بسمه تعالی

حل سری ۱ و ۲

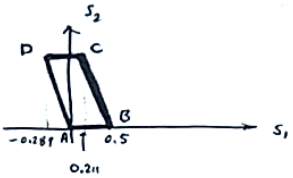
۳

حل ۱)

$$ {}^{t}_{s}C = \begin{bmatrix} {}^{t}\underline{s}_1 & {}^{t}\underline{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{s}_{t}C = {}^{t}_{s}C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{s}A = {}^{s}_{t}C \; {}^{t}A \Rightarrow {}^{s}A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{s}B = {}^{s}_{t}C \; {}^{t}B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \dots > {}^{s}C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} $$

$$, \quad {}^{s}D = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow $$



۴

حل ۲) از تعریف: برای هر دو ماتریس $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$، شرط لازم و کافی برای برابری آنها این است که: به ازای هر $\underline{x} \in R^n$ دلخواه داشته باشیم $A\underline{x} = B\underline{x}$. استفاده خواهیم کرد:

حال توجه کنید که هر $\underline{x} \in R^3$ می‌تواند بیان یک بردار در مختصات t باشد یعنی $\underline{x} = {}^{t}\underline{v}$؛ حال توجه کنید که

سمت چپ رابطه خواهد شد:

$$ [{}^{t}\underline{r}\times]\, {}^{t}\underline{v} = {}^{t}(\underline{r}\times\underline{v}) $$

و اما سمت راست:

$$ {}^{t}_{s}C\, [{}^{s}\underline{r}\times]\, {}^{s}_{t}C\, {}^{t}\underline{v} = {}^{t}_{s}C\, [{}^{s}\underline{r}\times]\, {}^{s}\underline{v} $$

$$ = {}^{t}_{s}C\, {}^{s}(\underline{r}\times\underline{v}) = {}^{t}(\underline{r}\times\underline{v}) $$

و حکم ثابت است.

۵

حل ۳) می‌دانیم شرط متعامد یکه بودن ماتریس، متعامد بودن دو به دوی سطرها و ستونها و یکه بودن همهٔ آنها است.

و خلاصهٔ همهٔ اینها این خواهد بود که ترانهادهٔ ماتریس با معکوس اش برابر باشد یعنی لازم و کافی است $C^T = C^{-1}$

برقرار باشد لذا کافی است ثابت کنیم: برای $C = C_1C_2$ داریم $C^T = C^{-1}$؛

برای این منظور:

$$ C^{-1} = C_2^{-1}C_1^{-1} \underset{\uparrow}{=} C_2^T C_1^T = (C_1C_2)^T = C^T $$

چون هر دو متعامد یکه‌اند

و حکم ثابت است.

۷

حل ۵) با جایگذاری تساوی داده شده در عبارتی که در کلاس بدست آمد خواهیم داشت:

$$ \underline{Q}' = \underline{Q} - (\underline{K}\times\underline{Q})\times\underline{K} + S_\alpha(\underline{K}\times\underline{Q}) + ((\underline{K}\times\underline{Q})\times\underline{K})C_\alpha $$

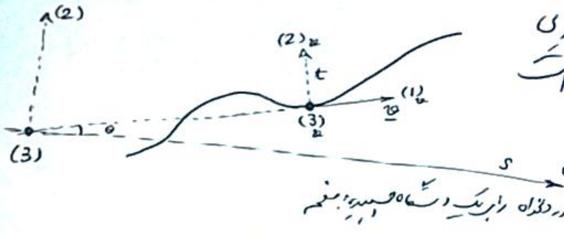
$$ \underline{Q}' = \underline{Q} + (\underline{K}\times(\underline{K}\times\underline{Q}))(1-C_\alpha) + S_\alpha(\underline{K}\times\underline{Q}) $$

$$ \underline{Q}' = [I + (1-C_\alpha)[\underline{K}\times]^2 + S_\alpha[\underline{K}\times]]\,\underline{Q} \Rightarrow $$ حکم خواسته شده

توضیح: در اینجا فرض بر این است که با دوران حول $\underline{K}$ به اندازهٔ α از دستگاه t به دستگاه s می‌رسیم.

۱) در تمرین ۵ سری ۴ و حل آن توضیح داده شد که همواره سرعت یک سیال می‌تواند به دو مؤلفهٔ سرعت مماسی آن و سرعت قائم آن تجزیه گردد، بطوریکه سرعت مماسی معرف سرعت افزایش طول آن بردار است و سرعت جانبی (قائم) آن معرف میزان خم شدن آن می‌باشد.

قسمت الف، فقط مثالی بسیار ساده از همان حقیقت فوق است. برای این منظور که موضوع بهتر حس گردد شکل زیر را در نظر بگیرید:



دستگاه معرفی شده در شکل را که یک دستگاه مرجع است و دیگری ⑤ گونه‌ای است که محور (1) آن همواره در امتداد و جهت سرعت متحرک است و (3)ی آن رو به بیرون صفحهٔ کاغذ است و (3)ی آن با (3)ی s موازی است.

توجه کنید که همواره در این حرکت صفحه‌ای ساده داریم: $\omega_{st} = \dot{\theta}$ و یا داریم

$$ {}^{t}\underline{\omega}_{st} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{st} \end{bmatrix} $$

از طرفی نیز داریم که

$$ {}^{t}\underline{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ P_s \underline{v} = P_t \underline{v} + \underline{\omega}_{st} \times \underline{v} $$

مشتق از دید دستگاه s که همان شتاب است که دارای مؤلفه نظرات است. (البته به صورت برداری)

مشتق از دید دستگاه t

$$ {}^{t}(P_s \underline{v}) = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{st} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v\omega_{st} \\ 0 \end{bmatrix} $$

شتاب مماسی ←
شتاب جانبی ←

آن بردار.

