

g_E و g_N که مؤلفه های افقی هستند، عموماً در نزدیکی سطح زمین، در عین اینکه ناچیزند از مقادیری که مدل نرمال ارائه می‌دهد، انحراف قابل ملاحظه‌ای نشان می‌دهند ولی در ارتفاعات بالاتر قسمت عمدهٔ این مؤلفه‌ها در همان g_N خلاصه شده و انحراف آن از γ_N بسیار کمتر خواهد شد.

شتاب‌سنج‌ها

شتاب‌سنج ساده

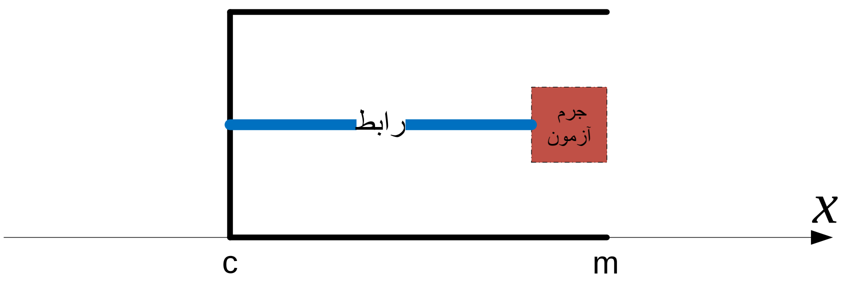
در شکل زیر در نظر بگیرید که به جرم آزمون، فقط از طریق رابط آن با بدنه و در راستای نشان داده شده، شتاب منتقل می‌گردد و نیروهای میدانی مانند جاذبه همانگونه که به بدنه وارد می‌گردند، به این جرم آزمون نیز وارد می‌گردند و فرض خواهیم نمود که فعلاً همهٔ اینگونه نیروها نیز صفرند. ضمناً دستگاه در نظر گرفته شده را نیز اینرسی گرفته‌ایم. حال توجه کنید که بیان نیوتن در راستای مورد نظر می‌گوید:

$$\ddot{x}_m = f_m + g_{m_x} \quad , \qquad \ddot{x}_c = f_c + g_{c_x}$$

و چون فرض داریم که gها با هم برابرند، نتیجه می‌دهد:

$$f_m = f_c$$

و این یعنی اگر بی‌قراری‌ای که بین جرم آزمون و بدنه که از طریق رابط وارد می‌گردد را بگونه‌ای اندازه‌گیری کنیم، آنگاه علامتی از شتابِ بدنه نسبت به اینرسی در این راستا به دست خواهد آمد.



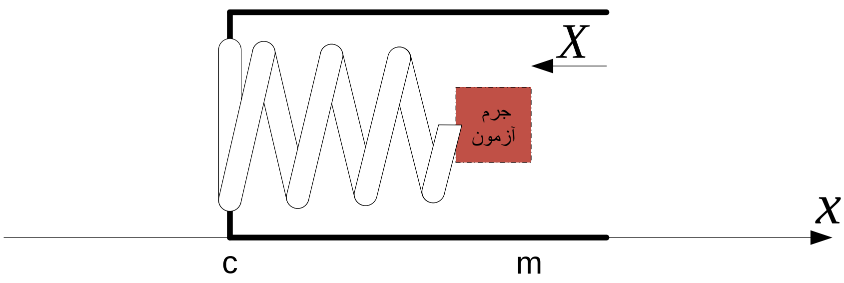
شکل

در ادامه فرض کنید که بخواهیم با قرار دادن یک فنر بعنوان رابط سعی کنیم که علامتی از این بی‌قراریِ انتقالی به دست آوریم. در این صورت داریم:

$$\ddot{x}_m = \ddot{x}_c - \ddot{X} \;\rightarrow\; f_m + g_{m_x} = f_c + g_{c_x} - \ddot{X} \;\rightarrow\; f_c = f_m(X, \dot{X}, \ldots) + \ddot{X}$$

