بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه‌ای بر

سیستم‌های ناوبری

جعفر حیرانی نوبری

فهرست مطالب

مقدمه

درس اول: **ابزارهای ریاضی مورد نیاز**

۱ آنالیز برداری

۱-۱ بردارها و فضاهای برداری

۱-۲ ضرب داخلی دو بردار یا مقدار همراستایی یا همسانی دو بردار

۱-۳ ضرب خارجی دو بردار

۱-۴ تبدیل دوران و گونه‌های مختلف بیان آن

(کسینوس‌های هادی، بردار دوران، کواترنین)

۱-۵ دوران‌های ساده و ترکیب آنها

۲ معادلات حالت وضعیت نسبی دستگاه‌ها

۲-۱ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از ماتریس دوران

۲-۲ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از تحول زوایای اویلر

۲-۳ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از تحول بردار دوران

۲-۴ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از کواترنین‌ها

۲-۵ تحول حالت یک بردار از دید دستگاه‌های مختلف

(سرعت یک بردار از دید دستگاههای مختلف یا قضیهٔ کوریولیس)

۲-۶ بدست آوردن سرعت و شتاب

درس دوم: **تعیین موقعیت مطلق بدون ارتباط (ناوبری اینرسی)**

۱ تعیین موقعیت مطلق بدون ارتباط (ناوبری اینرسی)

۱-۱ مکان‌های مطلق و دستگاه‌های مطلق (سیستم اینرسی)

۱-۲ قانون دوم نیوتن

۱-۳ مدل‌سازی شتاب گرانش زمین

۱-۴ دستگاه ناوبری یا دستگاه جغرافیایی

-
-
-

درس اول

ابزارهای

ریاضی

مورد نیاز

در فرآیند راهنمایی بشر، همه چیز نزد آن یگانهٔ متعال، انـدازه‌ای معلـوم دارد[1] و او هـر چیزی را بصورت عددی برآورد کرده است[2]. بر این اساس موضوع مقداردهی و سـپس شـمردن مقدارها با پیمانه‌ها که نهایتاً با اعداد صورت می‌پذیرد، حائز اهمیت و در خور توجه است. در این میان، بیان بعضی از چیزها تنها و تنها با یک عدد، امکان‌پذیر نشد. لذا بهرحال این فرآیند آنقـدر ادامه یافت تا مفهومی به نام فضای برداری و بردارها، جایگاهی یافت که شایسته اسـت خواننـده برای آشنایی با این فرآیند، ضمن مراجعه به منابع متناسب، تفکر کند.

البته به نظر می‌رسد در مراجع عمومی که در دسترس می‌باشند نیز میـان مفـاهیم توسـعه یافته‌ای از قبیل مجموعه، میدان و ... تا بردار، فضای‌برداری و ... و چگونگی شکل‌گیری آنها که همگی به خاطر نیازهای بشر برای بیان بوده، گفتگویی نشده است و تنها به یک سری نتایج ایـن فرآیندها آن هم به صورت آماده، اکتفا گردیده است.

این اخلاق در گفتار علمی امروز، که بسیار نیز رایج می‌باشد، ناشی از دو چیـز مـی‌توانـد باشد یکی کم دانشی، نادانی و جهل و یا عدم صداقت در برخورد با مسأله !

ذکر همهٔ آن چه تا به این جا گذشت نه فقط یک یادآوری است، بلکه درخواست نگارنده است برای اینکه شما نیز نگاه خود را به مفاهیم ریاضی، هر چه عمیق‌تر نموده و ارتباط تنگاتنگ آنها را با چیزهایی که تجربه و مشاهده می‌کنید، همواره در نظر گرفته تا پیشرفتی حاصل شود و به این ترتیب روند توضیح آنچه را که در این نوشتار می‌آید، درک کنید.

آنچه قصد پافشاری و یادآوری آنرا داریم بطور خلاصه این است که :

سعی کنید هیچگاه از مشاهداتتان دور نیافتاده و فاصله نگیرید و همواره ارتباطتان را با آنها حفظ کنید.

چند نمونهٔ ساده موضوع را روشن می‌کند. اعداد و حساب آنها چگونه برای ما شکل گرفته است؟ مثلاً وقتی می‌گوییم ۱+۱=۲ منظورمان چیست؟ اگر یادتان باشد از همان آغاز یادگیری نیز به شما مثلاً سیبی نشان داده و سپس سیبی دیگر و در ادامه سعی کردند به شما بگویند که حالا دو تا سیب داریم!

---

[1] کل شیء عنده بمقدار (سورهٔ رعد آیه ۸)

[2] و احصی کل شیء عدداً (سورهٔ جن آیه ۲۸)

در ادامه همین کار را با چیزهای دیگری که ***قبلاً با مشاهدات به توافق رسیدهٔ شما و ایشان به بیان مشترکی رسیده بودید***، مانند توپ، مداد، سنگ، گربه و ... ادامه داده و حتی جمع، تفریق، ضرب و نهایتاً حساب را با شما و مشاهدات مشترک ادامه دادند.

به این ترتیب بود که شما حالا دو تا چیز شبیه و مثل هم می‌دیدید و به کمک این مشاهدات بود که کلمهٔ دو به شما القا گردیده و به کلمات مشترکتان افزوده گردید.

در ادامه برای آسانی در گفتگو، مانند روزهای اول نگفتند: یکی سیب با یکی سیب میشود دو تا سیب**!** بلکه فقط شنیدیم که گفتند: یک بعلاوهٔ یک مساوی است با دو، و نوشتند: ۱+۱=۲ **!** و آرام آرام رابطهٔ ما با آن مشاهدات کم رنگ گردید.

سخن این است که این کم رنگ شدن، در فرآیند کسب دانش و شناخت حق، یک آفت جدی است. این خلاصه سازی در بیان هرگز نباید موجبات دوری ما از مشاهدات و تجربیاتی گردد که مشغول بیان آن هستیم. در واقع بیان کامل‌تر و صحیح‌تر این است که: اگر ***یک چیزی*** مشاهده کرده و سپس ***چیز مشابه*** آن که قبلاً در یک اسم مشترک روی آنها توافق کرده اید، نیز در کنارش مشاهده کردید، آنگاه میگویید ***دو*** تا از آن را مشاهده می کنید.

مشاهده می کنید که مقدمات جدی، متعدد و مهمی در آن بیان ساده لازم است که در نظر گرفته شود. ولی برای سادگی در بیان، در عین اینکه مفروض است اما حذف گردیده است. به این ترتیب عددها و حساب با آنها ابزاری برای بیان ما از شمارش چیزهایی هستند که مشاهده کرده و می کنیم. به این ترتیب اگر مشاهده ای در کار نبوده باشد، گفتگو از اعداد، گفتگویی است که در پس آن یک ***اگر*** جدی ایستاده است و آن عبارتست از: ***اگر مشاهده کردید ....*** .

این ***اگر***ها در مقدمات مباحث ریاضی گاهی ذکر می‌گردند و گاهی فراموش شده و گاهی هم کم رنگ یادآوری می‌شوند. لذا چنانچه مقدمات یک بیان ویژه‌ای را به‌دقت رعایت نکنید، براحتی خودتان و شنونده را می‌توانید دچار گمراهی و سردرگمی کنید. این همان نکته ای است که نباید فراموش گردد.

۱- آنالیز برداری

۱-۱ بنیان‌های بردارها و فضاهای برداری

آنچه ما در این درس با آن روبرو هستیم بیانی است که نام بردار و فضای برداری بـه آن داده‌ایم. بنا به آنچه در مقدمه آمد لازم است هر گاه مشاهده‌ای را با بردار و یا فضای برداری می‌خواهید بیان کنید، فرآیند ارتباط بین این دو (مشاهده و بیان) را به‌خوبی حداقل برای یک بار به‌دقت انجام دهید تا خودتان و یا شنوندهٔ دیگر به اشتباه نیافتد. ما در ایـن درس بـه منظـور بیـان مشاهده‌ای ویژه، از کلمهٔ بردار استفاده می کنیم.

بیان دقیق این مشاهده تا رسیدن به استفاده از اصطلاح بردار، خود نیاز به مقدماتی طولانی دارد، چرا که مثلاً برای آنچه ما در این درس دنبال می کنیم، اصطلاح‌های جابجایی، نقطه، خـط، مستقیم بودن و هر آنچه در هندسه آمده است نیز هر یک لازم است با مشاهداتی مشترک بین ما، پیشتر، به توافق رسیده و نهایی شده باشد. ***پیمودن این فرآیند را اصطلاحاً معرفی فضای بـرداری می نامیم.***

اما با فرض اینکه این معرفی انجام شده باشد، می‌توان کار را پیش برد و بیـان را تقویـت نمود. اما در واقع دو امکان وجود دارد: یکی اینکه صورت پذیرفته باشد و در نتیجه اتصال ما بـه ***مشاهده*** هم اکنون همراه ما باشد و یا اینکه آن اتفاق هنوز رخ نداده باشد و ما بـا مشـاهده‌ای در تماس نباشیم.

در صورت اول تعمیق و توسعهٔ بیان، همراه با مشاهدات پـیش مـی‌رود و هـر توسـعه و تعمیقی همزمان و بی درنگ همراه است با توسعه و تعمیق مشاهدهٔ ما.

ولی در صورت دوم چنین نبوده و فقط یک بیان و یا الگویی از بیـان درحـال توسـعه و تعمیق است. ممکن است کسی بپرسد توسعه و تعمیق در صورت دوم چه فایده ای ممکن اسـت داشته باشد. پاسخ این است که آن فرآیند مفقود در صورت دوم، به محض اینکه اتفاق بیافتد، بـه راحتی می‌تواند سوار آن توسعه و تعمیق بیان مشترک گردیده و مشـاهدات را نیـز بـا سـرعت بیشتری توسعه و تعمیق بخشد.

هر چند به نظر می‌رسد که ما همان توسعه و تعمیق بیان را نیز همواره با یک مشاهده ای پیش برده‌ایم و همواره پیشرفت بیان ما مدیون روش اول بوده است، ولی پس از آن به تقلیـد از الگوی توسعه یافته این سوارکاری را برای مشاهده‌های دیگرمان نیز به‌خوبی به انجام می رسانیم و از راهی که قبلاً به همراهی مشاهده طی کرده‌ایم، بخوبی سود می بریم.

به هرحال به نظر می‌رسد اسم بردار و فضای برداری به صورت اولی که در بالا آمد، به همراه مشاهدهٔ ما از جابجایی‌هایی که دور و برمان رخ می‌دهد، درست شده، توسعه و تعمیق یافته و بین ما متداول شده باشد. چنانچه به یاد می‌آورید اولین معرفی‌ها نیز در دبیرستان، به همراه مشاهدات جابجایی بود که به شما القا گردید! در ادامه این فرآیند را به سرعت مرور میکنیم.

(۱) معرفی فضای برداری

از جایی و مکانی روی زمین به جایی دیگر روی آن، جابجایی‌ها را مشاهده می‌کنیم. نسبت به جایی روی زمین مثلاً خانه‌مان به جای کارمان و یا کوه روبروی خانه جابجا شده و از آنجا به جای دیگر و به همین ترتیب.

دیدیم جابجایی ما از یک نقطه ***(جا)*** به نقطهٔ ***(جای)*** دیگر، و از آن دومی به سومی، به لحاظ جابجایی، مانند این است که از اولی به سومی می‌رفتیم؛ بدون اینکه به دومی رفته باشیم. همین شد که چگونگی جابجایی نیز همزمان با خود موضوع جابجایی مورد توجه ما قرار گرفت.

همین بود که دیدیم از نقاطی به نقاط دیگر جابجا می شویم و این را راه یا خط خود در این جابجایی نامیدیم. مقدار راهپیمایی از مقایسهٔ راههای گوناگون نیز برای ما مهم گردید و به دنبال آن کوتاهترین راه را راه و یا خط مستقیم از جای الف به جای ب نامیدیم. به این ترتیب، رَویّه‌ای را که هر خط مستقیم از جایی به جای دیگر نشان می‌داد، نیز مشاهده گردید. یعنی با هر دو نقطه، یک رَویّه نیز مشاهده می‌گشت و قابل تشخیص و تمیز بود. ما به این رَویّه‌های گوناگون نام ***بردار*** دادیم.

در واقع از این پس هرگاه می‌گفتیم بردار الف–ب منظورمان رَویّه‌ای بود که از روی مشاهدهٔ جابجایی مستقیم از الف به ب بدست می آید. به عنوان نمونه می توانستیم از نقطهٔ ج، رَویّه یا بردارِ الف–ب را گرفته و پیش رفته و به نقطهٔ د برسیم. در این فرآیند مشاهده‌ای را ***"موازی بودن"*** و مشاهدهٔ دیگری را به ***"همان مقدار بودن"*** نامیدیم.

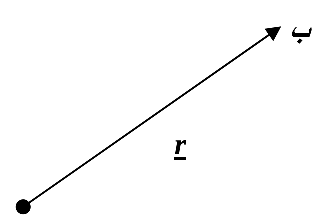
خوب دقت کنید که حوصلهٔ زیادی به خرج دادیم تا مشاهده‌ای را در نظر گرفته و نهایتاً آنرا بردار نام نهیم. به این ترتیب بردارهای بسیاری قابل مشاهده شدند. مشاهده کردیم که میتوان رَویّه‌های متعدد را یکی پس از دیگری پیش گرفت و رَویّه جدیدی را مشاهده نمود و به این ترتیب پشت هم اجرا کردن این رَویّه‌ها را عمل جمع بین آن‌ها نام نهادیم. سپس اینکه رَویّه‌ای را چند بار انجام داده و یا کسری از آنرا و ... یا مقداری از آنرا به انجام رسانده و به رَویّه ای جدید برسیم را نیز مشاهده نمودیم و آنرا ضرب یک عدد در آن بردار و رسیدن به یک بردار دیگر نام نهادیم.

رَویّه‌ای که در آن هیچ جابجایی صورت نپذیرد را نیز بردار خنثی برای عمل جمع یا بردار صفر نامیدیم. ضمناً مشاهده نمودیم که اگر ترتیب اتخاذ دو رَویّه را عوض نماییم در نتیجهٔ رَویّهٔ جدید یا بردار جدید اثری ندارد. این حقیقت را به این صورت گفتیم: عمل جمع بردارها خاصیت تعویض در ترتیب دارند.

مشاهدات دیگر نیز به همین دقت صورت گرفته و نام‌های شرکت پذیری دو عمل جمع بردارها و ضرب عدد در بردارها(یا همان خطی بودن یا همان جمع آثار) و پخش ضرب در جمع و غیره که به خوبی می‌دانید، بخود گرفته‌اند. اینها همگی وقتی مشاهده گردید، آنگاه اصطلاحاً می‌گوییم یک ***فضای برداری*** داریم.

(۲) نمایش بردار :

برای نمایش یک بردار از حروف لاتین به همراه یک خط زیر بهره خواهیم برد. شکل ۱ یک بردار نمونه به همراه نحوهٔ نمایش آن را نشان می‌دهد.



شکل ۱ - نمایش بردار

توجه: به این ترتیب یک بردار(رویهٔ جابجایی) به طور دقیق مشخص می‌شود و برای معرفی آن نیازی به دستگاه مختصات خاص نداریم.

(۳) وابستگی و استقلال خطی:

یک بردار را شاید بتوان بر حسب چند بردار دیگر بیان نمود. در این صورت به اصطلاح می‌گویند این بردار به صورت ترکیب خطی آنها بیان گشته است. حال اگر مجموعه ای از بردارها باشند که هیچیک را نتوان بر حسب ترکیب خطی از بقیه، بیان نمود، به این مجموعه، دسته بردارهای مستقل خطی می‌گویند.