البته یک تعریف مهم را همواره بخاطر بسپارید: سرعت دوران یک بردار $\triangleq$ سرعت قائم بردار تقسیم بر اندازهٔ که خود از این تعریف هم می‌توانستیم دریابیم که چون شتاب جانبی همان سرعت قائم بردار سرعت است پس همواره برابر است با اندازهٔ سرعت $\times$ سرعت دوران آن بردار یعنی

$$ \omega_{st} = \frac{\text{شتاب جانبی}}{v} \Leftarrow \text{شتاب جانبی} = v\omega_{st} $$

ب) چنانکه در کلاس بدست آوردیم داریم:

$$ {}^{c}\underline{v} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{c}\underline{a} = \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} $$

آن مقداری از شتاب $\underline{a}$ که در راستای $\underline{v}$ است، همان شتاب مماسی است و مابقی شتاب جانبی است پس می‌توان نوشت:

$$ \overset{\text{شتاب مماسی}}{\underline{a}_t} = \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{a}}{v^2}\right)\underline{v} \quad , \quad \overset{\text{شتاب جانبی}}{\underline{a}_n} = \underline{a} - \underline{a}_t $$

$$ \Rightarrow {}^{c}\underline{a}_t = \frac{\left[\dot{\rho}(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) + \rho\dot{\theta}(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) + \dot{z}\ddot{z}\right]}{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix} $$

$$, \quad {}^{c}\underline{a}_n = \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} - {}^{c}\underline{a}_t $$

(۶)

حل ۶) از یکی بودن دترمینان استفاده نمیکنیم و ابتدا دو سطر اول را بدست می‌آوریم و پس سطر سوم را از ضرب خارجی دو سطر اول و دوم بدست خواهیم آورد :

$$c_{13}^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow c_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{یا} \quad c_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} c_{21} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c_{23} = 0 \longrightarrow c_{21} = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\, c_{23}\right) \\ c_{21}^2 + c_{23}^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$c_{23}^2 + \frac{1}{4} + 2c_{23}^2 + \sqrt{2}\, c_{23} = \frac{3}{4} \longrightarrow 3c_{23}^2 + \sqrt{2}\, c_{23} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\longrightarrow c_{23} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\times\frac{1}{2}\times 3}}{6} = \frac{-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{6} \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow c_{21} = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \longrightarrow c_{21} = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

از ضرب خارجی ← (سطر سوم هر دو ماتریس)

و با $c_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ نیز مطابق روش بالا دو ماتریس دیگر که جواب مسئله است بدست خواهند آمد :

$$(3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

حال اگر محورهای یک دستگاه را بدون "پریم" و دیگری را با "پریم" نشان دهیم زوایای بین آنها را چنین داریم :

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} (1,1') = 60^\circ & (1,2') = 60^\circ & (1,3') = 45^\circ \\ (2,1') = 60^\circ & (2,2') = 60^\circ & (2,3') = 135^\circ \\ (3,1') = 135^\circ & (3,2') = 45^\circ & (3,3') = 90^\circ \end{bmatrix}$$

(۹)

حل ۶) از راه‌های متعددی می‌توان حل کرد ولی راهی را که آموزنده‌تر است بیان می‌کنم. روش اول: حقیقت مهمی وجود دارد که از آن استفاده می‌کنیم و آن این است که هر رابطه‌ی تقارنی بین بردارها، با تعویض دستگاه‌های محورها (یعنی ضرب داخلی) تغییر نخواهد کرد. پس اگر رابطه‌ی متقارنی را در یک دستگاه اثبات کنیم حتماً در تمام دستگاه‌ها نیز صادق است. حال کافی است دستگاه خود را دارای محورهای $\underline{a}$ و $\underline{b}$ و $\underline{a}\times\underline{b}$ قرار دهیم. لذا سمت چپ رابطه‌ی داده شده چیزی نخواهد بود جز مولفه‌ی سوم حاصلضرب خارجی $\underline{c}\times\underline{d}$ و این را هم در کلاس نشان دادیم که عبارت است از:

$$X_c Y_d - Y_c X_d = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{b}\cdot\underline{c})(\underline{a}\cdot\underline{d})$$

و اما روش دیگر: می‌توانیم از روابط بین ضرب خارجی و داخلی که قبلاً در جبر خطی و جبر بردارها دیده‌اید استفاده کنیم: دو رابطه‌ی قانون ضرب سه‌تایی عددی $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = (\underline{b}\times\underline{c})\cdot\underline{a} = (\underline{c}\times\underline{a})\cdot\underline{b}$ و ضرب سه‌تایی برداری $(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\cdot\underline{c})\underline{a}$ که با استفاده از آنها حال داریم:

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = [\underline{b}\times(\underline{c}\times\underline{d})]\cdot\underline{a} = [(\underline{d}\cdot\underline{b})\underline{c} - (\underline{c}\cdot\underline{b})\underline{d}]\cdot\underline{a}$$
$$= (\underline{d}\cdot\underline{b})(\underline{a}\cdot\underline{c}) - (\underline{c}\cdot\underline{b})(\underline{d}\cdot\underline{a})$$

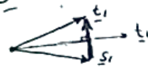
توجه: همین دو رابطه نیز به روشی که بالاتر گفتیم قابل اثبات‌اند. سعی کنید از این راه آنها را نیز اثبات کنید.

(۱۰)

۷) روابطی که خواسته شده، با جایگذاری در همان ماتریس دوران داده شده در کلاس که برحسب ϵ_1 تا ϵ_4 بود، به دست می‌آیند. تنها نکته‌ای که وجود دارد این است که در روابطی که برای یافتن کواترنیون‌ها از روی اعضای ماتریس دوران، در کلاس، داده شد، به نظر می‌رسد که حتماً لازم است ابتدا ϵ_4 یا p_4 محاسبه گردد و سپس بقیه از روی آن و تقسیم بر آن به دست می‌آیند. درحالیکه روابط اخیر نشان می‌دهد که لزومی ندارد بر ϵ_4 یا p_4 تاکید گردد بلکه می‌توان از همان ابتدا و بدون تقسیم، همه را به دست آورد. راه بهتر شاید این باشد که همهٔ p_j ها از همان روابط ابتدایی محاسبه شوند و هرکدام که از همه بزرگتر بود انتخاب شده و سپس این p_{max} به عنوان عنصر تقسیم استفاده شود و بقیه از راه تقسیم بر این p_{max} محاسبه گردند. این راه اخیر از آنجا که چنانچه، بر اثر خطا، صفر در نظر گرفته شود جلوگیری خواهد نمود و همچنین مشکلات عددی کمتری هم خواهد داشت چون به بزرگترین عدد ممکن تقسیم می‌گردد.