در اینجا اینطور امیدواریم که شتابِ جرم آزمون($\ddot{x}_m$) مربوط باشد به X و یا مشتقات آن که باید با آزمون‌هایی که ترتیب می‌دهیم، این تابعیت را شناسایی نمود. ساده‌ترین فنرها آنهایی هستند که این تابعیت اولاً فقط از X است و نه مشتقات آن و ضمناً این تابعیت نیز کاملاً خطی است. در چنین صورتی می‌توان ضریب تناسب خطی را یافته و عبارت بالا را چنین ادامه داد.

$$f_c = k_m X + \ddot{X} \ \rightarrow \ X(s) = \frac{1}{s^2 + k_m} f_c(s)$$



شکل

و به این ترتیب با اندازه گیری X می‌توان تا حدودی به شتابِ بدنه رسید ولی همواره روی این اندازه‌گیری یک نوسان غیر میرا نیز سوار است. برای میرا نمودن این نوسان در کنار فنر، یک سرعت‌گیر(دمپر) نیز بین جرم آزمون و بدنه متصل می‌کنند. در بسیاری از موارد این می‌تواند یک سیلندر-پیستون هوایی باشد. که به این ترتیب عبارت بالا بصورت

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + C_m\, s + k_m} f_c(s)$$

در آمده و نوسانات ناشی از فنر میرا شده و برای شتابهای با پهنای باند باندازهٔ کافی کمتر از پهنای باند این نوسانات، خواهیم داشت:

$$X \cong d\, f_c \qquad ; \qquad d = \frac{1}{k_m}$$

که d ضریب مقیاس($scale\ factor$) حساسه خواهد بود که در هنگام پیمایش تنظیم و تعیین می‌گردد. طبیعی است که ضریب سختی جرم-فنر k_m تا حدود زیادی پهنای باند حساسه را نیز تعیین می‌کند. ضریب جرم-سرعت‌گیر C_m نیز طوری طراحی می‌گردد که پهنای باند مربوطه کاهش چندانی نیابد و در عین حال میرایی نوسانات نیز مناسب باشد.

حال بیایید در نظر بگیریم که اولاً دستگاه اندازه‌گیری شتاب‌سنج اینرسی نباشد و ثانیاً شتابِ نقطه‌ای که نسبت به بدنهٔ حساسه فاصلهٔ ثابتی دارد را، به دست آوریم. یعنی حالا بجای f_c ، می‌خواهیم f_b را به دست آوریم(به شکل توجه کنید).

برای به دست آوردن رابطهٔ بین آنچه می‌خواهیم اندازه‌گیری کنیم و آن علامتی که از بی‌قراری ایجاد شونده، وجود دارد، باید سعی گردد ابتدا بیان شتاب‌ها از دید مرجعی نوشته شوند که از دید آن بین شتاب آزادِ نقطهٔ m ، c و b فرقی نباشد تا به این ترتیب با خیال آسوده، مانند آنچه در بالا انجام گردید، بتوان دوباره اینها را از طرفین تساوی‌ها حذف نمود. یعنی باید مرجع را طوری بگیریم که از دید آن داشته باشیم:

$$g_{i_m} = g_{i_c} = g_{i_b}$$

پس در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} D_i^2\, r_{Im} = f_m + g_{i_m} \\ D_i^2\, r_{IB} = f_B + g_{i_B} \end{cases} \rightarrow \quad D_i^2\, r_{mB} = f_B - f_m \rightarrow \; f_B = f_m\big(X, \dot{X}, \dots\big) + D_i^2\, r_{mB}$$

حال باید سعی کنیم دوباره عبارتِ $D_i^2\, r_{mB}$ را بر حسب X بیان کنیم تا رابطهٔ مورد نظرمان کامل گردد. برای این توجه می‌کنیم که r_{mc} در دستگاه بدنهٔ حساسه، بسیار ساده بیان می‌شود و داریم:

$${}^b r_{mc} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \; D\, {}^b r_{mc} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad D^2\, {}^b r_{mc} = \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