(۴و۵) بُعد و پایه یک فضای برداری :

تعداد اعضای بزرگترین دسته بردار مستقل خطی ممکن(از لحاظ تعداد)، در یک فضای برداری را ***بُعد*** آن فضای برداری می‌گویند و چنین دسته برداری را یک ***پایهٔ*** آن فضای برداری می‌نامند.

از تعریف پایه پر واضح است که هر بردار را می‌توان بوسیلهٔ یک ترکیب خطی از اعضای یک پایه بیان کرد. می‌توان براحتی نشان داد که این بیان یگانه است. در ادامه چند نمونهٔ غیر از رویهٔ جابجایی، را نیز می آوریم.

(۶) مثال : همانطور که می‌دانید در هنر نقاشی رنگ‌های مختلف از ترکیب سه رنگ مستقل از هم مانند زرد، آبی و قرمز قابل تهیه است. لازم است این سه رنگ هیچ‌کدام از ترکیب دو رنگ دیگر به دست نیاید. از طرفی با ترکیب میزان معینی از هریک می‌توان سایر رنگ‌ها را تولید کرد.

حال اگر هریک از این سه رنگ را به عنوان یکی از اعضای پایه برای فضای برداری تمام رنگ‌ها در نظر بگیریم، سایر رنگ‌ها به صورت ترکیب خطی از این بردارها قابل نمایش هستند.

پایه: { یک پیمانه زرد= $\underline{s}_1$ ، یک پیمانه آبی= $\underline{s}_2$ ، یک پیمانه قرمز= $\underline{s}_3$ }

به عنوان مثال بردار دو پیمانه رنگ سبز را می‌توان برحسب مجموعهٔ پایهٔ فوق به صورت زیر بیان نمود.

$\underline{v}$ = دو پیمانه سبز = آبی + زرد = $k_1\,\underline{s}_1 + k_2\,\underline{s}_2 + k_3\,\underline{s}_3$

$$\Rightarrow\ \underline{v} = 1\ \underline{s}_1 + 1\,\underline{s}_2 + 0\ \underline{s}_3$$

و یا می‌نویسیم:

$$^{s}\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و یا می خوانیم: بیان بردار $\underline{v}$ در پایهٔ (یا دستگاهِ و یا مختصاتِ) s

■

(۷) مثـال : در فضای چند جمله‌ای‌های درجهٔ دو $\underline{s}_1=1,\ \underline{s}_2=t\ ,\ \ \underline{s}_3=t^2$ یـک پایـه بـوده و بردار $\underline{v} = -5t^2 + 10t + 2$ بر حسب این پایه قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \underline{v} &= v_1\ \underline{s}_1 + v_2\ \underline{s}_2 + v_3\ \underline{s}_3 \\ &= v_1 + v_2\ t + v_3\ t^2 = -5t^2 + 10t + 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_2 = 10 \\ v_3 = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

به سه‌تایی مرتب $(v_1, v_2, v_3)'$، بیان بردار $\underline{v}$ در پایهٔ s ، بیان بردار $\underline{v}$ در مختصاتِ s ، بیان بـردار $\underline{v}$ در دستگاهِ s و یا بردار $\underline{v}$ بیان شده در مختصاتِ s گفته می‌شود و به شکل زیر نیـز نمـایش می‌دهیم:

$$^{s}\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} =:\ \underline{v} = v_1\ \underline{s}_1 + v_2\ \underline{s}_2 + v_3\,\underline{s}_3$$

■

(۸) مثال : در فضای ۲بعدی رویهٔ جابجایی ها در صفحه به همراه پایه‌ای که قبلاً در نظـر گرفتـه شده است (با نماد "۱")، دو بردار ${}^1\underline{s}_1=(1,1)'$ و ${}^1\underline{s}_2=(2,1)'$ ، خود نیز یک پایه بوده و بردار دلخواه ${}^1\underline{v}=(x,y)'$ بر حسب این پایه به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\underline{v}=v_1\underline{s}_1+v_2\,\underline{s}_2$$

$${}^1\underline{v}=v_1\ {}^1\underline{s}_1+v_2\ {}^1\underline{s}_2$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=v_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+v_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}v_1+2v_2=x\\v_1+v_2=y\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\qquad (۹)$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\qquad (۱۰)$$

مانند مثال پیشین به زوج مرتب $(v_1,v_2)'$ ، به‌شکلی که در بالا بدست آمد، بیان بردار $\underline{v}$ در پایهٔ s می‌گوییم.

$${}^s\underline{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=:\ \underline{v}=v_1\ \underline{s}_1+v_2\ \underline{s}_2$$

■

توجه کنید که به این ترتیب هر برداری، به ازای این‌که در چه مختصاتی بیان می‌گـردد، می‌تواند بیان متفاوتی داشته باشد، هر چند ماهیتاً یک بردار بیشتر نیست ولی در هر مختصاتی به-گونه‌ای متفاوت با مختصات دیگر، بیان می‌شود.

مساله۱-۱ : نشان دهید در فضای چند جمله‌ای‌های درجهٔ n $\underline{s}_1=1$ و $\underline{s}_2=t$ و $\underline{s}_3=t^2$ و... $\underline{s}_n=t^n$ یک پایه هستند. آنگاه بیان بردار دلخواه $\underline{v}=f(t)$ برحسب این پایه را به دست آورید.

حال دقت کنید که تساویهای (۹) و(۱۰) مطلب بسیار مهمی را القا می‌کنند:

$${}^1\underline{v}\ =\ \begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\ {}^s\underline{v}=\ {}^1_sT\ \ {}^s\underline{v}\qquad (۱۱)$$

$$ {}^{s}\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} {}^{1}\underline{v} = {}^{s}_{1}T \; {}^{1}\underline{v} \qquad (۱۲) $$

یعنی این ماتریس‌ها مبدل دو بیان متفاوت یک بردار از یک مختصات به مختصات دیگرند. دقت کنید که بردارهای $\underline{s}_1$ و $\underline{s}_2$ در مختصات s، بترتیب خواهند بود:

$$ {}^{s}\underline{s}_1 = (1,0)' \quad \text{و} \quad {}^{s}\underline{s}_2 = (0,1)' $$

که انتظار هم داشتیم چرا که این دو بردار، پایهٔ آن مختصات بودند. همین‌طور دقت کنید که بردارهای $\underline{1}_1$ و $\underline{1}_2$ در مختصات s، بترتیب خواهند بود:

$$ {}^{s}\underline{1}_1 = (-1,1)' \quad \text{و} \quad {}^{s}\underline{1}_2 = (2,-1)' $$

از حقایق بالا براحتی دیده می‌شود که چگونه از روی بیان بردارهای پایهٔ یک مختصات در یک مختصات دیگر، می‌توان ماتریس تبدیل از یکی به دیگری را یافت:

$$ {}^{1}_{s}T = [{}^{1}\underline{s}_1 \quad {}^{1}\underline{s}_2] \qquad (۱۳) $$

$$ {}^{s}_{1}T = [{}^{s}\underline{1}_1 \quad {}^{s}\underline{1}_2] \qquad (۱۴) $$

$$ {}^{s}_{1}T = {}^{1}_{s}T^{-1} \qquad (۱۵) $$

روابط (۱۳) و (۱۴) و (۱۵) همواره و تحت هر شرایطی صحیح‌اند و همچنین قابل تعمیم به فضاهای برداری با بعد بیشتر نیز می‌باشند. در ضمن همان‌طور که بالاتر نیز مشاهده شد، توجه کنید که در هر مختصات، بیان بردارهای پایه در همان مختصات، همواره یکسان و بصورت $(1,0)'$ و $(0,1)'$است. طبیعی است، وقتی که فضا، مثلاً سه بعدی باشد اینها خواهند بود: $(1,0,0)'$، $(0,1,0)'$ و $(0,0,1)'$ و به همین ترتیب برای بعدهای بالاتر.

به این ترتیب بیاموزیم و فراموش نکنیم که:

نگرش هر *دستگاه مختصات* به فضای برداری و بردارها، بستگی تنگاتنگ به پایهٔ تشکیل دهندهٔ آن مختصات دارد.

(۱۶) مثال: در ادامهٔ مثال (۸) پایهٔ (مختصات) دیگری را به نام t در نظر می گیریم که بردارهــای پایهٔ آن به صورت $^1\underline{t}_1 = (-1,-1)$ و $^1\underline{t}_2 = (-1,1)$ میباشند. با توجه بــه آنچــه در بــالا آمــوختیم، میخواهیم ماتریس تبدیل از مختصات t به s و معکوس آنرا بدست آوریم.
توجه کنید که به راحتی داریم:

$$ {}^1_tT = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^s_1T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow \quad {}^s_tT = {}^s_1T \; {}^1_tT = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad (۱۷) $$

■

۱-۲ ضرب داخلی دو بردار یا مقدار هم‌راستایی یا هم‌سانی دو بردار

در ادامه یکبار دیگر مسئلهٔ بیان یک بردار در یک دستگاه مختصات(پایه) را دوباره مرور کنیم: پایه ای مشخص شده است و فرض کنید که فضا نیز مثلاً n بعدی است. در واقع با مشخص کردن پایه، ما این فضا را به n زیر فضای مستقل خطی تقسیم نموده ایم. در ضمن برای هر زیــر فضا نیز یک بردار به عنوان واحد سنجش تمام آن زیر فضا معرفی نموده ایم.

حال وقتی می گوییم بیان یک بردار در این مختصات، یعنی یافتن سهم آن بــردار در هــر یک از این زیر فضاها بگونه ای که جمع برداری این سهم‌ها دوباره همان بردار را نتیجه دهد.

حال چنانچه متوجه شده اید، این سهم در هر یک از این زیر فضاها با یک عــدد تعیــین می گردد که این عدد، معرف ضریبی است که از آن بردار واحدِ مربوط به هر یک از زیر فضاها، باید در ساختن این بردار دخالت کند. پس چنانچه توجه دارید، گویا در این تحول یک عملی بین برداری که می‌خواهیم بیانش کنیم، و تک تک بردارهای پایه رخ می‌دهد**!** که نتیجهٔ این عمل هر بار فقط یک **عدد** است.

در ادامه این عمل را که بین بردار مورد مطالعه و هــر یــک از بردارهــای پایــه صــورت میپذیرد (که حاصل آن نیز فقط یک عدد است) را **ضرب داخلی یا ضرب عددی** این دو بــردار در آن مختصات می‌نامیم. مثلاً در مختصات s میتوان نوشت:

$$ {}^{s}\underline{v}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} {}^{s}(\underline{v}\cdot\underline{s}_1)={}^{s}(\underline{s}_1\cdot\underline{v})=a \\ {}^{s}(\underline{v}\cdot\underline{s}_2)={}^{s}(\underline{s}_2\cdot\underline{v})=b \end{cases} \tag{۱} $$

توجه کنید که اگر $\underline{v}$ مثلاً دو برابر گردد، آنگاه فقط این اعداد ضرب در دو خواهند شد. به این ترتیب اگر از همین عبارت بالا برای تعریف ضرب داخلی، شروع کنیم و خاصیت شرکت پذیری با جمع برداری (خطی بودن) را نیز برای آن در نظر بگیریم، خواهیم توانست این عمل را بین هر دو بردار دلخواه نیز تعمیم داده و نتایج و تعابیر جالبی از آن بگیریم.

برای این منظور به شکل زیر عمل کرده و ضرب داخلی دو بردار را در حالت کلی نیز بدست می آوریم:

$$ \begin{aligned} {}^{s}(\underline{v}\cdot\underline{w}) &= {}^{s}(\underline{v}\cdot(c\ \underline{s}_1+d\ \underline{s}_2))={}^{s}(\underline{v}\cdot c\ \underline{s}_1+\underline{v}\cdot d\ \underline{s}_2) \\ &= c\ {}^{s}(\underline{v}\cdot\underline{s}_1)+d\ {}^{s}(\underline{v}\cdot\underline{s}_2)=ca+db \end{aligned} \tag{۲} $$

دقت کنید که به این ترتیب عدد به‌دست آمدهٔ حاصل از ضرب داخلی را بصورت ضرب ماتریسی زیر نیز می‌توان نوشت:

$$ {}^{s}(\underline{v}\cdot\underline{w}) = {}^{s}\underline{v}^{T}\ {}^{s}\underline{w}=[a \quad b]\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}={}^{s}\underline{w}^{T}\ {}^{s}\underline{v}=[c \quad d]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=ac+bd \tag{۳} $$

و به همین شکل به فضاهای با بعد بالاتر نیز قابل تعمیم است.

حال ببینیم این عدد چه تعابیری دارد؟ قبل از هر چیز توجه کنید که عبارتهای بسیار مهم (۱-۱-۱۳) و(۱-۱-۱۴) و (۱) نتایج مهم زیر را خواهند داد:

$$ {}^{t}_{s}T=\left[{}^{t}\underline{s}_1 \quad {}^{t}\underline{s}_2\right]=\begin{bmatrix} {}^{t}(\underline{t}_1\cdot\underline{s}_1) & {}^{t}(\underline{t}_1\cdot\underline{s}_2) \\ {}^{t}(\underline{t}_2\cdot\underline{s}_1) & {}^{t}(\underline{t}_2\cdot\underline{s}_2) \end{bmatrix} \tag{۴} $$

$$ {}^{s}_{t}T=\left[{}^{s}\underline{t}_1 \quad {}^{s}\underline{t}_2\right]=\begin{bmatrix} {}^{s}(\underline{t}_1\cdot\underline{s}_1) & {}^{s}(\underline{t}_2\cdot\underline{s}_1) \\ {}^{s}(\underline{t}_1\cdot\underline{s}_2) & {}^{s}(\underline{t}_2\cdot\underline{s}_2) \end{bmatrix} \tag{۵} $$

توجه دارید که حاصل این ضرب‌های داخلی با هم فرق خواهند داشت چون یک سری در یک دستگاه و سری دیگر در دستگاهی دیگر صورت می پذیرند.(البته ضرب داخلی در هر دستگاهی جابجایی دارد!)

این عدد در واقع مقدار هماهنگی، همسانی یا همراستایی دو بردار را روشن می‌کند. توجه کنید که اگر یکی از آن دو را مثلاً دو برابر کنید، این مقدار نیز دو برابر خواهد شد و این کاملاً مورد انتظار است.

مساله۱-۲ : نشان دهید در فضای چند جمله‌ای‌های درجهٔ n توابع حقیقی متناوب با دورهٔ تناوب $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ ، $\underline{s}_n = e^{j\omega_0 nt}$ها یک پایه را تشکیل می‌دهند. سپس بیان برداری دلخواه از این فضا را بدست آورید.