(۱۱)

۸) مکان هندسی محورهای دوران، صفحهٔ نیم‌ساز دو بردار مساوی خواهد بود. در دوران بین دستگاه‌ها سه جفت از این بردارهای یکه (در آن یافته) وجود دارد؛ مثلاً t_1 به s_1 و t_2 به s_2 و t_3 به s_3. محور دورانی که برای هر سه بتواند کار کند قطعاً فصل مشترک صفحهٔ نیم‌ساز بین t_1 و s_1 و صفحهٔ نیم‌ساز بین t_2 و s_2 خواهد بود و همین‌طور باید این فصل مشترک حتماً در صفحهٔ نیم‌ساز بین t_3 و s_3 نیز واقع باشد.



حال توجه کنید که صفحهٔ نیم‌ساز بین t_1 و s_1 حتماً بر بردار تفاضل این دو یعنی $t_1 - s_1$ عمود است. به همین شکل صفحهٔ نیم‌ساز t_2 و s_2 نیز بر $t_2 - s_2$ عمود است، پس فصل مشترک بین این دو صفحهٔ نیم‌ساز هم باید بر $t_1 - s_1$ عمود باشد و هم باید بر $t_2 - s_2$ عمود باشد و این یعنی باید در جهت حاصلضرب این دو بردار که بر هر دو عمود است منطبق باشد یعنی هم‌امتداد با $(t_1 - s_1) \times (t_2 - s_2)$ و به همین شکل بقیه نیز قابل استدلال است.

* توجه کنید که اثبات هم‌امتدادی آن سه حکم اثبات هم فصل مشترک بودن آن صفحه‌های نیم‌ساز ذکر شده در بالا را خواهد داشت؛ کافی است دوتای اول را ثابت کنیم که هم‌امتدادند و بقیه به طور مشابه خواهد بود: ابتدا توجه می‌کنیم که اولی هم بر $t_1 - s_1$ عمود است و هم بر $t_2 - s_2$ و اما عمود بودن دومی بر $t_1 - s_1$ محرز است پس کافی است ثابت کنیم بر $t_2 - s_2$ نیز عمود است و بدین ترتیب معلوم می‌شود که اولی و دومی هم‌امتدادند. حال برای تعامد دومی بر $t_2 - s_2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\underbrace{\left[(t_1 - s_1) \times (t_3 - s_3)\right]}_{t_1 \times t_3 - s_1 \times t_3 - t_1 \times s_3 + s_1 \times s_3} \cdot (t_2 - s_2) \stackrel{?}{=} 0 \longrightarrow$$

$$\underbrace{t_1 \times t_3}_{-t_2} - s_1 \times t_3 - t_1 \times s_3 + \underbrace{s_1 \times s_3}_{-s_2}$$

$$= \cancel{-1} - (s_1 \times t_3) \cdot t_2 - (t_1 \times s_3) \cdot t_2 + \cancel{s_2 \cdot t_2}$$
$$\cancel{+ s_2 \cdot t_2} + (s_1 \times t_3) \cdot s_2 + (t_1 \times s_3) \cdot s_2 + \cancel{1}$$

$$= -s_1 \cdot \overbrace{(t_3 \times t_2)}^{-t_1} + s_3 \cdot \overbrace{(t_1 \times t_2)}^{t_3} + \overbrace{(s_2 \times s_1)}^{-s_3} \cdot t_3 + t_1 \cdot \overbrace{(s_3 \times s_2)}^{-s_1}$$

$$= \cancel{s_1 \cdot t_1} + \cancel{s_3 \cdot t_3} - \cancel{s_3 \cdot t_3} - \cancel{t_1 \cdot s_1} = 0$$

(۱۲)

۹) از اتحادهای برداری استفاده خواهیم نمود:

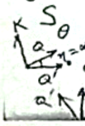
$$[(K \times Q) \times K] \cdot [(K \times Q') \times K] = [Q - (K \cdot Q) K] \cdot [Q' - (K \cdot Q') K]$$

$$|(K \times Q) \times K| \, |(K \times Q') \times K| \, C_\alpha = Q \cdot Q' - (K \cdot Q)(K \cdot Q') - (K \cdot Q')(K \cdot Q) + (K \cdot Q)(K \cdot Q') K \cdot K$$

$C2x = 1 - 2S^2x$

$$\underbrace{|K \times Q|}_{S_\theta} \, \underbrace{|K \times Q'|}_{S_\theta} \, C_\alpha = C_\eta - 2 C_\theta^2 + C_\theta^2$$

$$S_\theta \, S_\theta \, C_\alpha = C_\eta - C_\theta^2 \Longrightarrow * \; C_\eta - C_\theta^2 = C_\alpha S_\theta^2 \dashrightarrow S_{\eta/2} = S_{\alpha/2} \, S_\theta$$



$\theta = \pi/2 \Leftarrow \alpha = \eta$ یعنی زاویهٔ دوران همان زاویهٔ بین دو بردار خواهد بود که $\theta = \pi/2$ یعنی محور دوران عمود بر هر دو بردار انتخاب شده است که انتظار داشتیم.

$\theta = \eta/2 \Leftarrow \alpha = \pi$ یعنی محور دوران در صفحهٔ دو بردار انتخاب شده که یعنی نیم‌ساز دو بردار که برای زاویهٔ دوران مقدار π به دست خواهد آمد.