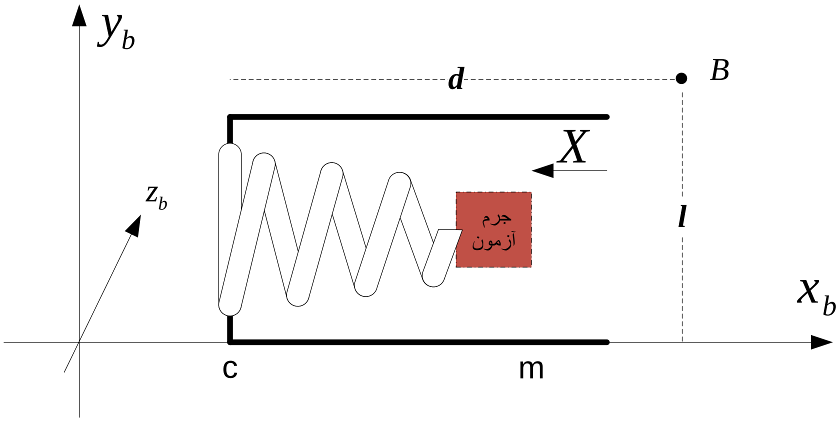
و به این ترتیب به نظر می‌رسد که شاید بهتر باشد تساوی بالا در همین دستگاه بدنهٔ حساسه بیان گردد. لذا باید نوشت:

$${}^b f_b = {}^b f_m\big(X, \dot{X}, \dots\big) + {}^b\big(D_i^2\, r_{mB}\big)$$

به این ترتیب در ادامه فقط لازم است ${}^b\big(D_i^2\, r_{mB}\big)$ را به دست آوریم تا ببینیم نسبت به هنگامیکه اندازه گیری در دستگاه اینرسی انجام می‌شد چه عباراتی اضافه می‌گردد. این عبارت وقتی که b همان i باشد چیزی نخواهد بود جز $\ddot{X}$. اما در حالت کلی داستان کمی فرق خواهد نمود که باید به ظرافت آن را به دست آورد. در ادامه چون به غیر از دستگاه که از i به b تغییر داده‌ایم، نقطهٔ مطلوبِ اندازه‌گیری را نیز از c به B تغییر داده‌ایم، r_{Bc} نیز در عبارات وارد خواهد شد. البته توجه داریم که r_{Bc} از دید مرجع b در حال تغییر نمی‌باشد.

تمرین- نشان دهید :

$${}^b\big(D_i^2\, r_{mB}\big)_x = \ddot{X} + X(q^2 + r^2) + d(q^2 + r^2) - l(pr) - l\dot{q} \quad , \qquad {}^b\omega_{ib}^T = (p \;\; q \;\; r)$$



شکل

توجه کنید که f_m در اینجا همان عبارتی است که در تحلیل بالاتر و با فرض فنر خطی، بصورت $k_m X$ جاگذاری شد.

عبارتِ $X(q^2+r^2)$ نامطلوب است و اگر جابجایی جرم آزمون(X) قابل ملاحظه باشد، می‌تواند در مانورهای شدید(r و qیِ بزرگ) خطای غیر قابل قبولی را در اندازه‌گیریِ شتابِ f_b ایجاد کند.

و اماعبارتِ $d(q^2+r^2)$ می‌تواند مشکل جدی ایجاد کند و لذا همواره توصیه می‌گردد که شتاب سنج، در همان راستای اندازه‌گیری خود حتماً روی مبدأ اندازه‌گیریِ شتاب باشد یعنی $d=0$. اما از دیدگاهی دیگر همین اثر می‌تواند الهام‌بخش روشی برای اندازه‌گیری سرعت‌های دورانی باشد. برای این به پایان‌نامۀ جناب آقای قاسم‌زاده مراجعه گردد.