(۶) طول یا اندازهٔ یک بردار

طول بردارهایی که ضریبی از بردارهای پایه هستند، معلوم است که از روی همان ضریب بدست می آید ولی برای بقیه باید فکری کرد. به همین دلیل در ادامه، طول اقلیدسی را بکار میگیریم که همان جذر حاصلضرب داخلی یک بردار با خودش، است.

$$^{s}\|\underline{v}\| = \sqrt{^{s}\left(\underline{v}\cdot\ \underline{v}\right)} = \sqrt{^{s}\underline{v}^{T}\ ^{s}\underline{v}} = \sqrt{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(۷)}$$

(۸) تعامد

حال اگر حاصلضرب داخلی دو بردار در یک دستگاه مختصات صفر شود می‌گوییم این دو در آن دستگاه بر هم عمودند. متعاقباً، اگر ضرب داخلی یک بردار با هر یک از بردارهای یک زیرفضا صفر باشد، میگوییم این بردار بر آن زیر فضا عمود است.

$$^{s}\left(\underline{v}\cdot\ \underline{w}\right) = \ ^{s}\underline{v}^{T}\ ^{s}\underline{w} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd = 0 \qquad \text{(۹)}$$

توجه کنید که به این ترتیب در هر دستگاه مختصات، بردارهای تشکیل دهندهٔ پایهٔ آن دستگاه دو به دو بر هم عمودند و همه نیز دارای اندازهٔ واحدند. لذا همین جا به دو نکتهٔ بنیادین برخورد می‌کنیم:

دو برداری که در یک دستگاه عمودند می‌توانند در دستگاه دیگری عمود نباشند و بر عکس. اصولاً وضعیت نسبی دو بردار بستگی به دستگاهی دارد که به آنها می نگرد.

برداری که در یک دستگاه اندازهٔ واحد دارد می‌تواند در دستگاه دیگری، اندازهٔ غیر واحد داشته باشد و اصولاً اندازهٔ یک بردار بستگی به دستگاهی دارد که به آن بردار می نگرد.

دو موضوع مطرح شده در بالا به نظر بسیار گیج کننده می‌آیند ولی واقعاً اینطور نیست. اگر شما از میان عدسی به اطراف خود بنگرید دیگر نه طول‌ها را همان مقادیر قبلی می بینید و نه زوایا را !

برای خلاصی از این تفاوت در نگرش، دستگاه‌های هم‌ضرب داخلی را معرفی خواهیم کرد.

(۱۰) دستگاه‌های هم‌ضرب داخلی

دستگاه‌هایی که ضرب داخلی هر دو بردار دلخواه در آن‌ها، نتیجهٔ یکسانی بدهد، دستگاه های نامتغیر با ضرب داخلی یا ***هم‌ضرب داخلی*** می‌نامیم.

در این‌گونه دستگاه‌ها طول‌ها و وضعیت نسبی بردارها یکسان باقی می مانند. بعبارت بهتر اگر طول برداری در یک دستگاه ۲ باشد در تمامی دستگاه‌های هم ضرب داخلی با آن دستگاه نیز ۲ است. به‌طور مشابه اگر دو بردار در آن دستگاه عمود باشند در تمامی دستگاه‌های هم ضرب داخلی با آن دستگاه نیز عمود خواهند بود.

قبلاً دیدیم که در هر دستگاه مختصات، بردارهای تشکیل دهندهٔ پایهٔ آن دستگاه دو به دو بر هم عمودند و همه نیز دارای اندازهٔ واحدند. پس به این ترتیب تمامی دستگاههای هم‌ضرب داخلی با این دستگاه نیز، این دستگاه را متعامد و یکه می بینند. به عبارت بهتر همهٔ این‌ها یکدیگر را متعامد و یکه می‌بینند. به همین دلیل مجموعهٔ دستگاههای هم ضرب داخلی را دستگاههای ***متعامد یکه*** نیز می‌نامند. توجه دارید که این نام‌گذاری در مقابل دستگاه‌های دیگری که در این مجموعه قرار نمی‌گیرند، معنی پیدا می‌کند.

این موضوع، نتیجهٔ بسیار جالب و کلیدی را برای ماتریس تبدیل بین دستگاه‌های متعامد یکه می‌دهد. به عبارتهای(۴) و (۵) یک بار دیگر توجه کرده و این بار فرض کنید که دو

دستگاه متعامد یکه اند. به این ترتیب ضرب داخلی‌ها در هر دو یکسان بوده و میتوان بالا نویسها را برداشته و نوشت:

$$ {}_s^tC = \begin{bmatrix} {}^t\underline{s}_1 & {}^t\underline{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \cdot \underline{s}_1 & \underline{t}_1 \cdot \underline{s}_2 \\ \underline{t}_2 \cdot \underline{s}_1 & \underline{t}_2 \cdot \underline{s}_2 \end{bmatrix} \qquad (۱۱) $$

$$ {}_t^sC = \begin{bmatrix} {}^s\underline{t}_1 & {}^s\underline{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{t}_1 \cdot \underline{s}_1 & \underline{t}_2 \cdot \underline{s}_1 \\ \underline{t}_1 \cdot \underline{s}_2 & \underline{t}_2 \cdot \underline{s}_2 \end{bmatrix} \qquad (۱۲) $$

$$ {}_s^tC = {}_t^sC^T \qquad (۱۳) $$

$$ {}_s^tC^{-1} = {}_s^tC^T \qquad (۱۴) $$

توجه می‌کنید که این ماتریس‌های تبدیل، خاصیت مهم متعامد یکه را خواهند داشت یعنی هر یک از سطرها و ستونها دارای طول واحدند و ثانیاً هر سطر بر دیگر سطرها عمود است و همینطور هر ستون بر دیگر ستونها عمود است که انتظار هم داشتیم.

در ادامه فرض خواهیم کرد که تمامی دستگاه‌هایی که از آن‌ها صحبت می‌کنیم در یک گروه قرار دارند و لذا ماتریس‌های تبدیل بین آنها نیز لزوماً متعامد یکه خواهند بود.

مساله۱-۳ : در یک صفحه، مختصات متعامد یکهٔ t در نظر گرفته شده است. دو بردار که بیانشان در این مختصات عبارتند از ${}^t\underline{s}_1 = [2 \;\; 0]^T$ و ${}^t\underline{s}_2 = [0.5 \;\; 0.5\sqrt{3}]^T$ بعنوان بردارهای مختصات s انتخاب می‌شوند. دو صفحهٔ مختصات مجزا برای t و s در نظر گرفته و بدست آورید که مربع $ABCD$ در مختصات t ، از نگاه مختصات s به چه شکلی دیده می‌شود.

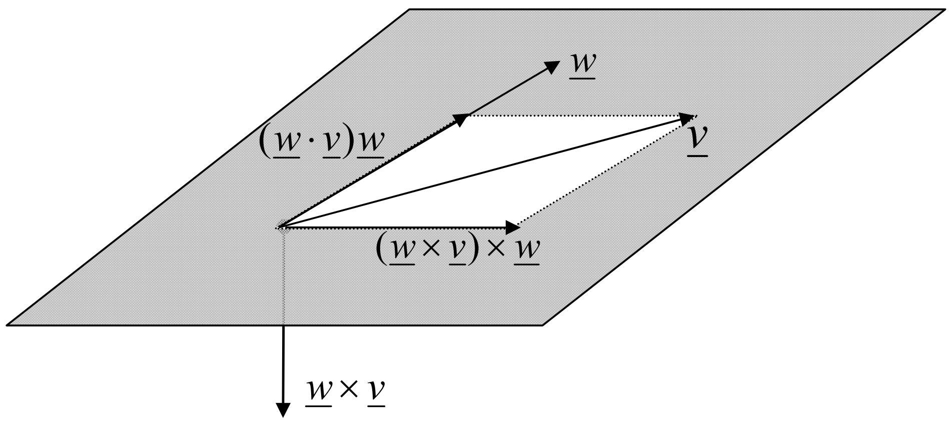
$$ {}^tA = [0 \quad 0]^T \quad {}^tB = [1 \quad 0]^T \quad {}^tC = [1 \quad 1]^T \quad {}^tD = [0 \quad 1]^T $$

۱-۳ ضرب خارجی دو بردار

چنانچه بالاتر نیز مشاهده نمودید ضرب داخلی مقدار روی‌هم افتادگی (هم‌فضایی) دو بردار را می‌دهد. حال برای آنکه مقدار ناهم‌فضایی را نیز به‌گونه‌ای تعیین کنیم، ضرب دیگری بین دو بردار تعریف خواهیم نمود. این بار نتیجه نباید یک عدد باشد بلکه باید به‌گونه‌ای نشان دهد که مفهومش در هیچ‌یک از زیرفضاهای دو بردار نمی‌گنجد. از لحاظ مقدار نیز، هم اندازهٔ

برداری است که از زیرفضای عمود بر بردار $\underline{w}$ باید انتخاب کرد که جمع آن با سهم $\underline{v}$ روی $\underline{w}$ دوباره $\underline{v}$ را نتیجه دهد.

پس نتیجهٔ این ضرب در فضای سه بعدی، برداری است عمود بر هر دو بردار $\underline{v}$ و $\underline{w}$ و اندازهٔ آن نیز مکمل سهم $\underline{v}$ روی $\underline{w}$ برای دوباره ساختن $\underline{v}$ و یا مکمل سهم $\underline{w}$ روی $\underline{v}$ برای دوباره ساختن $\underline{w}$ خواهد بود. شکل زیر که در آن $\underline{w}$ یکه فرض شده موضوع را روشن‌تر می کند.



شکل ۲- نمایش ضرب خارجی دو بردار

$$\Rightarrow \quad \underline{v} = (\underline{w}\cdot\underline{v})\underline{w} + (\underline{w}\times\underline{v})\times\underline{w} \qquad (۱)$$

دقت کنید که رابطهٔ (۱) بسیار زیبا است: قسمت اول آن سهم روی $\underline{w}$ و قسمت دوم آن سهم غیر روی $\underline{w}$ را مشخص می کند. توجه کنید که چنانچه فرض یکه بودن $\underline{w}$ را نیز کنار بگذاریم، داریم:

$$\Rightarrow \quad (\underline{w}\cdot\underline{w})\underline{v} = (\underline{w}\cdot\underline{v})\underline{w} + (\underline{w}\times\underline{v})\times\underline{w} \qquad (۲)$$

این ضرب را **ضرب خارجی** یا **ضرب برداری** می‌نامند.

با استفاده از این نکته که بردار حاصل‌ضرب باید بر هر دو بردار عمود باشد و در ضمن برای بردارهای یکهٔ متعامد باید جواب، یکه باشد، بیان بردار حاصلضرب بر حسب بیان خود بردارها بصورت زیر بدست می آید:

$$ {}^{t}(\underline{w}\times\underline{v})=\begin{bmatrix} w_2\cdot v_3-w_3\cdot v_2 \\ w_3\cdot v_1-w_1\cdot v_3 \\ w_1\cdot v_2-w_2\cdot v_1 \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} \underline{t}_1 & \underline{t}_2 & \underline{t}_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}=\left[{}^{t}\,\underline{w}\times\right]{}^{t}v \quad \textbf{(۳)} $$

به‌خوبی می‌دانید که اندازهٔ ضرب خارجی دو بردار یکه که همـان سـهم نـاهم فضـایی آنهاسـت همواره عددی کوچکتر از واحد است که از تحصیلات متوسطه آنرا سینوس زاویهٔ بین دو بـردار نامیده‌اید.

ماتریسی که برای ضرب خارجی استفاده شد یک ماتریس پاد متقارن است که معمولاً بـا آن نمادی که می‌بینید، نشان داده می‌شود. یادآور می‌شود که ترانهادهٔ چنین ماتریسـی بـا منفـی خودش برابر است.

مساله ۱-۴ : نشان دهید: $[{}^{t}\,\underline{r}\times] = {}^{t}_{s}C\,[{}^{s}\,\underline{r}\times]\;{}^{s}_{t}C$

۱-۴ نمایش دوران

برای بیان تبدیل (دوران) یک دستگاه به دستگاه دیگر از ابزارهای مختلفی استفاده میشود. این ابزارها عبارتند از:

۱- بیان تبدیل با استفاده از ماتریس دوران

۲- بیان تبدیل با استفاده از بردار دوران

۳- بیان تبدیل با استفاده از زوایای اویلر

۴- بیان تبدیل با استفاده از کواترنین‌ها

در قسمت‌های قبل چگونگی به کار بردن ماتریس برای بیان یک تبدیل با استفاده از پایه‌های دو دستگاه نشان داده شد. در ادامه با سایر روش‌ها برای بیان تبدیل(دوران) از یک دستگاه به دستگاه دیگر بیشتر آشنا خواهیم شد.

(۱) زیر فضای نامتغیر، وجود یا عدم وجود؟

یک سؤال اساسی : آیا هنگام تبدیل از یک دستگاه به دستگاه دیگر زیر فضایی هست که تحت این تبدیل، تغییر نکند؟ بعبارت دیگر آیا زیر فضایی هست که بیان آن در هر دو دسـتگاه یکسان باشد؟

پاسخ:

در فضای برداری دو بعدی (برهان خلف): فرض کنیم چنین زیر فضای نامتغیری موجود است و آنرا ۱ بنامید. برای آنکه بهر حال تغییری رخ داده باشد باید زیر فضای دیگری باشد که آن زیر فضا تحت تبدیل تغییر کند و آنرا ۲ بنامید. ۲ مجبور است بر ۱ عمود باشد تا تغییرات در آن موجب تغییر در ۱ نباشد. حال توجه کنید که به این ترتیب این دو زیر فضا، فضای ۲ بعدی را خواهند ساخت و خود با هم دقیقاً یک دستگاه می‌سازند. پس نمی‌شود که دو دستگاه مورد بحث اولیه، در زیر فضای ۲ نسبت به هم تغییر داشته باشند ولی در زیر فضای ۱ تغییر نکنند! ویکسان مانده باشند.

در فضای برداری سه بعدی : باز هم فرض کنیم چنین زیر فضای نامتغیری موجود است و آنرا ۱ نامیده و ضمناً یک بعدی بگیرید. برای آنکه بهر حال تغییری رخ داده باشد باید زیر فضای دیگری باشد که تحت تبدیل تغییر کند و آنرا ۲ بنامید. ۲ مجبور است بر ۱ عمود باشد تا تغییرات در آن موجب تغییر در ۱ نباشد. حال توجه کنید که این بار زیر فضای ۲ باید دو بعدی باشد تا به این ترتیب این دو زیر فضا، فضای ۳ بعدی را بسازند. حال چون زیر فضای۲ ، دو بعدی است، در آن می‌توان بینهایت دستگاه در نظر گرفت که آن زیر فضا را بسازند. پس این بار ممکن می‌شود که دو دستگاه مفروض اولیه، در زیر فضای ۲ با هم متفاوت باشند ولی در زیر فضای ۱ نسبت به هم تغییر نکنند! و یکسان باشند.

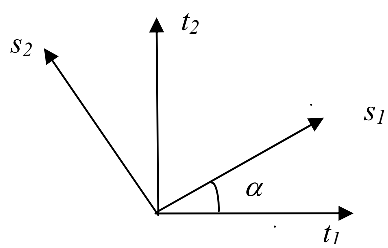
(۲) تعبیر هندسی زیر فضای نامتغیر (محور دوران)

در فضای سه بعدی همواره امتدادی وجود دارد که بردارهایی که در آن امتداد هستند، تحت تبدیل از یک دستگاه به دیگری تغییر نمی‌کنند. این امتداد در هندسه، همان محور دوران از یک دستگاه به دیگری است. به عبارت دیگر همواره یک امتدادی وجود دارد که اگر یکی از دو دستگاه را حول آن دوران دهیم به دیگری می‌رسیم. به همین دلیل به ماتریس تبدیل بین دستگاه‌های متعامد یکه، ماتریس دوران می‌گویند.

توجه دارید که برای دوران در صفحه(فضای دو بعدی) هیچ محور دورانی در همان فضا وجود نخواهد داشت و به ناچار این محور دوران همان زیر فضایی است که به صفحه عمود است و با آن فضای سه بعدی را تشکیل می‌دهد.