۱۴

۱۰) حول محورهای ثابت t ابتدا $\pi/2$ حول محور 3 و سپس $\pi/2$ حول محور 2ی t می‌باشد در نتیجه می‌توان نوشت:

$$ {}^{t}_{s}C = C_2(\pi/2)\,C_3(\pi/2) = \begin{bmatrix} C_{\pi/2} & 0 & S_{\pi/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{\pi/2} & 0 & C_{\pi/2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{\pi/2} & -S_{\pi/2} & 0 \\ S_{\pi/2} & C_{\pi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

(الف)

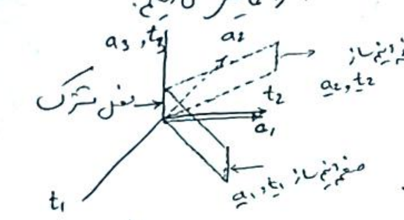
$$ {}^{t}_{s}C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

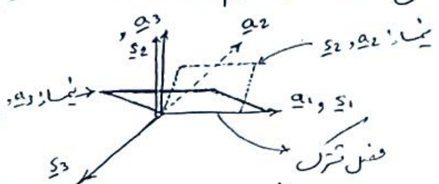
و اگر از دید حول محورهای گذرا ابتدا $\pi/2$ حول محور $3'^{(s)}$ و سپس $\pi/2$ حول محور $1'^{(s)}$ انجام شده است که در نتیجه خواهیم داشت:

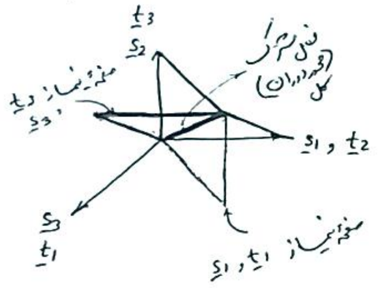
$$ {}^{t}_{s}C = C_{3'}(\pi/2)\,C_{1'}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

* که هر دو نتیجه یکسان است!

(ب) در هر مرحله فصل مشترک صفحات نیمساز مناسب را نمایش می‌دهیم:







(ج)

و (د) توجه می‌کنیم که بردار دوران برای دوران اول در امتداد محور t_3 است، برای دوران دوم حول محور t_2 است و برآیند این دو بردار هرگز برداری مانند بردار دوران کل نشان داده شده در شکل پایین نخواهد بود!

(هـ)

$$ C_{44} = \mathrm{Trace}\{{}^{t}_{s}C\} = 0 \rightarrow P_4^2 = 1 + C_{44} = 1 \rightarrow P_4 = 1 $$

$$ P_4 P_1 = C_{32} - C_{23} = 1 - 0 = 1 \rightarrow P_1 = 1 \quad , \quad P_4 P_2 = C_{13} - C_{31} = 1 - 0 = 1 \rightarrow P_2 = 1 $$

$$ P_4 P_3 = C_{21} - C_{12} = 1 - 0 = 1 \rightarrow P_3 = 1 \rightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1/2 $$

$$ \Rightarrow 1/2 = \epsilon_4 = C_{\alpha/2} \rightarrow \alpha/2 = \pi/3 \rightarrow \boxed{\alpha = 2\pi/3} \text{ و } \boxed{\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} & \frac{\sqrt3}{3} \end{bmatrix}^T} $$

توجه کنید که بردار دوران θ خواهد بود:

$$ \underline{K}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2\pi\sqrt3}{9} & \frac{2\pi\sqrt3}{9} & \frac{2\pi\sqrt3}{9} \end{bmatrix}^T $$

۱۵

۱۱) (الف)

$$ {}^{t}_{s}C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & +\sqrt2/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt2/2 \\ -\sqrt2/2 & \sqrt2/2 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{44} = \mathrm{Trace}\{C\} = 1/2 + 1/2 = 1 \quad P_4^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow P_4 = \sqrt2 \text{ و } P_1 = \frac{\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}}{\sqrt2} = 1 $$

$$ \rightarrow P_2 = \frac{+\frac{\sqrt2}{2} - (-\frac{\sqrt2}{2})}{\sqrt2} = 1 \; , \rightarrow P_3 = \frac{1/2 - 1/2}{\sqrt2} = 0 \rightarrow \epsilon_4 = C_{\alpha/2} = \frac{\sqrt2}{2} \rightarrow \alpha/2 = \pi/4 \rightarrow \boxed{\alpha = \pi/2} $$

$$, \epsilon_1 = 1/2 \quad \epsilon_2 = 1/2 \quad \epsilon_3 = 0 \quad , \quad \underline{K} = [\tfrac{\sqrt2}{2} \; \tfrac{\sqrt2}{2} \; 0]^T \; , \quad \underline{K}_\alpha = [\tfrac{\pi}{2}\tfrac{\sqrt2}{2} \; \tfrac{\pi\sqrt2}{4} \; 0]^T $$

(ب)

$$ \psi = \tan^{-1}\frac{1/2}{1/2} = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} \; , \; \theta = -\sin^{-1}\frac{-\sqrt2}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{3\pi}{4} \; , \; \phi = \tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{0} = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} $$

که با آزمون روی ماتریس دوران بصورت $\phi = \pi/2$ ، $\theta = \pi/4$ ، $\psi = \pi/4$ تثبیت می‌گردند.

شکل داده شده برای ψ و θ کاملاً مناسب است فقط لازم است در قسمت مربوط به φ، $\underline{s}_2$ را روی $\underline{V}_3$ قرار دهیم و $\underline{s}_3$ را نیز در امتداد $\underline{V}_2$ ولی در مقابل آن در نظر بگیریم.

۱۸

۱) چون بردار دوران در اینجا همواره به سرعت دوران منطبق است و در نتیجه سرعت دوران - یعنی جهت و امتداد تغییر نمی‌کند (البته ما فرض کرده‌ایم اندازه اش هم تغییر نمی‌کند ولی این فرض را لازم نداریم) پس می‌توان ماتریس $[\underline{\omega}\times] = \Omega$ را به صورت $\Omega = K\dot{\alpha} = K\frac{d\alpha}{dt}$ که در آن K ماتریس ثابت است در نظر گرفت لذا داریم:

$$\frac{d\,{}^t_sC}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\cdot K\,{}^t_sC \Rightarrow \frac{d\,{}^t_sC}{d\alpha} = K\,{}^t_sC \qquad K = [\underline{K}\times]$$

حل کامل ۳

که چون حل معادله دیفرانسیل بالا را قبلاً دیده‌ایم داریم که:

$${}^t_sC(\alpha) = e^{K(\alpha-0)}\,{}^t_sC(0)$$

توجه کنید که بردار $\underline{K}$ هم در t و هم در s یکی است.