و اما اثر l که فاصلۀ مبدأ اندازه‌گیری با یکی از محورهای غیرحساس شتاب سنج است: توجه می‌کنیم که این فاصله نیز به خودی خود ایجاد اشکال می‌کند و بهتر است این فاصله نیز صفر گردد اما شاید در شرایطی بتواند به پیمایش مناسب‌تر کمک کند که جلوتر اشاره خواهد شد.

شتاب‌سنج‌های با حلقهٔ تعادلی

دیدیم که غیر اینرسی گرفتن دستگاه اندازه‌گیری، فقط اثر شتاب جانب مرکز $X(r^2 + q^2)$ را نسبت به حالت قبلی ایجاد می‌کند که راه برطرف نمودن آن نیز هر چه کوچکتر نمودن X است که این هم از طرف دیگر اندازه‌گیری را مشکل می‌کند.

برای این منظور بجای آنکه سعی شود از رویِ جابجایی جرم آزمون(X)، اندازه‌گیری صورت پذیرد، سعی می‌شود تا شتابِ لازم برای برگرداندن جرم بجای صفرش به آن اعمال شده و در نتیجه X بسیار نزدیک صفر نگاه داشته می‌شود. به این ترتیب نه تنها مشکل بالا حل می‌گردد بلکه اندازه‌گیری شتاب نیز بسیار دقیق‌تر صورت می‌پذیرد چرا که این بار شتابِ مربوطه توسط خودمان تولید می‌گردد و دقیقاً می‌توان از کم وکیف آن مطلع بود. حلقهٔ کنترلی‌ای که در اینگونه اندازه‌گیرها بوجود می‌آید را حلقهٔ بازیابی تعادل یا چکیده‌تر، حلقهٔ تعادلی می‌نامند.

برای ساخت چنین ترکیبی عموماً از پاندولی نمودن جرم آزمون سود می‌جویند و بجایِ نیرو، گویا، گشتاور تولید می‌کنند. هرچند برخی مانندِ [ ] به محاسباتِ پاندولی پرداخته‌اند ولی برای فهم موضوع نیازی به آن نیست بلکه کافی است در نظر بگیرید که در همان سازهٔ جرم و فنر و دمپری که در بالا آمد دو چیزِ دیگر اضافه کنیم. یکی یک حساسه که انحرافِ جرمِ آزمون را از تعادلِ خود بدهد، یعنی X را بدهدو دیگری یک نیروساز یا در نوعِ پاندولی یک گشتاورساز که بتواند جرم آزمون یا پاندول را به حالت تعادل خود بازگرداند.

اکنون سامانه‌ای درست می‌کنیم که به محض انحرافِ X از تعادل، فرمانِ مناسب به نیروساز صادر کند که نمایش بلوکی چنین سامانه‌ای به صورت زیر خواهد بود.

در این‌جا کنترل کنندهٔ $H(s)$ باید به طرز مناسبی طراحی گردد تا رفتار مناسبی چه از نظر سرعتِ پاسخ یا پهنای باند حساسه و چه از نظر پایداری بدست آید. توجه کنید که پس از برقراریِ حلقهٔ بالا و طراحی مناسب برای هرچه صفر نگاه داشتنِ $e = {}^{c}f_B - f_{rebalance}$ ، آنگاه می‌توان با خواندنِ f_{reb}. متقاعد بود که با تقریبِ بسیار خوبی به ${}^{c}f_B$ دست یافته‌ایم.

به این ترتیب به محض صفر شدن خروجی نشان داده شده یا همان نیرو(گشتاور) تولید شده، معادل شتاب مورد اندازه گیری خواهد بود. معمولاً این شتاب‌سنج‌ها تا چند ده برابر g را اندازه می‌گیرند و دارای پهنای باند حدود چند صد Hz میباشند و دقتی حدود $100\mu g - 1$ دارند. برای تعیین موقعیت کامل از اینگونه شتاب‌سنج‌ها استفاده می‌گردد ولی برای تعیین موقعیت ناقص(مثلاً تعیین شتاب به تنهایی) از همان شتاب سنج‌های سادهٔ جرم وفنر استفاده می‌گردد.