(۳) تعبیر جبری زیر فضای نامتغیر (محور دوران)

ابتدا توجه می‌کنیم که ضرب داخلی دو بردار یکه همواره کوچکتر از واحد است (مگر دو بردار یکی باشند، که در این صورت مساوی با واحد خواهد بود)، که این عدد کوچکتر از واحد را از همان تحصیلات متوسطه کسینوس زاویهٔ بین دو بردار نامیده اید. لذا ماتریس تبدیل که در هندسه آنرا ماتریس دوران می‌گویند، تشکیل شده از یک سری کسینوس‌های زوایای بین بردارهای یکهٔ یک دستگاه با دستگاه دیگر. یعنی (۱-۲-۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:



شکل ۳ - نمایش هندسی دوران

$$
{}_s^tC = \begin{bmatrix} {}^t\underline{s}_1 & {}^t\underline{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos(\underline{t}_1, \underline{s}_1) & Cos(\underline{t}_1, \underline{s}_2) \\ Cos(\underline{t}_2, \underline{s}_1) & Cos(\underline{t}_2, \underline{s}_2) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} Cos(\alpha) & Cos(\pi/2+\alpha) \\ Cos(\pi/2-\alpha) & Cos(\alpha) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha \\ S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \qquad (۴)
$$

به همین دلیل اعضای ماتریس دوران را کسینوس‌های هادی[1] نیز می‌گویند.

[1] Directional Cosine

توجه کنید که با دیدگاه معکوس برای هر ماتریس ۲×۲ ی متعامد یکه همـواره مـی‌تـوان یـک زاویه یافت که نتیجهٔ فوق را بدهد.

توجه داریم که ماتریس (۴) دارای دو مقدار ویژهٔ مختلط یکهٔ مزدوج است و لذا هیچ زیر فضای نامتغیر برای تبدیل متناظر آن نمی‌توان یافت. اما می‌توان نشان داد که هر ماتریس ۳×۳ی متعامد یکه همواره دو مقدار ویژهٔ مختلط یکهٔ مزدوج دارد و همواره سـومین مقـدار ویـژهٔ آن ۱ است که بردار ویژهٔ نظیر مقدار ویژهٔ ۱ همان زیر فضای نامتغیر را مشخص می‌کند و یا به تعبیـر هندسی همان محور دوران بین دو دستگاه را مشخص می‌سازد.

توجه کنید که برای این بردار ویژه داریم:

$$ {}^{t}\underline{v} = {}^{t}_{s}C \; {}^{s}\underline{v} \; = \; {}^{s}\underline{v} \tag{۵} $$

یعنی تنها امتدادی است که تحت تبدیل عوض نمی‌شود و بیانش در دو مختصات یکسـان اسـت. البته توجه دارید که این امتداد برای ماتریس ترانهاده نیز به همین شکل صدق می‌کند.

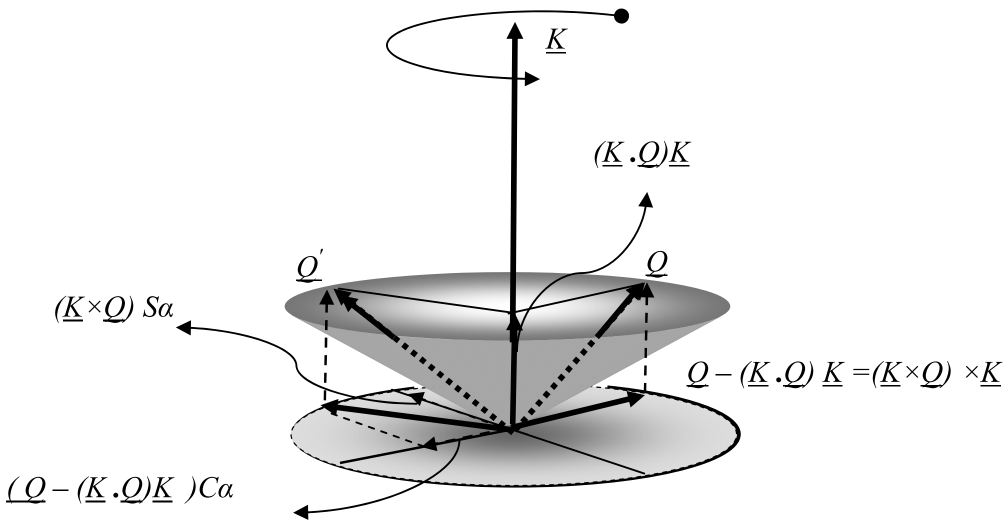
(۶) رفتن از تعبیر هندسی دوران به ماتریس دوران و برعکس

فرض کنید t را تحت بردار دوران یکهٔ $\underline{K}$ باندازهٔ زاویهٔ α بصورت راستگرد دوران داده و به دستگاه s رسیده ایم. یادآوری میگردد که تعریف زاویه در فضا به همـان تعریـف زاویـه در صفحه باز میگردد، به این ترتیب که زاویه را در صفحهٔ عمود بر بردار $\underline{K}$ و جهت زاویه در ایـن صفحه را نیز همین بردار تعیین میکند. همچنین از یادآوری تعریف اصطلاح "دوران حـول یـک بردار" نیز صرف نظر گردیده و به همان تعاریفی که قبلاً خواننده دیده است، تکیه شـده اسـت. حال میخواهیم ماتریس تبدیل را بر حسب دوران یعنی، سه مؤلفهٔ $\underline{K}$ و زاویهٔ α ، بدسـت آوریـم. برای این منظور ابتدا مسئلهٔ زیر را حل می‌کنیم:

بردار $\underline{Q}$ را تحت بردار یکهٔ $\underline{K}$ باندازهٔ زاویهٔ α بصورت راستگرد دوران مـی‌دهـیم. بـردار جدیـد بدست آمده را Q' می‌نامیم. ثابت کنید رابطهٔ زیر همواره برقرار است.

$$ \underline{Q'} = \underline{Q}\, C\alpha + (\underline{K} \times \underline{Q}) S\alpha + (1 - C\alpha)(\underline{K} \cdot \underline{Q})\underline{K} \tag{۷} $$

در شکل ملاحظه کنید که ابتدا بردار Q می‌تواند به دو مؤلفهٔ $(\underline{K}\cdot\underline{Q})\underline{K}$, $\underline{Q}-(\underline{K}\cdot\underline{Q})\underline{K}$ که اولی همان قسمت است که تحت دوران تغییر نخواهد نمود و لذا بردار دوران یافته نیز آن را شامل خواهد بود، به‌علاوهٔ دوران یافتهٔ قسمت دوم. اما با توجه به تعریف × اندازهٔ قسمت دوم با اندازهٔ بردار $\underline{K}\times\underline{Q}$ برابر است.



شکل ۴ - نمایش مؤلفه‌های بردار دوران یافته بر حسب بردار اصلی و بردار دوران

در ادامه کافیست دوران یافتهٔ قسمت دوم را نیز بیابیم. حال توجه کنید که این قسمت پس از دوران در صفحهٔ دوران، دارای دو مؤلفه، یکی در راستای همان مؤلفهٔ قبل از دوران و یکی در راستای عمود بر آن ولی در همان صفحهٔ دوران خواهد بود. این آخری همان راستای $\underline{K}\times\underline{Q}$ می‌باشد. پس از دوران باندازهٔ زاویهٔ α بصورت راستگرد، سهم $C\alpha$ ی آن برای اولی و سهم $S\alpha$ ی آن برای دومی نصیب خواهد شد و لذا می‌توان آنها را نیز بصورت زیر نوشت

$$\left(\underline{Q}-(\underline{K}\cdot\underline{Q})\underline{K}\right)C\alpha \qquad (۸)$$

$$(\underline{K}\times\underline{Q})S\alpha \qquad (۹)$$

حال کافیست دو عبارت (۸) و (۹) و بردار بیانگر زیرفضای نامتغیر را با هم جمع کنیم که همان عبارت (۷) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\underline{Q}' &= (\underline{K}\cdot\underline{Q})\underline{K} + (\underline{Q} - (\underline{K}\cdot\underline{Q})\underline{K})\, C\alpha + (\underline{K}\times\underline{Q})S\alpha \\ &= (\underline{K}\cdot\underline{Q})\underline{K}(1 - C\alpha) + \underline{Q}\, C\alpha + (\underline{K}\times\underline{Q})S\alpha\end{aligned}$$

■

در ادامه از حلی که انجام دادیم استفادهٔ فراوانی خواهیم نمود. فوراً توجه می‌کنیم که برای یک بردار یکهٔ $\underline{t}_1$ که پس از این دوران به بردار یکهٔ $\underline{s}_1$ رسیده است، داریم:

$$\begin{aligned}{}^t\underline{s}_1 &= {}^t\underline{t}_1\, C\alpha + ({}^{s,t}\underline{K}\times {}^t\underline{t}_1)S\alpha + (1 - C\alpha)({}^{s,t}\underline{K}\cdot {}^t\underline{t}_1)\ {}^{s,t}\underline{K} \\ &= \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} C\alpha + \left(\begin{bmatrix}0 & -k_3 & k_2\\ k_3 & 0 & -k_1\\ -k_2 & k_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) S\alpha + (1 - C\alpha)\left(\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad {}^t\underline{s}_1 = \begin{bmatrix}C\alpha + (1 - C\alpha)k_1^2\\ k_3 S\alpha + (1 - C\alpha)k_1 k_2\\ -k_2 S\alpha + (1 - C\alpha)k_1 k_3\end{bmatrix} \qquad \textbf{(۱۰)}$$

به این ترتیب فوراً برای ماتریس دوران بدست می آید:

$$\begin{aligned}{}^t_sC &= \begin{bmatrix}{}^t\underline{s}_1 & {}^t\underline{s}_2 & {}^t\underline{s}_3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}C\alpha + (1 - C\alpha)k_1^2 & -k_3 S\alpha + (1 - C\alpha)k_1 k_2 & k_2 S\alpha + (1 - C\alpha)k_1 k_3\\ k_3 S\alpha + (1 - C\alpha)k_1 k_2 & C\alpha + (1 - C\alpha)k_2^2 & -k_1 S\alpha + (1 - C\alpha)k_2 k_3\\ -k_2 S\alpha + (1 - C\alpha)k_1 k_3 & k_1 S\alpha + (1 - C\alpha)k_2 k_3 & C\alpha + (1 - C\alpha)k_3^2\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad \textbf{(۱۱)}$$

(۱۱) بیان ماتریس دوران به کمک بردار دوران است.

همین جا نکتهٔ مهم دیگری را نیز باید بیاموزیم و آن اینکه ماتریس تبدیل یا دوران، تعبیر دیگری نیز دارد. فرض کنید بردار $\underline{v}$ را با دورانی که همان ماتریس دوران در بر دارد، دوران بدهیم و به بردار $\underline{v}_C$ برسیم، آنگاه بیان این بردار جدید با بیان بردار اول دارای رابطهٔ زیر است:

$${}^t\underline{v}_C = {}^t\underline{v}_{(K,\alpha)} = {}^t_sC\ {}^t\underline{v} = C_K(\alpha)\ {}^t\underline{v} \qquad \textbf{(۱۲)}$$

$${}^{t}\underline{v} = {}_{t}^{s}C \;\; {}^{t}\underline{v}_{(K,\alpha)} = C_K(-\alpha) \;\; {}^{t}\underline{v}_{(K,\alpha)} \qquad \textbf{(۱۳)}$$

فراموش نکنید که چون $\underline{K}$ همان پایهٔ زیر فضای نامتغیر است، همواره داریم:

$${}^{t}\underline{K} \;=\; {}^{s}\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(۱۴)}$$

در ادامه توجه می‌کنیم که هر دوران شامل یک بردار یکه و یک زاویه است که مجموعاً سه پارامتر خواهند بود. به این ترتیب روشن است که هر چند ماتریس دوران دارای ۹ عضو است ولی اینها از یکدیگر مستقل نمی باشند. آیا می‌توانید ۶ رابطه ای که این ۹ عضو را به هم مربــوط می‌کند بگویید؟

عملیات معکوس (۱۱) به‌صورت زیر می‌تواند اجرا گردد:

$$C_K(\alpha) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{c_{11}+c_{22}+c_{33}-1}{2}\right) \qquad (1)$$

$$\underline{K} = \frac{1}{2S_\alpha}\begin{bmatrix} c_{32}-c_{23} \\ c_{13}-c_{31} \\ c_{21}-c_{12} \end{bmatrix} \qquad (2) \qquad \textbf{(۱۵)}$$

همواره برای زاویه می‌توان دو مقدار یافت که هر دو نیز درست است ولی بردار دوران نظیر هــر یک با دیگری یک منفی اختلاف خواهد داشت. بعبارت دیگر دقت کنید که :

$$C_K(\alpha) = C_{-K}(-\alpha) = C_{-K}(2\pi-\alpha) \qquad \textbf{(۱۶)}$$

(۱۷) کواترنین‌ها

برای اینکه همواره بطور الگوریتمی فقط یک زاویه بدست آید، پارامتر ۴ام اویلر یا ۴امین کواترنین بصورت زیر تعریف شده است:

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{\alpha}{2} \qquad \textbf{(۱۷)}$$

به این ترتیب بازای دو زاویۀ دوران مثبت متفاوت α و 2π-α، این پارامتر نیز فرق می‌کنـد چـرا که:

$$\cos\frac{\alpha}{2} \neq \cos\frac{2\pi-\alpha}{2} = \cos(\pi-\frac{\alpha}{2}) = -\cos\frac{\alpha}{2}$$

کواترنین‌های دیگر نیز به‌صورت زیر تعریف شده اند:

$$\varepsilon_1 = k_1 \sin\frac{\alpha}{2} \quad (1) \quad , \quad \varepsilon_2 = k_2 \sin\frac{\alpha}{2} \quad (2) \quad , \quad \varepsilon_3 = k_3 \sin\frac{\alpha}{2} \quad (3) \qquad \textbf{(۱۸)}$$

که به این ترتیب همواره خواهیم داشت:

$$\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_3{}^2 + \varepsilon_4{}^2 = 1 \quad , \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4\end{bmatrix}^T \quad , \quad \underline{\varepsilon}^T\,\underline{\varepsilon} = 1 \qquad \textbf{(۱۹)}$$

دقت کنید که با این تعاریف و جاگذاری در(۱۱) ، به‌راحتی می‌توانید نشان دهید:

$$C_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1-2\varepsilon_2{}^2-2\varepsilon_3{}^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1{}^2-2\varepsilon_3{}^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2\varepsilon_1{}^2-2\varepsilon_2{}^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(۲۰)}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{1+c_{11}+c_{22}+c_{33}} \quad (1), \\ \varepsilon_1 &= \frac{c_{32}-c_{23}}{4\varepsilon_4} \quad (2), \\ \varepsilon_2 &= \frac{c_{31}-c_{13}}{4\varepsilon_4} \quad (3), \\ \varepsilon_3 &= \frac{c_{21}-c_{12}}{4\varepsilon_4} \quad (4) \end{aligned} \qquad \textbf{(۲۱)}$$

مساله۱-۵ : مستقیماً نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس متعامد یکه، یک ماتریس متعامد یکه خواهد بود. بعبارتی حاصلضرب دو ماتریس دوران یک ماتریس دوران است.