$${}^t_sC = e^{K\alpha} I = e^{[\underline{K}_\alpha\times]}$$

۱۹ (۲ داریم:

$${}^t_sC = C(\underline{K}_\alpha) = e^{[\underline{K}_\alpha\times]} = I + [K_\alpha\times] + \frac{[K_\alpha\times]^2}{2!} + \cdots \cong I + [\underline{K}_\alpha\times]$$

۲۱ (۳ دستگاه اول را s و دستگاه دوم را t می‌گیریم

$${}^t\underline{\omega}_{ts} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix} \qquad \omega: \text{مقداری است ثابت}$$

$$\Rightarrow {}^t_s\dot{C} = \begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}{}^t_sC \Rightarrow {}^t_sC(t) = e^{\overbrace{\begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}^{\Omega}t}\,{}^t_sC(t=0)$$

و اما

$$\psi = \phi = 0, \quad \theta = \pi/4 \Longrightarrow {}^t_sC(t=0) = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt2}{2} & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$$

$$e^{\Omega t} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-\Omega)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}s & \omega & 0\\ -\omega & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+\omega^2)}\begin{bmatrix}s & -\omega & 0\\ \omega & s & 0\\ 0 & 0 & \frac{s}{s^2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$e^{\Omega t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+\omega^2} & \frac{-\omega}{s^2+\omega^2} & 0\\ \frac{\omega}{s^2+\omega^2} & \frac{s}{s^2+\omega^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}C_{\omega t} & -S_{\omega t} & 0\\ S_{\omega t} & C_{\omega t} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^t_sC(t) = e^{\Omega t}\cdot{}^t_sC(t=0) = \begin{bmatrix}C_{\omega t} & -S_{\omega t} & 0\\ S_{\omega t} & C_{\omega t} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt2}{2} & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}C_{\omega t} & -S_{\omega t} & \frac{\sqrt2}{2}C_{\omega t}\\ \frac{\sqrt2}{2}S_{\omega t} & C_{\omega t} & \frac{\sqrt2}{2}S_{\omega t}\\ -\frac{\sqrt2}{2} & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$$

۲۲ (۴

$${}^s\underline{\omega}_{ts} = {}^s_tC\,{}^t\underline{\omega}_{ts} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}C_{\omega t} & \frac{\sqrt2}{2}S_{\omega t} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ -S_{\omega t} & C_{\omega t} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2}C_{\omega t} & \frac{\sqrt2}{2}S_{\omega t} & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\omega\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$$

$$\dot{\phi} = \left(-\frac{\sqrt2}{2}\omega\right) + \left(\frac{\sqrt2}{2}\omega\right)t_\theta C_\phi, \quad \dot{\theta} = -S_\phi\left(\frac{\sqrt2}{2}\omega\right), \quad \dot{\psi} = \frac{C_\phi}{C_\theta}\left(\frac{\sqrt2}{2}\omega\right)$$

می‌بینید که حل تحلیلی به سختی ممکن است وجود داشته باشد.

۲۳ (۵ چون $\frac{1}{2}A$ مقداری است ثابت با زمان لذا جواب خواهد بود:

$$\underline{\dot{P}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt2}{2}\omega & 0 & -\frac{\sqrt2}{2}\omega\\ -\frac{\sqrt2}{2}\omega & 0 & -\frac{\sqrt2}{2}\omega & 0\\ 0 & \frac{\sqrt2}{2}\omega & 0 & \frac{\sqrt2}{2}\omega\\ \frac{\sqrt2}{2}\omega & 0 & -\frac{\sqrt2}{2}\omega & 0\end{bmatrix}\underline{P}$$

$$\underline{P}(t) = e^{\frac{1}{2}At}\,\underline{P}(0)$$

و $e^{\frac{1}{2}At}$ قابل به دست آوردن تحلیلی می‌باشد.

۲۴ (۶ s جدید را v در نظر می‌گیریم:

$${}^v\underline{\omega}_{tv} = \underline{\omega}_{ts} + \underline{\omega}_{sv} \Rightarrow {}^v\underline{\omega}_{tv} = {}^v_sC\,{}^s\underline{\omega}_{ts} + {}^v\underline{\omega}_{sv}$$

$${}^v\underline{\omega}_{tv} = {}^v_sC(t)\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\omega\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad {}^s_v\dot{C}(t) = {}^s\Omega_{sv}\,{}^s_vC(t)$$

$${}^s_vC(t=0) = I_{3\times3} \Rightarrow \boxed{{}^s_vC(t) = e^{{}^s\Omega_{sv}t}}$$

$${}^s\Omega_{sv} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-\omega_0\\0&\omega_0&0\end{bmatrix} \Rightarrow e^{{}^s\Omega_{sv}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s&0&0\\0&s&\omega_0\\0&-\omega_0&s\end{bmatrix}^{-1}\right\} \qquad \boxed{{}^{s,v}\underline{\omega}_{sv} = \begin{bmatrix}\omega_0\\0\\0\end{bmatrix}}$$

دقت کنید که : ادامه ۶) ادامه ۲۴

$$\mathcal{L}\left(e^{{}^s\Omega_{sv}t}\right) = \begin{bmatrix}1/s&0&0\\0&\frac{s}{s^2+\omega^2}&\frac{-\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\\0&\frac{\omega_0}{s^2+\omega^2}&\frac{s}{s^2+\omega^2}\end{bmatrix} \longrightarrow {}^s_vC = e^{{}^s\Omega_{sv}t} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&C_{\omega_0 t}&-S_{\omega_0 t}\\0&S_{\omega_0 t}&C_{\omega_0 t}\end{bmatrix} \longrightarrow$$

$${}^v\underline{\omega}_{tv} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&C_{\omega_0 t}&+S_{\omega_0 t}\\0&-S_{\omega_0 t}&C_{\omega_0 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\omega\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\omega\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\omega+\omega_0\\\frac{\sqrt2}{2}\omega S_{\omega_0 t}\\\frac{\sqrt2}{2}\omega C_{\omega_0 t}\end{bmatrix}$$