به همین روش پاندولی و با استفاده از فن‌آوری نیمه‌هادی‌ها و میکروماشین نیز توانسته‌اند شتاب‌سنج‌های بسیار ظریفی بسازند که البته به دقت هم خانواده‌های بزرگ خود نمی‌باشند اما اولاً بسیار ارزان قیمت بوده و ثانیاً تعداد بسیار و با مشخصات تقریباً یکسان از آنها را می‌توان در یک مدار بسیار کوچک جا داد.

شتاب‌سنجهای ژیروسکوپی که به هنگام توضیح ژیروسکوپهای مکانیکی، اشارهٔ کوتاهی خواهیم داشت از این نوع نیز دقیق‌ترند و شاید بتوان گفت که بهترین شتاب‌سنج‌ها می‌باشند. در این نوع هم از خاصیت پاندولی و هم از خاصیت ژیروسکوپی استفاده شده و می‌توان مستقیماً انتگرال شتاب یعنی سرعت را بدست داد.

اساسِ ژیروسکوپ‌هایِ مکانیکی جسمِ دواری است که اندازهٔ حرکت دورانیِ بزرگی دارد. چون معمولاً جسمی که ما می‌سازیم کوچک است لازم است سرعت دورانیِ بزرگی، حدودِ ده‌ها هزار دور در دقیقه داشته باشد. البته این دربارهٔ جسمی به بزرگیِ زمین نیاز نیست و خداوند زمین را ژیروسکوپ قرار داده است چراکه با همان سرعت دورانیِ اندک ولی جرمِ بسیار بزرگش، دارای اندازه‌حرکت دورانیِ بسیار بزرگ و کارایی است و همهٔ ویژگی‌های یک ژیروسکوپ را داراست.

مثلاً اینکه اگر بخواهد محور دوران‌اش انحراف اندکی یابد، لازم است گشتاور بسیار بسیار بزرگی هزینه شود. و در صورت چنین هزینه‌ای تنها شاهدِ حرکت رقص محوریِ بسیار بسیار کوچکی خواهیم بود. البته اگر بخواهد سخن دقیق باشد باید زمین و ماه‌اش را با هم در یک جسم گرفته و رفتار این جسمِ مرکب را بسنجیم. این جسم مرکب دارای مجموعِ دو اندازه‌حرکت دورانیِ زمین به دورِ محور قطبین که همان شبانه روز را می‌سازد و دیگری گردشِ ماه به دور زمین است که یک ماه به طول می‌انجامد ولی به دلیلِ فاصلهٔ بسیار زیاد از مرکز دوران، اندازهٔ حرکت دورانیِ بسیار بسیار بزرگی خواهد بود.

تمرین – دو اندازه‌حرکت نامبرده در بالا را محاسبه و مقایسه کنید.

در آغاز توجه کنید که اندازه‌حرکت دورانی مانند هر بردارِ حرکتیِ دیگری می‌تواند در دستگاه‌های گوناگون بیان شود که برای تبدیل از یک دستگاه به دیگری روابط زیر برقرارند. مثلاً بینِ دستگاه بدنه b و قابی که جسمِ دوار را نگه داشته است و یا دروان‌اش نسبت به آن معلوم است g :

$$ {}^{r}H = {}^{r}J\, {}^{r}\omega_{ir} \ , \quad {}^{b}H = {}^{b}J\, {}^{b}\omega_{ir} \ , \quad {}^{g}H = {}^{g}J\, {}^{g}\omega_{ir} $$

$$ {}^{b}H = {}^{b}_{g}C\, {}^{g}H = {}^{b}_{g}C\ {}^{g}J\ {}^{g}_{b}C \quad {}^{b}\omega_{ir} \ \rightarrow \quad {}^{b}J = {}^{b}_{g}C\ {}^{g}J\ {}^{g}_{b}C $$

ماتریس ممان برای هر جسمی، نسبت به یک نقطه و حولِ محورهایِ یک دستگاه تعریف می‌گردد. در عبارت‌های بالا فرض بر این بوده که همگی نسبت به مرکز جرم جسم هستند. در بالا دیده می‌شود که این ماتریس چگونه از دید یک دستگاه به دیگری قابل تبدیل است و کافی است ماتریس تبدیل دو دستگاه را بدانید.