مساله۱-۶ : ابتدا ماتریس زیر را بگونه ای کامل کنید که یک ماتریس دوران بین دستگاه‌های راستگرد نتیجه گردد و سپس تمامی زوایای بین بردارهای یکهٔ دو دستگاه را بـرای حالتیکـه c_{21} نیز 1/2 است، بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \\ & 1/2 & \\ & & \end{bmatrix}$$

مساله۱-۷ : در کلاس رابطه ای برای ارتباط بین یک بردار $\underline{Q}$ و دوران یافته اش $\underline{Q}'$ ، ارائه شـد. سعی کنید آنرا به شکل دیگری بدست آورید تا بتوانید نشان دهید بـرای مـاتریس دوران حـول بردار یکهٔ $\underline{K}$ و به مقدار α میتوان رابطهٔ زیر را نوشت:

$$ {}_s^tC = I + (1-c_\alpha)\left[\underline{K}\times\right]^2 + s_\alpha\left[\underline{K}\times\right] $$

راهنمایی: توجه کنید که

$$ Q-(K\cdot Q)K = (K\times Q)\times K $$

مساله۱-۸ :نشان دهید خاصیت جمع برداری برای بردار دوران صادق نیست. به ایـن معنـی کـه چنانچه $\underline{Q}_1$ دوران یافتهٔ $\underline{Q}$ تحت بردار دوران $\underline{K}_1$ باشد و $\underline{Q}_2$ دوران یافتهٔ $\underline{Q}$ تحـت بـردار دوران $\underline{K}_2$ آنگاه $\underline{Q}_1+\underline{Q}_2$ دوران یافتهٔ $\underline{Q}$ تحت $\underline{K}_1+\underline{K}_2$ نخواهد بود.

مساله۱-۹ : نشان دهید همواره داریم:

$$ (\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})(\underline{b}\cdot\underline{c}) $$

مساله۱-۱۰ : از روی کواترنینها، Pها را بصورت $P_j = 2\varepsilon_j$ تعریف کنید و نشان دهید

$$ P_j^2 = 1 + 2\,c_{jj} - c_{44} \qquad , \qquad c_{44} =: Trace\left\{{}_s^tC\right\} = c_{11} + c_{22} + c_{33} $$

$$ \begin{aligned} P_4P_1 &= c_{32} - c_{23} \\ P_4P_2 &= c_{13} - c_{31} \\ P_4P_3 &= c_{21} - c_{12} \\ P_1P_2 &= c_{21} + c_{12} \\ P_1P_3 &= c_{13} + c_{31} \\ P_2P_3 &= c_{32} + c_{23} \end{aligned} $$

برای محاسبهٔ کواترنینها از روی ماتریس دوران، آیا روش بالا بهتر نیست؟ چرا؟

مساله۱-۱۱ : دو بردار مساوی در فضای سه بعدی در نظر بگیرید. کلیه دورانهایی را در نظر بگیرید که منجر به دوران یکی از این دو، روی دیگری شود. مکان هندسی کلیهٔ محور دورانهای ممکن چیست؟ با توجه به این موضوع، تعبیر هندسی محور دوران بین دو دستگاه، چه خواهد بود؟ حال با توجه به این تعبیر استدلال کنید که محور دوران بین دو دستگاه، هم امتداد بردارهای زیر است:

$$(\underline{t}_1-\underline{s}_1)\times(\underline{t}_2-\underline{s}_2) \qquad , \qquad (\underline{t}_1-\underline{s}_1)\times(\underline{t}_3-\underline{s}_3) \qquad , \qquad (\underline{t}_2-\underline{s}_2)\times(\underline{t}_3-\underline{s}_3)$$

چگونه می‌توانید نشان دهید که این بردارها همگی هم امتدادند.

مساله۱-۱۲ : در همان موضوع سؤال قبل نشان دهید زاویهٔ دوران نظیر هر محور دوران از رابطهٔ زیر قابل حصول است: α زاویهٔ دوران، η زاویهٔ بین دو بردار و θ زاویهٔ بین بردار و محور دوران است.

$$c_\eta - c_\theta^2 = c_\alpha s_\theta^2 \qquad \Rightarrow \qquad s_{\eta/2} = s_{\alpha/2}\ \ s_\theta$$

دوباره به راهنمایی مساله ۱-۷ توجه کنید.

برای حالتهای خاص $\theta = \pi/2$ و $\theta = \eta/2$ ، α را یافته و تعبیر هندسی هر یک را شرح دهید.

بیان ماتریس دوران با استفاده از زوایای اویلر پس از آن‌که با ترکیب دوران‌ها به اندازهٔ کافی آشنا شدیم خواهد آمد.

۱-۵ دورانهای ساده و ترکیب آنها

یکی دیگر از روش‌های بیان تبدیل (دوران) یک دستگاه به دستگاه دیگر استفاده از ترکیب دوران‌های ساده است. چون در بررسی‌های جلوتر از ترکیب دوران‌ها و تجزیهٔ یک دوران به دوران‌های ساده‌تر استفاده خواهیم کرد، لذا به مطالعهٔ آن‌ها خواهیم پرداخت.

(۱) تعریف دوران ساده

هرگاه محور دوران بین دو دستگاه، یکی از بردارهای پایه باشد، آنگاه، محور مشترک، خود معرف زیر فضای نامتغیر بوده و دوران را ساده می‌نامیم.

بازای اینکه کدامیک از محورهای اصلی بین دو دستگاه مشترک باشند، مـاتریس دوران مربوط، با استفاده از (۱-۴-۱۱) ، یکی از موارد زیر خواهد بود:

$$C_1(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & C\alpha & -S\alpha\\ 0 & S\alpha & C\alpha\end{bmatrix} \tag{۲}$$

$$C_2(\alpha)=\begin{bmatrix}C\alpha & 0 & S\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -S\alpha & 0 & C\alpha\end{bmatrix} \tag{۳}$$

$$C_3(\alpha)=\begin{bmatrix}C\alpha & -S\alpha & 0\\ S\alpha & C\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{۴}$$

برای ایجاد تناظر با نمادِ ${}_s^tC$ همواره فرض می‌کنیم s نسبت به t حول محور مربوطه دورانی یافته است.

(۵) ترکیب دوران‌های حول محورهای ثابت

حال فرض کنید از دستگاه t شروع کرده و ابتدا حول محور۱ آن دورانی بانـدازهٔ γ داده و به دستگاه A رسیده ایم. سپس حول محور۲ی همان دستگاه t دورانی باندازهٔ β می‌دهـیم و بـه دستگاه B می‌رسیم. نهایتاً حول محور۳ی همان دستگاه t دورانی بانـدازهٔ α داده و بـه دسـتگاه s رسیده ایم. حال می‌توان با ترکیبـی از دورانهـای (۲) و (۳) و (۴) بـه مـاتریس دوران بـین دو دستگاه t و s دست یافت.

برای این منظور ابتدا توجه می‌کنیم که از (۱-۴-۱۲) داریم:

$${}^t\underline{v}_{(1,\gamma)} = C_1(\gamma)\ {}^t\underline{v} \tag{۶}$$

$${}^t\underline{v}_{(1,\gamma;2,\beta)} = C_2(\beta)\ {}^t\underline{v}_{(1,\gamma)} \tag{۷}$$

$${}^t\underline{v}_{(1,\gamma;2,\beta;3,\alpha)} = C_3(\alpha)\ {}^t\underline{v}_{(1,\gamma;2,\beta)} \tag{۸}$$

$$(۶)و(۷)و(۸) \Rightarrow \qquad {}^t\underline{v}_{(1,\gamma;2,\beta;3,\alpha)} = C_3(\alpha)\,C_2(\beta)\,C_1(\gamma)\ {}^t\underline{v} = {}_s^tC\ {}^t\underline{v} \tag{۹}$$

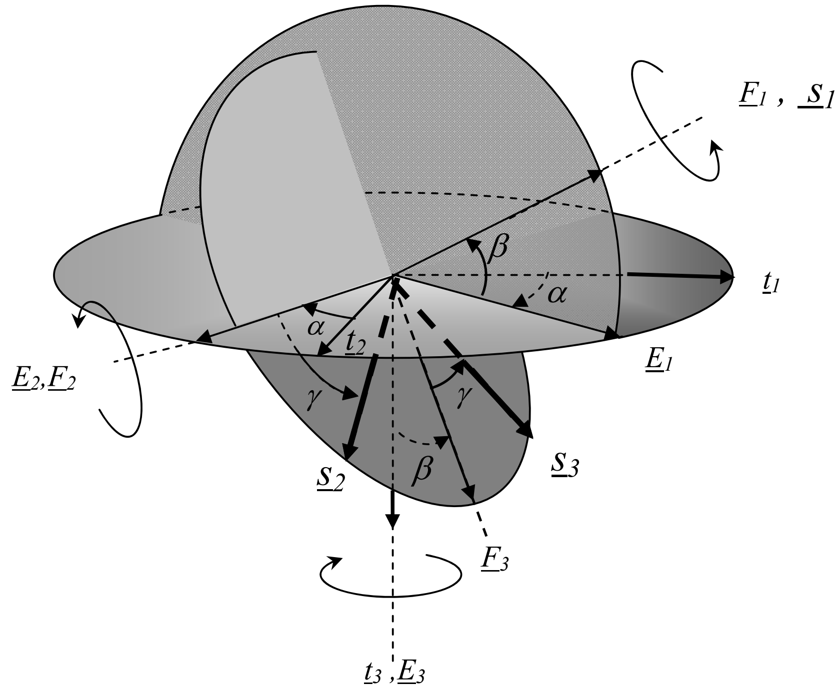
$$\Rightarrow \quad {}_{s}^{t}C = C_3(\alpha)\, C_2(\beta)\, C_1(\gamma) = {}_{s}^{t}C_{123}(\gamma, \beta, \alpha) \qquad (۱۰)$$

توجه می‌کنید که دوران بین دو دستگاه به سه دوران سادهٔ متوالی که البته ترتیب نیز اهمیت دارد، تجزیه شده است.

واقعیت این است که این تجزیه به دورانهای ساده یکتا نبوده و کافیست ترتیب را بهم زنید یا بعضی محورها را یک در میان تکرار کنید، تا روابط و دسته زوایای معادل دیگری را بدست آورید. به این ترتیب می‌توان ۱۲ نوع متفاوت از این دسته زوایا را داشته و نهایتاً ماتریس دوران مربوط را یافت.

(۱۱) ترکیب دوران‌های حول محورهای گذار

به شکل توجه کنید. حال فرض کنید از دستگاه t شروع کرده و ابتدا حول محور۳ی آن دورانی باندازهٔ α داده و به دستگاه E رسیده ایم. سپس حول محور۲ی دستگاه E دورانی باندازهٔ β میدهیم و به دستگاه F میرسیم. نهایتاً حول محور۱ دستگاه F دورانی باندازهٔ γ داده و به دستگاه s رسیده ایم.



شکل ۵ - نمایش زوایای اویلر

حال می‌توان دوباره با ترکیبی از دورانهای (۲)،(۳) و (۴) به ماتریس دوران بین دو دستگاه t و s دست یافت. برای این منظور ابتدا توجه می‌کنیم که از (۱-۱-۱۱) یا (۱-۱-۱۲) داریم:

$$^{F}\underline{v} = C_1(\gamma)\ {}^{s}\underline{v} \tag{۱۲}$$

$$^{E}\underline{v} = C_2(\beta)\ {}^{F}\underline{v} \tag{۱۳}$$

$$^{t}\underline{v} = C_3(\alpha)\ {}^{E}\underline{v} \tag{۱۴}$$

$$\Rightarrow {}^{t}\underline{v} = C_3(\alpha)\, C_2(\beta)\, C_1(\gamma)\ {}^{s}\underline{v}\ =\ {}^{t}_{s}C\ {}^{s}\underline{v} \tag{۱۵}$$

(۱۲)و(۱۳)و(۱۴)

$$\Rightarrow\quad {}^{t}_{s}C_{3'2'1'}(\alpha,\beta,\gamma) := C_3(\alpha)\, C_2(\beta)\, C_1(\gamma) = {}^{t}_{s}C \tag{۱۶}$$

توجه می کنید که در اینجا نیز دوران بین دو دستگاه به سه دوران سادهٔ متوالی کــه البتــه ترتیب نیز اهمیت دارد، تجزیه شده است. در اینجا دوران حول محورهای دستگاههای گذر اتفاق می افتد و نه دستگاه ثابت t و واقعیت این است که باز هم این تجزیه به دورانهــای ســاده، یکتــا نبوده و کافیست ترتیب را بهم زنید یا بعضی محورها را یک در میان تکرار کنیــد، تــا روابــط و دسته زوایای معادل دیگری را بدست آورید. به این شکل میتوان ۱۲ نوع متفــاوت از ایــن دســته زوایا و نهایتاً ماتریس دوران مربوط را یافت.

توجه کنید که از همین عملیات بالا دیده می‌شود که بعضی از ایــن ۱۲ دســته بــا آن ۱۲ دستهٔ قبلی نتایج مشابهی برای دسته زوایا نتیجه خواهند داد. بعنوان نمونه از همین بالا دیده می‌شود که:

$$ {}_s^tC = {}_s^tC_{3'2'1'}(\alpha,\beta,\gamma) = {}_s^tC_{123}(\gamma,\beta,\alpha) = C_3(\alpha)\,C_2(\beta)\,C_1(\gamma) \tag{۱۷} $$

$$ \begin{aligned} {}_s^tC &= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\alpha\,C\beta & C\alpha\,S\beta\,S\gamma - S\alpha\,C\gamma & C\alpha\,S\beta\,C\gamma + S\alpha\,S\gamma \\ S\alpha\,C\beta & S\alpha\,S\beta\,S\gamma + C\alpha\,C\gamma & S\alpha\,S\beta\,C\gamma - C\alpha\,S\gamma \\ -S\beta & C\beta\,S\gamma & C\beta\,C\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۸} $$

هر چند که تعبیر α ، β و γ در یکی با دیگری متفاوت است.

مشاهده می کنید که تعبیر دوران هندسی در صفحه (دو بعدی) فقط یکی است کــه از(۱-۴-۴) حاصل می‌شود ولی در فضا (سه بعدی) می‌تواند تعداد زیادی تعبیر پیدا کند.

زوایای دوران حول محورهای گذر را اصطلاحاً ***زوایای اویلر*** می نامند. ایــن ســه زاویــه، بویژه، بگونه ای که در مثال بالا آمد، متداولترین دسته زوایای معرف از دستگاه بدنهٔ یک ناو بــه یک دستگاه مرجع می‌باشند و لذا در محیطهای مختلف اسامی مختلفی نیز یافته‌اند. عموماً نمادهای ψ ، Θ و Φ بترتیب بجای نمادهای کلی α ، β و γ که ما در بالا استفاده کردیم، بکار می‌روند. ψ را زاویهٔ گردش *Yaw angle* و چنانچه نسبت به شمال باشد زاویهٔ سمت یا *Azimuth* گوینــد. Θ را زاویهٔ خم(تاب) *Pitch angle* و چنانچه نسبت بــه محــور ارتفــاع باشــد، زاویــهٔ فــراز یــا

Elevation گویند. Φ را زاویهٔ چرخش *Roll angle* و چنانچه نسبت به افق جانبی باشد زاویهٔ کجی یا *Bank* می‌گویند. برای این مورد خاص می‌توان روابط زیر را نیز براحتی بدست آورد:

$$\Psi = \tan^{-1}\frac{c_{21}}{c_{11}} \quad (1), \qquad \Theta = -\sin^{-1} c_{31} \quad (2), \qquad \Phi = \tan^{-1}\frac{c_{32}}{c_{33}} \quad (3)$$

$$ {}_s^tC = \begin{bmatrix} C_\Psi C_\Theta & C_\Psi S_\Theta S_\Phi - S_\Psi C_\Phi & C_\Psi S_\Theta C_\Phi + S_\Psi S_\Phi \\ S_\Psi C_\Theta & S_\Psi S_\Theta S_\Phi + C_\Psi C_\Phi & S_\Psi S_\Theta C_\Phi - C_\Psi S_\Phi \\ -S_\Theta & C_\Theta S_\Phi & C_\Theta C_\Phi \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

توجه کنید که برای $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ماتریس دوران فوق بصورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} 0 & C_\Psi S_\Phi - S_\Psi C_\Phi & C_\Psi C_\Phi + S_\Psi S_\Phi \\ 0 & S_\Psi S_\Phi + C_\Psi C_\Phi & S_\Psi C_\Phi - C_\Psi S_\Phi \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{\Phi-\Psi} & C_{\Phi-\Psi} \\ 0 & C_{\Phi-\Psi} & -S_{\Phi-\Psi} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

و نسبت به ψ و Φ تکین شده و بینهایت انتخاب، می‌تواند صورت گیرد.