و

$${}^t\underline{\omega}_{tv} = {}^t\underline{\omega}_{ts} + {}^t\underline{\omega}_{sv} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix} + {}^t_sC\begin{bmatrix}\omega_0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\omega_0 C_{\omega t}\\\frac{\sqrt2}{2}\omega_0 S_{\omega t}\\-\frac{\sqrt2}{2}\omega_0+\omega\end{bmatrix}$$

$${}^t_v\dot{C} = \begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt2}{2}\omega_0-\omega&\frac{\sqrt2}{2}\omega_0 S_{\omega t}\\-\frac{\sqrt2}{2}\omega_0+\omega&0&-\frac{\sqrt2}{2}\omega_0 C_{\omega t}\\-\frac{\sqrt2}{2}\omega_0 S_{\omega t}&\frac{\sqrt2}{2}\omega_0 C_{\omega t}&0\end{bmatrix}{}^t_vC \quad , \quad {}^t_vC(t=0) = {}^t_sC(t=0) = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{P}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&\frac{\sqrt2}{2}\omega C_{\omega_0 t}&-\frac{\sqrt2}{2}\omega S_{\omega_0 t}&-\frac{\sqrt2}{2}\omega+\omega_0\\-\frac{\sqrt2}{2}\omega C_{\omega_0 t}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\omega+\omega_0&\frac{\sqrt2}{2}\omega S_{\omega_0 t}\\\frac{\sqrt2}{2}\omega S_{\omega_0 t}&\frac{\sqrt2}{2}\omega-\omega_0&0&\frac{\sqrt2}{2}\omega C_{\omega_0 t}\\\frac{\sqrt2}{2}\omega-\omega_0&-\frac{\sqrt2}{2}\omega S_{\omega_0 t}&-\frac{\sqrt2}{2}\omega C_{\omega_0 t}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\end{bmatrix} \qquad \underline{P}(t=0) = \begin{bmatrix}0\\\frac{\sqrt2}{\sqrt{2+\sqrt2}}\\0\\\sqrt{2+\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$P_4^2(0) = 1 + C_{44} = 1 + \mathrm{Trace}\{C(t=0)\} = 1+1+\sqrt2 = 2+\sqrt2 \longrightarrow P_4(0) = \sqrt{2+\sqrt2} \longrightarrow$$

$$P_1(0)P_4(0) = 0 \longrightarrow P_1(0) = 0 \quad , \quad P_2(0)P_4(0) = \sqrt2 \longrightarrow P_2(0) = \frac{\sqrt2}{\sqrt{2+\sqrt2}} \quad , \quad P_3(0)P_4(0) = 0 \longrightarrow P_3(0) = 0$$

---

۱۵ ۷) دوباره از همان معادله‌ای که قبلاً شروع کرده بودم، شروع می‌کنیم :

۲۵

$$\underline{\omega}_{ts} = \underline{\omega}^{(tu)} + \underline{\omega}^{(uv)} + \underline{\omega}^{(vs)}$$

باید جابجا شوند

$$\rightarrow {}^t\underline{\omega}_{ts} = {}^t\underline{\omega}_{tu} + {}^t_uC\,{}^u\underline{\omega}_{uv} + {}^t_vC\,{}^v\underline{\omega}_{vs} = {}^t\underline{\omega}_{tu} + C_{3'}(\psi)C_{2'}(\theta)\,{}^u\underline{\omega}_{uv} + C_{3'}(\psi)\,{}^v\underline{\omega}_{vs}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\psi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C_\psi&-S_\psi&0\\+S_\psi&C_\psi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\dot\theta\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C_\psi&-S_\psi&0\\+S_\psi&C_\psi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_\theta&0&+S_\theta\\0&1&0\\-S_\theta&0&C_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\phi\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot\theta S_\psi\\\dot\theta C_\psi\\\dot\psi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C_\psi&-S_\psi&0\\+S_\psi&C_\psi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\phi C_\theta\\0\\-\dot\phi S_\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot\theta S_\psi + \dot\phi C_\theta C_\psi\\\dot\theta C_\psi + \dot\phi C_\theta S_\psi\\\dot\psi - \dot\phi S_\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_\theta C_\psi&-S_\psi&0\\+C_\theta S_\psi&C_\psi&0\\-S_\theta&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\phi\\\dot\theta\\\dot\psi\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot\phi\\\dot\theta\\\dot\psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{C_\psi}{C_\theta}\omega_1 + \frac{S_\psi}{C_\theta}\omega_2\\-S_\psi\omega_1 + C_\psi\omega_2\\+C_\psi t_\theta\omega_1 + S_\psi t_\theta\omega_2 + \omega_3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot\phi\\\dot\theta\\\dot\psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}C_\psi/C_\theta&+S_\psi/C_\theta&0\\-S_\psi&C_\psi&0\\+C_\psi t_\theta&S_\psi t_\theta&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix}$$

۲۷ ۲) با حل مشتق‌گیر مطلق داریم: {حل سری $\underline{\underline{\varepsilon}}$

(ب)

$$ {}^{t}\underline{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{s}\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow {}^{t}(P_t\, \underline{t}_1) = P\, {}^{t}\underline{t}_1 = 0 $$

$$ {}^{s}(P_s\, \underline{s}_1) = P\, {}^{s}\underline{s}_1 = 0 $$

$$ \Rightarrow P_s\, \underline{t}_1 = \cancel{P_t\, \underline{t}_1}^{\,0} + \underline{\omega}_{st} \times \underline{t}_1 \Rightarrow {}^{t}(P_s\, \underline{t}_1) = {}^{t}\underline{\omega}_{st} \times {}^{t}\underline{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{s}(P_s\, \underline{t}_1) = {}^{s}_{t}C \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} C_{\omega t} & -S_{\omega t} & \frac{\sqrt{2}}{2} C_{\omega t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} S_{\omega t} & C_{\omega t} & \frac{\sqrt{2}}{2} S_{\omega t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega S_{\omega t} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\omega C_{\omega t} \\ -\omega \frac{\sqrt{2}}{2} S_{\omega t} \end{bmatrix} $$