برایِ اجسامِ متقارن، از دید همهٔ دستگاه‌هایی که در محور تقارن مشترک باشند، ماتریس ممان یکسان خواهد بود و از همین رو ما به چنین دستگاه‌هایی می‌گوییم: آنها هم‌ممان اینرسی‌اند برای آن جسم. مثلاً برای یک کرهٔ همگن، همهٔ دستگاه‌ها، هم‌ممان اینرسی‌اند. یعنی هر دستگاه دلخواهی بگیرید و ماتریس

ممان را از دیدِ آن برای کره محاسبه کنید به یک پاسخ می‌رسید. اما همین برای یک استوانه و یا مخروطِ هم‌گن چنین نیست بلکه داستان کمی فرق دارد.

تمرین- دستگاه‌های هم‌ممان را برای استوانهٔ همگن بیابید. همین را برای مخروط همگن بیابید.

قابِ نگهدارِ روتور و روتور در محور دوران مشترک‌اند و از همین رو دستگاه روتور و دستگاه قاب را می‌توان هم‌ممان گرفت و این یعنی:

$$ {}^{r}J_r = {}^{g}J_r $$

اکنون معادلات حاکم در یک ژیروسکوپ یا همان روتور را می‌نویسیم و چون نمی‌دانیم سرعت دورانیِ مربوطه نسبت به مطلق چیست ولی آن را نسبت به یک دستگاهِ دیگر که آن را قاب می‌نامیم، می‌دانیم، می‌نویسیم:

$$ T_r = D_i\, H_r \;\rightarrow\; {}^{g}T_r = {}^{g}(D_i\, H_r) = {}^{g}\big(D_g\, H_r + \omega_{ig} \times H_r\big) = D\, {}^{g}H_r + {}^{g}\omega_{ig} \times {}^{g}H_r $$

و اما :

$$ {}^{g}H_r = {}^{g}J_r\, {}^{g}\omega_{ir} = {}^{g}J_r\big({}^{g}\omega_{ig} + {}^{g}\omega_{gr}\big) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} p_g \\ q_g \\ r_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} J_1\, p_g \\ J_2\, q_g \\ J_r(r_g + \omega_s) \end{bmatrix} $$

در ادامه Jهای روی قطر را برابر می‌گیریم و بدانید که این فقط کار ادامه را ساده‌تر می‌کند و داستان تغییر اساسی نمی‌کند و در تمرینی موضوع بررسی می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = J_r \begin{bmatrix} \dot{p_g} \\ \dot{q_g} \\ (\dot{r_g} + \dot{\omega}_s) \end{bmatrix} + J_r \left(\begin{bmatrix} p_g \\ q_g \\ r_g \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} J_r\dot{p_g} + H_s q_g \\ J_r\dot{q_g} - H_s p_g \\ J_r(\dot{r_g} + \dot{\omega}_s) \end{bmatrix} \quad ; \quad H_s = J_r\omega_s $$

که با فرض ثابت بودنِ ω_s برابری‌های دو ردیفِ اول مستقل از سوی شده و یک سامانهٔ دو ورودی- دو خروجیِ خطی دیده می‌شود که با تبدیل لاپلاس بصورت زیر قابل نوشتن است:

$$ q_g(s) = \left(\frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_s^2}} \right) \left({}^{1}\!/_{H_s} \right) \left(\left(\frac{s}{\omega_s} \right) T_2(s) + T_1(s) \right) $$

$$p_g(s) = \left(\frac{1}{1+\frac{s^2}{\omega_s^2}}\right)\left({}^{1}\!/_{H_s}\right)\left(\left(\frac{s}{\omega_s}\right)T_1(s) - T_2(s)\right)$$

این معادلات گویایِ سخن‌های بسیاری هستند و همهٔ ویژگی‌های یک ژایرو را در بر دارند.