مساله۱-۱۳: همانطور که گفتیم برای دوران حول محورهای ثابت و گذار هر کدام ۱۲ نوع مختلف دسته زاویه می‌توان معرفی کرد که در مجموع ۲۴ دسته زاویه خواهد شد. سعی کنید این دسته زوایا را در ذهن تصور کرده و برای چند نمونه از آن‌ها شکل مناسب رسم کنید.

مساله۱-۱۴: دو دستگاه t و s در ابتدا بر هم منطبقند. دستگاه s را ابتدا حول محور۳ دوران می‌دهیم تا محور۱ آن بر محور۲ی t بیافتد. سپس حول همین محور اخیر دوباره s را دوران می‌دهیم بگونه ای که محور۲ی آن بر محور۳ی t منطبق گردد.

الف- ماتریس دوران بین دو دستگاه را به دو روش حول محورهای ثابت و حول محورهای گذر بدست آورید و نشان دهید که هر دو به یک جواب می‌رسد.

ب- در حالیکه تعبیر هندسی آموخته شده در مسالهٔ ۱-۱۰ را نیز در شکل مناسبی نمایش می‌دهید بردار دوران را در هر دو مرحلهٔ دوران مشخص کنید.

ج- همان کاری که در **ب** برای تک تک دوران‌ها انجام دادید را برای دوران کلی از t به s نیز انجام داده و بردار دوران نهایی را نیز در شکل مناسب دیگری نشان دهید.

د- آیا بردار دوران خاصیت برداری دارد؟ توضیح دهید.

ه- مستقیماً از روی ماتریس دوران کواترنینها را محاسبه کرده و سپس محور و زاویـهٔ دوران را تعیین کنید.

مساله۱-۱۵: برای همان ماتریس دوران مسالهٔ ۱-۶ :

الف- کواترنین‌ها را محاسبه کرده و سپس محور و زاویهٔ دوران را تعیین کنیـد(بـردار دوران را تعیین کنید).

ب- زوایای معروف Ψ ، Θ و Φ را بدست آورده و شکل مناسبی که دو دستگاه و این زوایـا در آن نشان داده شوند، رسم کنید.

مساله ۱-۱۶: در تشریح زوایای اویلر که در متن آمد، از دستگاه t به s رفتیم. حال شـما سـعی کنید معکوس این مسیر را طی نموده و حس مناسبی پیدا کنید. خود را در وسیله ای مانند هواپیما نشسته در نظر بگیرید سپس سعی کنید برای هر یک از زوایای اویلر خودتان نسبت بـه دسـتگاه جغرافیایی روی زمین تعبیری بیابید.

۲- معادلات حالت وضعیت نسبی دستگاه‌ها

در ادامه، تحول حالت وضعیت یک دستگاه را مد نظر قرار می‌دهیم. متغیر مستقلی را در نظر گرفته و ***تغییرات وضعیت*** را نسبت به تغییر آن بدست می‌آوریم. طبق معمول نیز این متغیر مستقل را زمان می‌گیریم. پس به عبارتی می‌خواهیم ببینیم، تغییر وضعیت یک دستگاه نسبت به زمان چگونه قابل ارزیابی و بیان است.

ابتدا توجه می‌کنیم که قبلاً، بیان وضعیت نسبی دو دستگاه را به طرق مختلف دیده‌ایم. ماتریس دوران، بردار دوران، کواترنین‌ها و یا زوایای اویلر هر یک بگونه ای این اختلاف دیدگاه و اصطلاحاً اختلاف وضعیت را به نمایش می‌گذارند. حال اگر هر یک از این تعابیر را بیانگر حالت فعلی این تفاوت وضعیت بگیریم، می‌خواهیم بدانیم که تحول این حالت نسبت به زمان چگونه قابل بیان است.

مثلاً اگر ماتریس دوران بین دو دستگاه را بیانگر تفاوت وضعیت دو دستگاه بگیرید، می‌خواهیم بدانیم این ماتریس چگونه با زمان متحول می‌شود و تغییر و تحول آن با زمان چگونه قابل بیان است و به چه چیزی بستگی دارد.

۲-۱ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از ماتریس دوران

در ادامه بیاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس دوران عبارت بودند از بیان بردارهای یکۀ دستگاه دوم در دستگاه اول.

$$ {}_s^tC = [{}^t\underline{s}_1 \quad {}^t\underline{s}_2] \qquad (۱-۲-۴)$$

$$ {}_t^sC = [{}^s\underline{t}_1 \quad {}^s\underline{t}_2] \qquad (۱-۲-۵)$$

پس کافیست ببینیم در تحول دوران، معادلۀ حالت یک بردار یکه، چگونه است. به همین دلیل ابتدا به بیان چگونگی تحول یک بردار یکه می‌پردازیم.

فاصلۀ زمانی بسیار کوچکی را در نظر می‌گیریم که تفاضل دوران یافتۀ بردار با خود آن در این فاصلۀ زمانی بسیار ناچیز باشد(به شکل توجه کنید**!**). حال کافیست این بردار تفاضل را بر حسب مشخصه‌های دوران بیان کنیم.

توجه کنید که قبلاً آموخته ایم که دوران یعنی عدم تغییر در زیرفضای نـامتغیر و تغییـر در زیرفضای متغیر. پس

اولاً این بردار تفاضل باید در زیرفضای متغیر بوده و بر زیرفضای نامتغیر عمود باشد.

ثانیاً این تغییر به وضعیت نسبی بردار مورد نظر و زیرفضای نـامتغیر(محـور دوران) نیـز بستگی دارد. هر چه بردار یکه با محور دوران هم فضایی داشته باشد، تغییـرات کمتـری خواهـد داشت و برعکس. هر چه بردار با محور دوران ناهم فضایی داشته باشد یعنی با فضای متغیـر هـم فضایی دارد و لذا تغییرات بیشتری خواهد داشت.

ثالثاً می‌دانیم که در دوران، اندازهٔ بردار تغییر نمی‌کند و لذا تغییرات بـردار در زیرفضـای خودش نیز صفر است.

حال در یک جمع‌بندی توجه می‌کنیم که این تفاضل کوچک از طرفی هیچ مؤلفـه‌ای در راستای محور دوران ندارد و از طرف دیگر هیچ مؤلفه‌ای نیز در راستای خـود بـردار نـدارد و از همه مهمتر باید متناسب با ناهم‌فضایی بین همین دو راستا نیز باشد. این سه به ما القا می‌کنـد کـه این بردار تفاضل، دقیقاً متناسب با حاصلضرب خارجی بردار یکـهٔ دوران(زیرفضـای نـامتغیر) و بردار یکهٔ تحت دوران است.

حال اگر مقدار این تغییرات کوچک را وقتی دو بردار بر هم عمودند(یعنی کاملاً ناهم‌فضا باشند)، با $\Delta\theta$ نمایش دهیم (در واقع همان مقدار زاویهٔ دوران در این فاصله)، می‌توان نوشت:

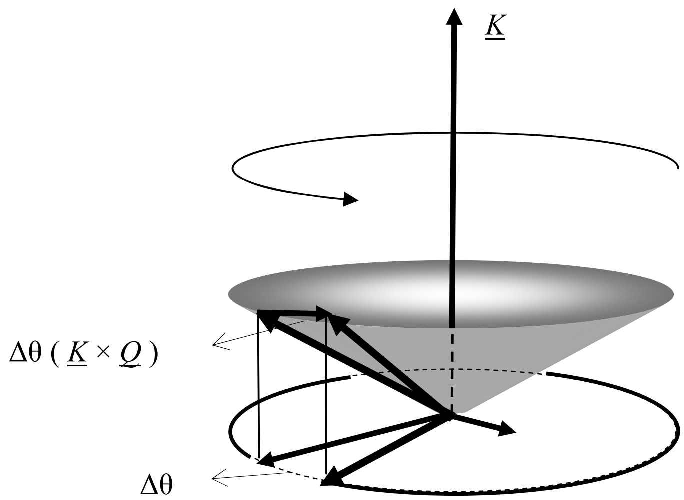
$$\underline{\Delta Q} = \Delta\theta\ \underline{K} \times \underline{Q} \quad \rightarrow \quad {}^{t}\left(\underline{\Delta Q}\right) = \Delta\theta\,[\,{}^{t}\underline{K}\times]\ {}^{t}\underline{Q} = [\underline{\Delta\theta\,{}^{t}K}\times]\ {}^{t}\underline{Q} \qquad (۱)$$

که در آن $\underline{K}$ بردار یکهٔ معرف زیر فضای نامتغیر (محور دوران) است و $\underline{Q}$ بردار یکه ایست که در حال بررسی تحول آن تحت دوران هستیم. پس کافیست در هر لحظه بـردارِ معـرف محـور دوران را داشته باشیم، بعلاوهٔ سرعت لحظه ای مقدار تغییرات در زیرفضای متغیر. دقت کنید کـه این هر دو در حد معنی یافته و خواهیم داشت:

$$\underline{\dot{Q}} = \dot{\theta}\ \underline{K} \times \underline{Q} \quad \rightarrow \quad {}^{t}\left(\underline{\dot{Q}}\right) = [\underline{\dot{\theta}\,{}^{t}K}\times]\ {}^{t}\underline{Q} =: [\,{}^{t}\underline{\omega}\times]\ {}^{t}\underline{Q} = {}^{t}\Omega\ {}^{t}\underline{Q} \qquad (۲)$$

بردار $\underline{\omega}$ را سرعت دوران لحظه ای خواهیم نامید.

هرگز فراموش نکنید که این معادلهٔ حالت برای یک بردار در حال دوران است و نه چیز دیگـر. اگر سرعت لحظه ای دوران ثابت باشد، حل این معادلهٔ حالت را بخوبی می‌شناسید(مسـالهٔ ۱-۱۵). ولی اگر این سرعت دوران خود نیز تغییر کند، این معادلهٔ حالت یک معادلهٔ حالت خطی باقی می ماند ولی متغیر با زمان. که دیگر حل تحلیلی عمومی برای آن نداریم.



شکل ۶ - نمایش تغییرات جزئی یک بردار

حال کافیست توجه کنیم که ستونهای ماتریس دوران خود بردارهایی هستند کـه در هـر لحظه، دوران می یابند. معادلهٔ حالت برای تحول هر یک، مشابه (۲) خواهد بود.

حال جالب این است که می‌دانیم، همواره یک زیر فضای نـامتغیر(همـان بـردار دوران) وجود دارد که هر سه ستون یکهٔ ماتریس تحت آن در دوران قرار می‌گیرنـد. ایـن، بـرای یـک دوران کوچک نیز صادق است و لذا برای تمامی آنها، بردار سرعت دورانی که در بـالا تعریـف شد، یکسان است و به کمک (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}\dot{\underline{s}}_1 & \dot{\underline{s}}_2 & \dot{\underline{s}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{\omega}_{ts} \times \underline{s}_1 & \underline{\omega}_{ts} \times \underline{s}_2 & \underline{\omega}_{ts} \times \underline{s}_3\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

$$\begin{bmatrix}{}^t\dot{\underline{s}}_1 & {}^t\dot{\underline{s}}_2 & {}^t\dot{\underline{s}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^t\Omega_{ts}\,{}^t\underline{s}_1 & {}^t\Omega_{ts}\,{}^t\underline{s}_2 & {}^t\Omega_{ts}\,{}^t\underline{s}_3\end{bmatrix} \Rightarrow \quad {}_s^t\dot{C}(t) = {}^t\Omega_{ts}(t)\ {}_s^tC(t) \qquad (۴)$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_{11} & \dot{c}_{12} & \dot{c}_{13} \\ \dot{c}_{21} & \dot{c}_{22} & \dot{c}_{23} \\ \dot{c}_{31} & \dot{c}_{32} & \dot{c}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3 c_{21} + \omega_2 c_{31} & -\omega_3 c_{22} + \omega_2 c_{32} & -\omega_3 c_{23} + \omega_2 c_{33} \\ +\omega_3 c_{11} - \omega_1 c_{31} & -\omega_3 c_{12} + \omega_1 c_{32} & -\omega_3 c_{13} + \omega_1 c_{33} \\ -\omega_2 c_{11} + \omega_1 c_{21} & -\omega_2 c_{12} + \omega_1 c_{22} & -\omega_2 c_{13} + \omega_1 c_{23} \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

توجه کنید که این معادلهٔ حالت، خطی است ولی می‌تواند متغیر با زمان باشد، چرا که بردار سرعت دوران، می‌تواند هم در جهت و راستا و هم در اندازه، تغییر کند.

وقتی اندازهٔ بردار سرعت دوران تغییر می‌کند یعنی بزرگی تغییرات در واحد زمان افزایش یا کاهش می‌یابد؛ و هنگامی‌که راستای آن تغییر می‌کند، یعنی زیر فضای تغییرات در حال تغییر است.

به این ترتیب روشن است که برای تعیین ماتریس دوران در هر لحظه باید مقدار قبلی آن را با مقدار تغییرات آن که از (۴) می‌توان تعیین نمود، جمع نمود و ***این، فقط بردار سرعت دوران را لازم دارد.***

البته نباید فراموش نمود که در (۴)، بردار سرعت دوران($\underline{\omega}$) باید در همان دستگاه t بیان شده باشد. به‌عبارتی انتگرال‌گیری باید بگونه‌ای منطقی صورت پذیرد. مثلاً برای انتگرال‌گیری عددی می‌توان دید که برای فواصل زمانی بسیار کوچک داریم:

$$\delta({}_s^tC) = {}^t\Omega_{ts} \; {}_s^tC \cdot \delta t \qquad (۶)$$

$$\Rightarrow \qquad {}_s^tC(t_0 + \delta t) \cong {}_s^tC(t_0) + {}^t\Omega_{ts} \; {}_s^tC(t_0) \cdot \delta t \qquad (۷)$$

$${}_s^tC(t_0 + \delta t) \cong (I + {}^t\Omega_{ts} \cdot \delta t) \; {}_s^tC(t_0) \qquad (۸)$$

توجه کنید که مباحث عددی مبتلا به محاسبهٔ (۴) یا (۶) ، در عمل بسیار جدی می‌توانند باشند. چرا که اولاً همواره باید ماتریس دوران، متعامد یکه، باقی بماند و ثانیاً تعداد عملیات ضرب و جمع نباید بیش از نیاز باشد تا باعث خطای محاسبه گردند. به عنوان مثال لازم نیست همهٔ ۹ معادله(۳ بردار) را حل نمود و می‌توان ۶ معادله(۲ بردار) را حل کرده و ۳ عضو دیگر ماتریس انتقال حالت یافته را با ضرب خارجی این دو بردار یکه بدست آورد. همینطور هر بار می‌توان با تقسیم هر بردار به اندازه‌اش مراقب بود که اندازهٔ سطرها یا ستونها، واحد باقی بماند. اما

بهر حال، باز هم، ممکن است دو بردار اول نیز از تعامد خارج شوند که تا حدودی به مشکل بر خواهیم خورد.