۲۱

$$ P_t\, \underline{s}_1 = \cancel{P_s\, \underline{s}_1}^{\,0} + \underline{\omega}_{ts} \times \underline{s}_1 \Rightarrow {}^{s}(P_t\, \underline{s}_1) = {}^{s}\underline{\omega}_{ts} \times {}^{s}\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{t}(P_t\, \underline{s}_1) = {}^{t}_{s}C \left(P_t\, \underline{s}_1 \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega S_{\omega t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega C_{\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} $$

الف) با توجه به ماتریس دوران به دست آمده در تمرین سری ۳ توجه داریم که:

$$ {}^{s}\underline{t}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} C_{\omega t} \\ -S_{\omega t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} C_{\omega t} \end{bmatrix} \Leftarrow {}^{t}_{s}C = [{}^{t}\underline{s}_1\ {}^{t}\underline{s}_2\ {}^{t}\underline{s}_3] = \begin{bmatrix} {}^{s}\underline{t}_1^{T} \\ {}^{s}\underline{t}_2^{T} \\ {}^{s}\underline{t}_3^{T} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{t}\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} C_{\omega t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} S_{\omega t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{s}(P_s\, \underline{t}_1) = P\, {}^{s}\underline{t}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega S_{\omega t} \\ -\omega C_{\omega t} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega S_{\omega t} \end{bmatrix} $$ است و که به نتیجه قبلی می‌توان رسید $$ {}^{t}(P_t\, \underline{s}_1) = P\, {}^{t}\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega S_{\omega t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\omega C_{\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} $$

---

۲۸ ۳) همانطور که قبلاً گفته‌ایم که دستگاه‌های دلخواه ضرب (داخلی، طول را تغییر نمی‌دهند چون طول بردار نیز یعنی حاصل‌ضرب داخلی آن، بعد، پس طول در تمام دستگاه‌ها یکسان است در هر لحظه. پس مشتق این طول نیز در تمام دستگاه‌ها یکسان خواهد بود.

---

۲۹ ۴) مشخصات حامل بردار را طوری انتخاب می‌کنیم که اندازه امتداد محور آن در امتداد همین بردار باشد. در این دستگاه چون بردار مزبور دارای طول ثابت است لذا از دید این دستگاه مشتق این بردار صفر است پس داریم:

(این دستگاه حامل را t و دستگاه دلخواه دیگر را s می‌گیریم)

$$ P_s\, \underline{r} = \cancel{P_t\, \underline{r}}^{\,0} + \underline{\omega}_{st} \times \underline{r} $$

$$ P_s\, \underline{r} = \underline{\omega}_{st} \times \underline{r} \Rightarrow $$ $P_s\, \underline{r}$ (را به هر) بر $\underline{r}$ عمود خواهد بود! توجه کنید که اندازه

---

۳۰ ۵) همان دستگاه t در (۴) را مدنظر قرار دهید و توجه کنید که مشتق بردار از دید این دستگاه اندازه مهمان مشتق طول آن است و اندازه در راستای آن بردار خواهد بود.

$$ P_s\, \underline{r} = \underbrace{P_t\, \underline{r}}_{\text{اندازه در راستای } \underline{r}} + \underbrace{\underline{\omega}_{st} \times \underline{r}}_{\text{اندازه عمود بر } \underline{r}} $$

توجه می‌کنیم که دستگاه t هیچ بستگی به دستگاه دلخواه s ندارد و لذا $P_t\, \underline{r}$ مستقل از s خواهد بود.

(حل سری پنجم)

حل مسئله دستگاه کروی (د) نسبت به (D)

الف) می‌توان با کمی دقت زوایای اویلر معروف را برحسب همین زوایای داده‌شده دستگاه کروی به دست آورد. توجه می‌کنیم که:

$$\Psi_{\text{اویلر}} = \theta_{\text{کروی}} \Rightarrow C_\psi \to C_\theta \quad S_\psi \to S_\theta \;,\; \dot\psi \Longrightarrow \dot\theta$$

$$\Theta_{\text{اویلر}} = \frac{3\pi}{2} + \varphi_{\text{کروی}} \Rightarrow C_\Theta \to S_\varphi \quad S_\Theta \to -C_\varphi \;,\; \dot\Theta \Longrightarrow \dot\varphi$$

$$\Phi_{\text{اویلر}} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow S_\Phi \longrightarrow -1 \quad C_\Phi \to 0 \;,\; \dot\Phi \Longrightarrow 0$$

با جایگذاری در روابط به دست آمده برای زوایای اویلر خواهیم داشت:

$$ {}^D_S C = \begin{bmatrix} C_\theta S_\varphi & C_\theta C_\varphi & -S_\theta \\ S_\theta S_\varphi & S_\theta C_\varphi & C_\theta \\ C_\varphi & -S_\varphi & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^D\underline{r}_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = {}^D_S C \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r S_\varphi C_\theta \\ r S_\varphi S_\theta \\ r C_\varphi \end{bmatrix}$$

ب) قبلاً نیز p, q, r یعنی ${}_{DS}\underline{\omega}$ را نیز برحسب زوایای اویلر کلی به دست آورده بودیم. فقط کافی است معادل‌های آنها که در بالا آمده است را جایگزین کنیم:

$$ {}^S\underline{\omega}_{DS} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_\varphi \\ 0 & 0 & -S_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\varphi \\ \dot\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\theta C_\varphi \\ -\dot\theta S_\varphi \\ \dot\varphi \end{bmatrix}$$

ج)

$$ {}^S\underline{v}_{DB} = {}^S\underline{v}_{SB} + {}^S\underline{\omega}_{DS} \times {}^S\underline{r}_B = \begin{bmatrix} \dot r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot\theta C_\varphi \\ -\dot\theta S_\varphi \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot r \\ r\dot\varphi \\ r\dot\theta S_\varphi \end{bmatrix}$$