سخن نخست اینکه هر ورودی‌ای به این سامانه یک نوسان کاملِ ظاهراً بی‌پایان را تحریک می‌کند با فرکانسی برابر با فرکانس دورانِ جسمِ دوار ω_s . البته چون اصطکاک بالاخره هرچند کم هست، این نوسان به پایان رسیده و اصطلاحاً می‌میرد. این نوسانِ فرکانس بالا را رقص محوری($nutation$) نامیده‌اند.

الگوریتم کلی تعیین موقعیت به روش مطلق

در اینجا با یک سری فرضهای عمومی سعی خواهیم نمود، الگوریتم کلی محاسبه مکان را به دست آورده و الزامات مربوطه را در این الگوریتم برای محاسبهٔ وضعیت نیز به دست دهیم. برای این منظور فرضیات کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- شتاب سنج‌ها در دستگاه دلخواهِ p اندازه‌گیری می‌کنند،

۲- سرعت را نسبت به مرکز زمین و از دید دستگاه دلخواهِ t محاسبه می‌کنیم،

۳- بیان همین سرعت در دستگاه دلخواه s صورت می‌پذیرد.

چنانچه بخواهیم مکان و سرعت را نیز نسبت به نقطهٔ دلخواه A به دست آوریم، به هر حال این نقطه باید نسبت به مرکز زمین، در جای معینی باشد و همینطور سرعتش نسبت به مرکز زمین باید معین باشد. پس میتوان همواره نسبت به E مرکز زمین تمام الگوریتم را اجرا نموده و نهایتاً ، مکان بدست آمده را با بردار مکان بین این دو نقطه جمع نمود تا مکان نسبت به A به دست آید. عیناً همین کار را با سرعت نیز می‌توان انجام داد. حال برای یافتن الگوریتم کلی از همان بیانِ دوم نیوتن آغاز می‌کنیم.

$$D_i^2\, r_{EB} = f_B + g_{i_B} \;\rightarrow$$

$$D_t\, v_{t_B} + 2\,\omega_{it} \times v_{t_B} + (D_{t,i}\omega_{it}) \times r_{EB} + \omega_{it} \times (\omega_{it} \times r_{EB}) = f_B + g_{i_B} \;\rightarrow$$

$$D_t\, v_{t_B} = -2\,\omega_{it} \times v_{t_B} - (D_{t,i}\omega_{it}) \times r_{EB} - \omega_{it} \times (\omega_{it} \times r_{EB}) + f_B + g_{i_B}$$

در ادامه ابتدا توجه کنید که بطور کلی از قضیهٔ کوریولیس به دست می‌آید:

$$^{s}(D_t\, x) = {}^{s}\Omega_{ts}\;{}^{s}x + D\;{}^{s}x \quad\rightarrow\quad D\;{}^{s}x = {}^{s}(D_t\, x) - {}^{s}\Omega_{ts}\;{}^{s}x$$

و با استفاده از آن و همین‌طور معادلهٔ کلی بالا، می‌توان معادلات حالت زیر را نوشت:

$$D\;{}^{s}r_{EB} = -\,{}^{s}\Omega_{ts}\;{}^{s}r_{EB} + {}^{s}(D_t\, r_{EB}) = -\,{}^{s}\Omega_{ts}\;{}^{s}r_{EB} + {}^{s}v_{t_B}$$

$$D\;{}^{s}v_{t_B} = -\,{}^{s}\Omega_{ts}\;{}^{s}v_{t_B} - 2\;{}^{s}\Omega_{it}\;{}^{s}v_{t_B} - {}^{s}(D_t\,\omega_{it}) \times {}^{s}r_{EB} - {}^{s}\Omega_{it}{}^{2}\;{}^{s}r_{EB} + {}^{s}_{p}C\;{}^{p}f_B + {}^{s}g_{i_B}$$