جلوتر، بیشتر متوجه خواهیم شد که بی تردید، تعیین وضعیت برای هر وسیلهٔ ناوبری قسمت عمدهٔ تعیین موقعیت آن است. بعبارتی بدون تعیین وضعیت، تعیین مکان به تنهایی یا ممکن نیست و یا کافی نخواهد بود. محاسبات بالا نشان می‌دهد که برای تعیین وضعیت، یک راه این است که سرعت لحظه ای دوران را داشته و سپس انتگرال‌گیری کنیم. این موضوع اساس کار ناوبری اینرسی را تشکیل می‌دهد.

مسالهٔ ۱–۱۷: معادلهٔ (۴) برای موقعی مناسب است که مؤلفه های سرعت دوران را در دستگاه t داشته باشیم . چنانچه مؤلفه های سرعت دوران را در دستگاه s داشته باشیم رابطهٔ (۴) را بازنویسی کنید.

مسالهٔ ۱–۱۸: برای وضعیت نسبی هر دو دستگاه مانند t و s ، میتوان تصور کرد که مثلاً s ابتدا روی t بوده و سپس با سرعت دوران ثابت، حول بردار دوران $\underline{K}_\alpha$ ، دوران یافته و نهایتاً نیز پس از گذشت زمانی معین، مقدار این دوران α شده است. حال با در نظر گرفتن حقیقت فوق و معادلهٔ حالت ماتریس دوران، نشان دهید:

$$ {}_s^tC = C(\underline{K}_\alpha) = e^{\left[{}^{t,s}\underline{K}_\alpha \times\right]} $$

مسالهٔ ۱–۱۹: با توجه به مسالهٔ ۱–۱۸ نشان دهید چنانچه بردار دوران بین دو دستگاه باندازهٔ کافی کوچکتر از واحد باشد، برای ماتریس دوران بین این دو دستگاه می‌توان نوشت:

$$ {}_s^tC = C(\underline{K}_\alpha) \cong I + \left[\underline{K}_\alpha \times\right] $$

(۹) خاصیت جمع برداری سرعت نسبی دوران

اولاً توجه کنید که ما در اینجا کمیت جدیدی را بین دستگاهها ابداع کرده ایم، بنام سرعت دوران لحظه ای یک دستگاه نسبت به دیگری. هر چند ما پیشاپیش این کمیت را بصورت یک بردار تعریف نموده ایم اما این دلیل نمی‌شود که خاصیت برداری سرعت نسبی نیز

برقرار باشد. در واقع می‌خواهیم ببینیم آیا اگر دستگاه s نسبت به t دارای سرعت دوران $\underline{\omega}_{ts}$ باشد و دستگاه u نیز نسبت به s دارای سرعت دوران $\underline{\omega}_{su}$ باشد، حال آیا می‌توان نتیجه گرفت که دستگاه u نسبت به t دارای سرعت دوران $\underline{\omega}_{tu} = \underline{\omega}_{ts} + \underline{\omega}_{su}$ است؟

جواب این سؤال مثبت است و اما دلیل:

از (۴) داریم،

$$\left.\begin{aligned} {}_s^t\dot{C} &= {}^t\Omega_{ts}\ {}_s^tC \\ {}_u^s\dot{C} &= {}^s\Omega_{su}\ {}_u^sC \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}_u^t\dot{C} = d\left({}_s^tC\,{}_u^sC\right)/dt$$

$$= {}_s^t\dot{C}\,{}_u^sC + {}_s^tC\,{}_u^s\dot{C} = {}^t\Omega_{ts}\ {}_s^tC\,{}_u^sC + {}_s^tC\,{}^s\Omega_{su}\ {}_u^sC$$

$$= {}^t\Omega_{ts}\,{}_s^tC\,{}_u^sC + {}^t\Omega_{su}\,{}_s^tC\,{}_u^sC$$

$${}_u^t\dot{C} = ({}^t\Omega_{ts} + {}^t\Omega_{su})\,{}_s^tC\,{}_u^sC \qquad \Rightarrow$$

$${}_u^t\dot{C} = ({}^t\Omega_{ts} + {}^t\Omega_{su})\,{}_u^tC \qquad \textbf{(۱۰)}$$

توجه کنید، با اینکه دوران را با یک برداری بنام بردار دوران نیز نمایش دادیم ولی خاصیت برداری نسبی نداشت در حالیکه سرعت دوران که در بالا تعریف نمودیم، خاصیت برداری نسبی دارد.

نکته‌ای که نباید از نظر دور داشت این است که بردار دوران بین دو دستگاه در حال تحول است و البته تحول آن به بردار سرعت دورانی بین دو دستگاه در هر لحظه بستگی دارد و توسط آن مشخص می گردد ***ولی اصلاً لزومی ندارد که این دو بردار بر هم منطبق باشند.***

۲-۲ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از تحول زوایای اویلر

همانند بخش (۱-۵) فرض کنید ابتدا در تحول از دستگاهt به دستگاه E سرعت دوران نسبی این دو همواره در امتداد محور۳ی هر دو بوده و مقدار آن نیز همواره بستگی به سرعت Ψ دارد. پس میتوان نوشت:

$${}^{t,E}\underline{\omega}_{tE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\Psi} \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(۱)}$$

و با همین استدلال خواهیم داشت:

$$^{E,F}\underline{\omega}_{EF} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\Theta} & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (۲)$$

$$^{F,s}\underline{\omega}_{Fs} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (۳)$$

حال با توجه به همان خاصیت برداری سرعت دوران براحتی می‌توان نوشت:

$$\underline{\omega}_{ts} = \underline{\omega}_{tE} + \underline{\omega}_{EF} + \underline{\omega}_{Fs} \qquad (۴)$$

$$^{s}\underline{\omega}_{ts} = {}^{s}_{E}C \;\; {}^{E}\underline{\omega}_{tE} + {}^{s}_{F}C \;\; {}^{F}\underline{\omega}_{EF} + {}^{s}\underline{\omega}_{Fs} = {}^{E}_{s}C^T \;\; {}^{E}\underline{\omega}_{tE} + {}^{F}_{s}C^T \;\; {}^{F}\underline{\omega}_{EF} + {}^{s}\underline{\omega}_{Fs}$$

$$= C^T_{2'1'}(\Theta,\Phi) \;\; {}^{E}\underline{\omega}_{tE} + C^T_{1'}(\Phi) \;\; {}^{F}\underline{\omega}_{EF} + {}^{s}\underline{\omega}_{Fs}$$
$$= \left(C_2(\Theta)C_1(\Phi)\right)^T \;\; {}^{E}\underline{\omega}_{tE} + C^T_1(\Phi) \;\; {}^{F}\underline{\omega}_{EF} + {}^{s}\underline{\omega}_{Fs}$$

$$^{s}\underline{\omega}_{ts} = C^T_1(\Phi)C^T_2(\Theta) \;\; {}^{E}\underline{\omega}_{tE} + C^T_1(\Phi) \;\; {}^{F}\underline{\omega}_{EF} + {}^{s}\underline{\omega}_{Fs} \qquad (۵)$$

که با جاگذاری (۱) ، (۲) و(۳) در (۵) بدست می آید:

$$^{s}\underline{\omega}_{ts} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\Phi & S_\Phi \\ 0 & -S_\Phi & C_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Theta & 0 & -S_\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\Theta & 0 & C_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\Phi & S_\Phi \\ 0 & -S_\Phi & C_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{s}\underline{\omega}_{ts} = \begin{bmatrix} -- & -- & -S_\Theta \\ -- & -- & S_\Phi C_\Theta \\ -- & -- & C_\Phi C_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & 0 & - \\ - & C_\Phi & - \\ - & -S_\Phi & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{s}\underline{\omega}_{ts} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\Theta \\ 0 & C_\Phi & S_\Phi C_\Theta \\ 0 & -S_\Phi & C_\Phi C_\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

معمولاً سرعت دوران هر دستگاهی را در خود آن دستگاه، با حروف p ، q و r بیان میکنند که بترتیب، همان سرعتهای زاویه ای معروف به roll ، pitch و yaw می‌باشند. به این ترتیب از (۶) بدست می آید:

$$\begin{bmatrix}\dot{\Phi}\\ \dot{\Theta}\\ \dot{\Psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & T_\Theta S_\Phi & T_\Theta C_\Phi\\ 0 & C_\Phi & -S_\Phi\\ 0 & S_\Phi/C_\Theta & C_\Phi/C_\Theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} \qquad (۷)$$

توجه می‌کنید که این معادلات برای محاسبات عددی بسیار نامناسب بوده، اولاً در نزدیکی زوایای خاصی خطاهای بزرگی را شامل خواهند شد و در ثانی شامل توابع مثلثاتی هستند که زمان محاسبهٔ طولانی دربردارند.

توجه کنید که برای همهٔ انواع دسته زوایای اویلر می‌توان محاسبات مشابه را انجام داده و معادلات حالتشان را بر حسب سرعت دوران بین دو دستگاه بدست آورد.

۲-۳ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از تحول بردار دوران

می‌توان نشان داد که معادلهٔ حالت بردار دوران بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{K}_\alpha\right)={}^s\underline{\omega}_{ts}+\frac{1}{2}\left(\underline{K}_\alpha\right)\times{}^s\underline{\omega}_{ts}+\frac{1}{\alpha^2}\left[1-\frac{\alpha\ s_\alpha}{2(1-c_\alpha)}\right]\left(\underline{K}_\alpha\right)\times\left(\underline{K}_\alpha\times{}^s\underline{\omega}_{ts}\right) \qquad (۸)$$

توجه کنید که با داشتن

$$\underline{K}_\alpha(0) \qquad , \qquad {}^s\underline{\omega}_{ts}(t>0)$$

می‌توان با انتگرال‌گیری عددی، بردار دوران را برای بقیهٔ زمانها بدست آورد.

اما توجه کنید که در این مورد هم هر دو مشکلی که بالاتر برای محاسبهٔ زوایای اویلر بیان شد، همچنان در اینجا نیز باقی است.

۲-۴ بیان تحول حالت دو دستگاه با استفاده از کواترنین‌ها

دیدیم، در تمامی مواردی که دوران را بصورت ۳ پارامتری در نظر گرفته ایم، دچار مشکلاتی در محاسبات میشویم. کواترنینها با ۴ پارامتری کردن دوران، زیبایی خاصی به حل این معادلات می بخشند که از هر لحاظ قابل تأمل است.

برای اینکه معادلات حالت کواترنینها نیز برحسب همان p، q و r بدست آیند، ابتدا توجه می‌کنیم که با توجه به مسالهٔ ۱-۴ براحتی می‌توان (۲-۱-۴) را بصورت ذیل نیز نوشت:

$$ {}_s^t\dot{C}(t) = {}_s^tC(t)\ {}^s\Omega_{ts}(t) \quad \Rightarrow $$

$$ \begin{bmatrix} \dot{c}_{11} & \dot{c}_{12} & \dot{c}_{13} \\ \dot{c}_{21} & \dot{c}_{22} & \dot{c}_{23} \\ \dot{c}_{31} & \dot{c}_{32} & \dot{c}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q\,c_{13} + r\,c_{12} & +p\,c_{13} - r\,c_{11} & -p\,c_{12} + q\,c_{11} \\ -q\,c_{23} + r\,c_{22} & +p\,c_{23} - r\,c_{21} & -p\,c_{22} + q\,c_{21} \\ -q\,c_{33} + r\,c_{32} & +p\,c_{33} - r\,c_{31} & -p\,c_{32} + q\,c_{31} \end{bmatrix} \tag{۱} $$

و همانطور که در مسالهٔ (۱-۱۰) نیز اشاره شد همواره داریم:

$$ P_4^2 = 1 + tr\left\{{}_s^tC\right\} \tag{۲} $$

حال با مشتق گیری ابتدا معادلهٔ حالت P_4 را بطریق زیر بدست می آوریم:

$$ 2P_4\,\dot{P}_4 = \frac{d}{dt} tr\left\{{}_s^tC\right\} = tr\left\{\frac{d}{dt}\ {}_s^tC\right\} = tr\left\{{}_s^t\dot{C}\right\} = tr\left\{{}_s^tC\ {}^s\Omega_{ts}\right\} \tag{۳} $$

در ادامه با جاگذاری (۱-۴-۲۰) و یک سری عملیات، براحتی بدست می آید:

$$ \dot{P}_4 = \frac{1}{2}\left(-P_1\,p - P_2\,q - P_3\,r\right) \tag{۴} $$

و در ادامه می‌توان با استفاده از همان روابط اشاره شده در مسالهٔ (۱-۱۰) و رابطهٔ(۱) ، معادلهٔ حالت بقیهٔ P_jها نیز بدست آید که برای نمونه، نحوهٔ کار را برای P_1 می آوریم:

$$ P_1P_4 = c_{32} - c_{23} \quad \Rightarrow \quad \dot{P}_1P_4 + P_1\dot{P}_4 = \dot{c}_{32} - \dot{c}_{23} = -c_{31}r + c_{33}p - c_{21}q + c_{22}p \quad \Rightarrow $$

$$ \cdots \quad \Rightarrow $$

$$ \dot{P}_1 = \frac{1}{2}(P_4p - P_3q + P_2r) \tag{۵} $$

و به همین شکل برای بقیه نیز بدست می آید:

$$ \dot{P}_2 = \frac{1}{2}(P_3p + P_4q - P_1r) \tag{۶} $$

$$ \dot{P}_3 = \frac{1}{2}(-P_2p + P_1q + P_4r) \tag{۷} $$

که می‌توان به شکلهای ساده تر زیر نیز نوشت:

$$ \begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3 \\ \dot{P}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & +r & -q & +p \\ -r & 0 & +p & +q \\ +q & -p & 0 & +r \\ -p & -q & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} $$

$$ \Leftrightarrow \quad \underline{\dot{P}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\left[{}^s\underline{\omega}_{ts}\times\right] & {}^s\underline{\omega}_{ts} \\ -{}^s\underline{\omega}_{ts}^{\ T} & 0 \end{bmatrix} \underline{P} \tag{۸} $$

$$ \Leftrightarrow \quad \underline{\dot{P}} = \frac{1}{2} A\ \underline{P} $$

توجه کنید که با داشتن کواترنینها در لحظهٔ صفر و سرعت دوران در هر لحظه، می‌تـوان با انتگرالگیری کواترنینها را در هر لحظهٔ بعد از آن محاسبه نمود. در این معادلات تنهـا مـوردی که می‌تواند به مرور مسئله ساز شود، غیر واحد شدن اندازهٔ بردار چهارتایی $\underline{P}$ ½ است. برای رفع این معضل، خوبست مرتباً بردار مزبور تقسیم بر اندازه اش گردد. عملاً مهمترین مسئلهٔ باقیمانـده، انتخاب صحیح گامهای انتگرالگیری خواهد بود و به لحاظ کلی معادلات فوق نسبت به معـادلات دیگری که برای حالت نسبی دو دستگاه ارائه گردید، رفتار بسیار مناسبی دارند و تقریباً هیچیک از مشکلات آنها را نخواهند داشت.