د) در کلاس به دست آمد:

$$ {}^S a_{DB} = {}^S\underline{a}_{SB} + 2\, {}^S\underline{\omega}_{DS} \times {}^S\underline{v}_{SB} + \left(P_{S,D}\, {}^S\underline{\omega}_{DS}\right) \times {}^S\underline{r}_B + {}^S\underline{\omega}_{DS} \times \left({}^S\underline{\omega}_{DS} \times {}^S\underline{r}_B\right)$$

شتاب از دید دستگاه کروی: ${}^S\underline{a}_{SB} = \begin{bmatrix} \ddot r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، شتاب کوریولیس $= 2\, {}^S\underline{\omega}_{DS} \times {}^S\underline{v}_{SB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\dot r\dot\varphi \\ 2\dot r\dot\theta S_\varphi \end{bmatrix}$

$$\text{شتاب مماسی} = \left(P_{S,D}\, {}^S\underline{\omega}_{DS}\right) \times {}^S\underline{r}_B = \begin{bmatrix} \ddot\theta C_\varphi - \dot\theta\dot\varphi S_\varphi \\ -\ddot\theta S_\varphi - \dot\theta\dot\varphi C_\varphi \\ \ddot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\ddot\varphi \\ r\ddot\theta S_\varphi + r\dot\theta\dot\varphi C_\varphi \end{bmatrix}$$

$$\text{شتاب جانب مرکز} = \begin{bmatrix} \dot\theta C_\varphi \\ -\dot\theta S_\varphi \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} \dot\theta C_\varphi \\ -\dot\theta S_\varphi \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} -r\dot\theta^2 S_\varphi^2 - r\dot\varphi^2 \\ r\dot\theta^2 C_\varphi S_\varphi \\ r\dot\theta\dot\varphi C_\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^S\underline{a}_{DB} = \begin{bmatrix} \ddot r - r\dot\varphi^2 - r\dot\theta^2 S_\varphi^2 \\ r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi - r\dot\theta^2 S_\varphi C_\varphi \\ r\ddot\theta S_\varphi + 2\dot r\dot\theta S_\varphi + 2r\dot\varphi\dot\theta C_\varphi \end{bmatrix}$$

(ه

$$ {}^{D}\underline{v}_{DB} = P\,{}^{D}\underline{r}_{B} = \begin{bmatrix} \dot r S_\varphi C_\theta + r\dot\varphi C_\varphi C_\theta - r\dot\theta S_\varphi S_\theta \\ \dot r S_\varphi S_\theta + r\dot\varphi C_\varphi S_\theta + r S_\varphi \dot\theta C_\theta \\ \dot r C_\varphi - r\dot\varphi S_\varphi \end{bmatrix} = {}^{D}_{s}C \begin{bmatrix} \dot r \\ r\dot\varphi \\ r\dot\theta S_\varphi \end{bmatrix} $$

ادامه حل سری بعد

از عبارت انتهایی استفاده نکرده و داریم :

$$ {}^{D}\underline{a}_{DB} = P^{2}\,{}^{D}\underline{r}_{B} = {}^{D}_{s}\dot C \begin{bmatrix} \dot r \\ r\dot\varphi \\ r\dot\theta S_\varphi \end{bmatrix} + {}^{D}_{s}C \begin{bmatrix} \ddot r \\ \dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi \\ \dot r\dot\theta S_\varphi + r\ddot\theta S_\varphi + r\dot\theta\dot\varphi C_\varphi \end{bmatrix} $$

$$ {}^{D}_{s}\dot C = {}^{D}_{s}C\,[{}^{s}\underline{\omega}_{DS}\times] $$

$$ {}^{D}\underline{a}_{DB} = {}^{D}_{s}C \left\{ \begin{bmatrix} \dot\theta C_\varphi \\ -\dot\theta S_\varphi \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot r \\ r\dot\varphi \\ r\dot\theta S_\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \right\} = \dots $$

که حل مقدار تنها !

(۳۹ تمرین ۱)

الف

$$ P(\underline{v}\cdot\underline{w}) = P({}^{s}\underline{v}^{T}\,{}^{s}\underline{w}) = (P\,{}^{s}\underline{v}^{T})\,{}^{s}\underline{w} + {}^{s}\underline{v}^{T}(P\,{}^{s}\underline{w}) $$

$$ = {}^{s}(P_s\,\underline{v})^{T}\,{}^{s}\underline{w} + {}^{s}\underline{v}^{T}\,{}^{s}(P_s\,\underline{w}) $$

$$ = {}^{s}\big((P_s\,\underline{v})\cdot\underline{w}\big) + {}^{s}\big(\underline{v}\cdot(P_s\,\underline{w})\big) $$

$$ \overset{\text{دو طرف مستقل از پایه}}{=\!=} (P_s\,\underline{v})\cdot\underline{w} + \underline{v}\cdot(P_s\,\underline{w}) $$

ب) تمرین ۲) تقریباً مشابه بالا فقط با این تفاوت که داریم :

$$ {}^{s}\big(P_s(\underline{v}\times\underline{w})\big) = P\,{}^{s}\underline{v}\times{}^{s}\underline{w} = P\big([{}^{s}\underline{v}\times]\,{}^{s}\underline{w}\big) $$

$$ = \big(P\,[{}^{s}\underline{v}\times]\big)\,{}^{s}\underline{w} + [{}^{s}\underline{v}\times]\big(P\,{}^{s}\underline{w}\big) $$

$$ \big(P\,[{}^{s}\underline{v}\times]\big) \downarrow [{}^{s}(P_s\,\underline{v})\times] \qquad \big(P\,{}^{s}\underline{w}\big) \downarrow {}^{s}(P_s\,\underline{w}) $$

$$ {}^{s}\big(P_s(\underline{v}\times\underline{w})\big) = {}^{s}\big((P_s\,\underline{v})\times\underline{w}\big) + {}^{s}\big(\underline{v}\times(P_s\,\underline{w})\big) $$

$$ \xRightarrow{\text{هر دو طرف مستقل از دستگاه مختصات}} $$

$$ \boxed{P_s(\underline{v}\times\underline{w}) = (P_s\,\underline{v})\times\underline{w} + \underline{v}\times(P_s\,\underline{w})} $$