از همین معادلات حالت کلی نکات زیر قابل استنتاج است:

۱- لازم است در هر لحظه سرعت دورانی دستگاهی که از دید آن، سرعت محاسبه می‌گردد، نسبت به اینرسی در دسترس باشد، یعنی: ω_{it} و البته کافی نیست بلکه شتاب دورانی نیز باید در دسترس باشد ! به همین دلیل به نظر می‌رسد که مناسب‌تر است، دستگاه t نسبت به دستگاه اینرسی در نظر گرفته در

شده، سرعت دورانی ثابتی داشته باشد تا درگیر شتاب‌دورانی نسبی نشویم. در ضمن برای بیان این سرعت دورانی در دستگاه s شرط۲ که در ادامه می‌آید نیز لازم خواهد شد.

۲- لازم است در هر لحظه سرعت دورانی دستگاهی که سرعت در آن بیان خواهد شد نسبت به دستگاهی که همین سرعت از دید آن محاسبه می‌گردد، در دسترس باشد، یعنی: ω_{st} !

۳- لازم است در هر لحظه، وضعیت نسبی دستگاه شتاب‌سنج‌ها به دستگاهی که "بیان" در آن دستگاه صورت می‌گیرد، در دسترس باشد. می‌دانید که برای این منظور، در واقع لازم است، سرعت دوران نسبی این دو دستگاه در دسترس باشد، یعنی: ω_{sp} و سپس با استفاده از آن، باید معادلهٔ حالت مربوط به ماتریس دوران حل شده، تا بتواند در بالا مورد استفاده قرار گیرد. ژیروسکوپها که عموماً بر اساس خواص اینرسی کار می‌کنند، سرعت دورانی دستگاه p را نسبت به اینرسی به دست می‌دهند ω_{ip} و لذا دوباره لازم خواهد بود که یا دو دستگاه s و p نسبت به هم ثابت باشند($\omega_{sp} = 0$)، مثلاً یکی باشند، یا اینکه بهرحال ω_{is} نیز در دسترس باشد.

۴- نهایتاً لازم است، بردار g که در دستگاه e زمین معلوم است، در دستگاه s نیز قابل بیان باشد. به این منظور اگر مستقیماً ممکن نیست پس لازم می‌آید که مرتباً قابل تبدیل از دستگاه e به دستگاه s باشد.

اکنون با استفاده از نتایج هر یک از موارد بالا می‌توان معادلات حالت کلی داده شده در بالاتر را به صورت زیر درآورده و یک گام دیگر حل نمود:

$$\dot{x} = A\,x + u : \;\; x = \begin{bmatrix} {}^{s}r_{EB} \\ {}^{s}v_{t_B} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} {}^{s}\Omega_{ts} & I_{(3\times3)} \\ -({}^{s}\Omega_{it})^2 & ({}^{s}\Omega_{ts} - 2\,{}^{s}\Omega_{it}) \end{bmatrix} \;\; u = \begin{bmatrix} 0_{3\times1} \\ {}^{s}_{p}C\;{}^{p}f_B + {}^{s}g_{i_B} \end{bmatrix}$$

توجه کنید که فقط معادلات حالت اخیر نیستند که باید حل گردند، بلکه تمامی معادلات حالت لازمی که در موارد بالاتر آمد، بهر حال باید حل گردند. البته بسته به اینکه هر یک از دستگاههای t ، s و p نسبت به یکدیگر یا نسبت به اینرسی، چگونه انتخاب گردند، الگوریتم‌های ارائه شده در بالا، می‌توانند خلاصه و یا حتی حذف گردند.