مسـاله۱- ۲۰: برای رفتن از دستگاه t به s می‌توان با دو دوران به صورت زیر عمل کـرد. ابتـدا دوران حول محور ۱ی دستگاه t به اندازهٔ γ و سپس دوران حول محور ۳ی دسـتگاه جدیـد بـه اندازهٔ α. با این دوران‌ها به دستگاه مطلوب خواهیم رسید. معادلات حالت حاکم بر این زوایـا را به دست آورید.

مسـاله۱- ۲۱: مسالهٔ دستگاهی را در نظر بگیرید که نسبت به دستگاه دیگر بـا سـرعت دورانـی ثابتی که در همین دستگاه دوم، $[0 \;\; 0 \;\; \omega^{R/s}]$ است، در حال دوران است. قبل از اینکه این دوران شروع شود سه زاویهٔ اویلر دستگاه اول نسبت به دستگاه دوم بترتیب عبارت بودند از $0\ ,\ \pi/4\ ,0$. ماتریس دوران بین دو دستگاه را در تمام زمانها بدست آورید.

مساله۱- ۲۲: در همان مسالهٔ(۱-۲۱) سرعت دوران دستگاه اول نسبت به دوم را در دسـتگاه اول بدست آورده و سپس معادلات حالت سه زاویهٔ اویلر را بنویسید. آیا می‌توانید حل تحلیلـی بـرای آنها ارائه کنید؟

مساله۱- ۲۳: در همان مسالهٔ(۱-۲۱) معادلهٔ حالت کواترنینها را بنویسید. آیا می‌توانید حل تحلیلی برای آنها ارائه کنید؟ چگونه؟ بکمک نرم افزاری مانند Simulink بـا دو گـام $(0.001)2\pi/\omega$ و $(0.01)2\pi/\omega$ برای مدت $2\pi/\omega$ ، انتگرالگیری کرده و در حالیکه طول بردار کواترنینها را مد نظر دارید، نتایج را مقایسه کنید.

مساله۱- ۲۴: در همان مسالهٔ(۱-۲۱) فرض کنید دستگاه اول، علاوه بر دورانی کـه ذکـر شـده، حول محور۱ خود نیز دورانی با سرعت ثابت $\omega_0{}^{R/s}$ دارد. سرعت دوران دستگاه اول نسبت به دوم

را در هر دو دستگاه بدست آورده و معادلات حالت ماتریس دوران و همینطور کواترنینها را بنویسید.

مساله۱- ۲۵: معادلات حالت زوایای اویلر را بر حسب مؤلفه های ${}^{t}\underline{\omega}_{ts} = [\ \omega_1\ \ \omega_2\ \ \omega_3\ ]^T$ بدست آورید.

۲-۵ تحول حالت یک بردار از دید دستگاه‌های مختلف (سرعت یک بردار از دید دستگاههای مختلف یا قضیهٔ کوریولیس)

همانطور که در بخش ابتدای درس اشاره شد هر بردار مستقل از اینکه توسط چه دستگاهی به آن نگریسته می‌شود، دارای تعریفی مشخص است و ماهیت آن بستگی به نوع نگرش خاص به آن ندارد. صد البته دیدیم که دستگاههای مختلف می‌توانند به آن، بیانی متناسب با نگرششان نسبت دهند ولی این بیان‌های متفاوت مخدوش کنندهٔ وجود و اصل تعریف آن بردار نخواهند بود.

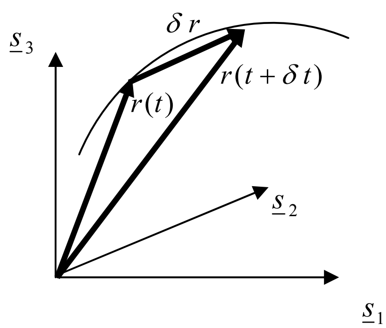
بعنوان مثال بردار سرعت دوران نسبی دو دستگاه خود یک تعریف مستقل دارد و البته بیان آن در هر یک از دو دستگاه متفاوت بوده و چنانچه دستگاه سوم دیگری را هم در نظر بگیرید، بیان این بردار با هر دوی این بیان‌ها نیز متفاوت خواهد بود.

حال شرایطی را در نظر بگیرید که می‌خواهیم تغییرات یک بردار را بازای تغییر یک متغیر مستقل مانند زمان بسنجیم. می‌دانیم که تغییرات یک بردار خود یک بردار خواهد داد.
حال توجه کنید که دستگاه‌ها، خود نیز نسبت به همان متغیر مستقل، می‌توانند تغییراتی داشته باشند. فعلاً دستگاههایی را در نظر بگیرید که نسبت به هم ثابت بوده و تغییراتشان نسبت به زمان، مانند هم باشد که یعنی سرعت دورانی آنها نسبت به هم، صفر است و در واقع ماتریس دوران بین آنها با زمان در حال تغییر نیست.

به سادگی می‌توان نشان داد که از دید ناظرهایی که در یک چنین دستگاه‌هایی قرار دارند، تغییرات آن بردار که خود نیز یک بردار است، برداری است یکسان، هر چند بیانش در هر یک با دیگری نیز متفاوت است ولی برداری متفاوت نخواهد بود.

در ادامه، ابتدا کمی بیشتر در مورد تغییرات یک بردار از دید یک دستگاه مـی‌پـردازیم. فرض کنید بردار $\underline{r}$ از دید دستگاه s در زمان t ، عبارت باشد از $^{s}\underline{r}(t)$ و در فاصلهٔ زمانی کوچکی بعد از آن نیز باشد: $^{s}\underline{r}(t+\delta t)$. در این صورت می‌گوییم: تغییرات این بردار در این فاصلهٔ زمـانی، از دید دستگاه s ، برابر است با برداری که بیانش در این دستگاه، عبارتست از :

$$^{s}\underline{r}(t+\delta t)-{}^{s}\underline{r}(t) \tag{۱}$$



شکل ۷- نمایش تغییرات جزئی بردار $^{s}\underline{r}(t)$

و می نویسیم:

$$^{s}\left(\delta_s\,\underline{r}\right)={}^{s}\underline{r}(t+\delta t)-{}^{s}\underline{r}(t)=\begin{bmatrix} r_1(t+\delta t)-r_1(t) \\ r_2(t+\delta t)-r_2(t) \\ r_3(t+\delta t)-r_3(t)\end{bmatrix} \tag{۲}$$

و بدقت میگوییم: ***تغییرات $\underline{\mathbf{r}}$ از دید s، بیان شده در s یا مؤلفه های تغییرات $\underline{\mathbf{r}}$ از دید s، در s .***

توجه کنید که دو قید کاملاً متفاوت وجود دارد:

۱- تغییرات از دید دستگاه ...

۲- بیان این تغییرات در یک دستگاه

قید دوم همان است که قبلاً هم با آن سر و کار داشتیم ولـی قیـد اول جـزو تعریـف آن بـردار تغییرات است و بدون آن بردار مزبور، هنوز خوش تعریف نیست.

به همین شکل می‌توان معادلهٔ حالت یک بردار را از دید یک دستگاه، تعریف کرد:

$$^{s}\left(D_s\underline{r}\right):=\ {}^{s}\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)_s(\underline{r})\right\}=\left\{\frac{d}{dt}\left({}^{s}\underline{r}\right)\right\}:=D\left({}^{s}\underline{r}\right)=\left({}^{s}\dot{\underline{r}}\right)=\begin{bmatrix}\dot{r}_1\\ \dot{r}_2\\ \dot{r}_3\end{bmatrix} \tag{۳}$$

D_s در اینجا به معنی مشتق یک بردار نسبت به متغیر مستقل (زمان) خواهد بود از دید دستگاه s . چنانچه متغیر مستقل، زمان باشد، آنگاه به این مشتق، **سرعت بردار از دید آن دستگاه** نیز می‌گوییم.

من بعد D بدون زیر نویس به معنی مشتق از اعضای دقیقاً مشخص شدهٔ هر ماتریس نسبت به متغیر مستقل (زمان) خواهد بود و **نه** مشتق یک بردار.

توجه کنید که مؤلفه های این معادلهٔ حالت را در **هر دستگاه دیگری** مانند t نیز می‌توان بیان نمود:

$$ {}^{t}(D_s\underline{r}) = {}^{t}\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)_s(\underline{r})\right\} = {}^{t}_{s}C\ P\left({}^{s}\underline{r}\right) = {}^{t}_{s}C\begin{bmatrix}\dot{r}_1\\ \dot{r}_2\\ \dot{r}_3\end{bmatrix} \tag{۴}$$

مساله ۱-۲۶: نشان دهید :

$$ {}^{s}D_s\,\underline{r} = \dot{r}\ {}^{s}\underline{1}_r + [{}^{s}\underline{\omega}\times]\ {}^{s}\underline{r} $$

که در آن $\underline{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای $\underline{r}$ و ${}^{s}\underline{1}_r$ بردار یکهٔ در امتداد $\underline{r}$ می‌باشد.
(راهنمایی: بردار δr را به دو مؤلفه که یکی در امتداد خود $\underline{r}$ است و مؤلفهٔ دیگر نیز به گونه‌ای است که با این مؤلفهٔ اول δr را می‌سازد، تجزیه کنید.)

(۵) قضیهٔ کوریولیس[1]

حال سؤال این است: ***اگر دستگاهی باشد که نسبت به این دستگاه‌ها در حال دوران بوده و سرعت دورانی داشته باشد، تغییرات همان بردار از دید این دستگاه جدید، باز هم، همان برداری خواهد بود که آن دستگاه‌ها محاسبه کرده بودند یا نه؟***

به عبارت دیگر، آیا سرعت یک بردار از دید این دستگاه جدید با سرعت آن از دید آن دستگاه‌ها یکی است؟ طبیعی است که جواب منفی است. یعنی :

$$ D_t\underline{r} \neq D_s\underline{r} \quad \equiv \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_t(\underline{r}) \neq \left(\frac{d}{dt}\right)_s(\underline{r}) \tag{۶}$$

[1] Coriolis theorem

در ادامه این موضوع را دقیق‌تر بررسی نموده و رابطهٔ بین این دو را نیز بدست می آوریم. بـرای این منظور از همان تعریفی که در بالا آمد استفاده می‌کنیم.

$$ {}^{s}\left(D_s \underline{r}\right) = D\left({}^{s}\underline{r}\right) \quad , \quad {}^{t}\left(D_t \underline{r}\right) = D\left({}^{t}\underline{r}\right) \quad \Rightarrow $$

$$ \begin{aligned} {}^{t}\left(D_t \underline{r}\right) &= D\left({}^{t}\underline{r}\right) = D\left({}^{t}_{s}C \; {}^{s}\underline{r}\right) \\ &= {}^{t}_{s}C \; D\left({}^{s}\underline{r}\right) + D\left({}^{t}_{s}C\right) {}^{s}\underline{r} \\ &= {}^{t}_{s}C \; {}^{s}\left(D_s \underline{r}\right) + {}^{t}_{s}C \; \overbrace{{}^{s}\Omega_{ts} \; {}^{s}\underline{r}}^{{}^{s}\left(\underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}\right)} \\ &= {}^{t}\left(D_s \underline{r}\right) + {}^{t}\left(\underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}\right) \quad \Rightarrow \end{aligned} $$

$$ D_t \underline{r} = D_s \underline{r} + \underline{\omega}_{ts} \times \underline{r} \qquad \textbf{(۷)} $$

آنچه بدست آمد را ، قضیهٔ اول کوریولیس می نامند.

■

مساله۱- ۲۶: توضیح دهید، برای هر بردار $\underline{a}$ که در راستای سرعت دوران بین دو دستگاه باشـد، داریم:

$$ D_t \underline{a} = D_s \underline{a} $$

و این را در مورد خود بردار سرعت دورانی مسالهٔ ۱-۲۱ تحقیق نمایید. توجه کنید کـه از نتیجـهٔ مسالهٔ ۱-۲۲ نیز می‌توانید استفاده کنید.

مسالهٔ ۱-۲۷: در همان مسالهٔ ۱-۲۱، مشتق بردار یکهٔ نظیر محور۱ هر یـک از دو دسـتگاه را از دید دستگاه دیگر، در هر دو دستگاه بدست آورید. این کار را هر بار از دو روش بروید: الـف- ابتدا مؤلفه های بردار را در همان دستگاهی که میخواهید مشتقگیری کنید، محاسـبه نمـوده و از آنها مشتق بگیرید. ب- از قضیهٔ کوریولیس استفاده نموده و بدست آورید.

مسالهٔ ۱-۲۸: گفتگوی مفصلی داشتیم که مشتق بردارها نسبت به زمان(سرعت بردارهـا) از دیـد یک دستگاه با دستگاه دیگر، می‌تواند متفاوت باشد. استدلال کنید که این موضوع در مورد مشتق طول آنها نسبت به زمان صدق نمی‌کند. یعنی مشتق طول آنها در همهٔ دستگاه‌ها یکسان است.

مسالهٔ ۱-۲۹: نشان دهید برداری که طول ثابت دارد، مستقل از دستگاه، سرعتش بر خودش عمود است.

مسالهٔ ۱-۳۰: سرعت هر بردار از دید هر دستگاه را، همواره میتوان به دو مؤلفهٔ در راستایِ خـود بردار (سرعت مماسیِ بردار) و در راستای عمود بر بردار(سرعت قائمِ بردار) تجزیه نمود. نشـان دهید سرعت مماسی بردار، مستقل از دستگاهی است که سرعت از دید آن محاسبه می‌شود.

مسالهٔ ۱-۳۱: کدامیک از روابط زیر صحیح است؟ در هر مورد توضیح دهید؟

$$D_t \underline{r} = D\,{}^t\underline{r} \quad , \quad {}^t(D_t \underline{r}) = D\,{}^t\underline{r} \quad , \quad D_t\,{}^s\underline{r} = {}^s(D\,{}^t\underline{r}) \quad , \quad {}^s(D\,{}^t\underline{r}) = {}^s_tC\,{}^t(D_t\underline{r}) \quad , \quad {}^s(D\,{}^t\underline{r}) = {}^s_tC\,D\,{}^t\underline{r}$$

اگر بردار $\underline{r}$ را در قضیهٔ کوریولیس، "بردار مکان یک جسم نسبت به یک نقطهٔ مورد نظرمان"، در نظر بگیریم، آنگاه آنچه بدست آوردیم، اصطلاحاً ، رابطهٔ بین سرعت جسم از دید دستگاهِ s و سرعت جسم از دید دستگاهِ t بوده است. یعنی :

$$\underline{v}_{tB} = \underline{v}_{sB} + \underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}_B \qquad \textbf{(۸)}$$

حال شتابِ همان جسم از دیدِ یک دستگاه را ***سرعت بردار سرعت از دید آن دستگاه*** تعریـف می‌کنیم. در ادامه رابطهٔ بین شتاب جسم از دیدِ دو دستگاه را بصورت زیر بدست می‌آوریم.

(۹)

$$\begin{aligned} D_t \underline{v}_{tB} &= D_t(\underline{v}_{sB} + \underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}_B) \\ &= D_t \underline{v}_{sB} + (D_t \underline{\omega}_{ts}) \times \underline{r}_B + \underline{\omega}_{ts} \times (D_t \underline{r}_B) \\ &= D_s \underline{v}_{sB} + \underline{\omega}_{ts} \times \underline{v}_{sB} + \\ &\qquad (D_{t\,or\,s}\, \underline{\omega}_{ts}) \times \underline{r}_B + \\ &\qquad\qquad \underline{\omega}_{ts} \times (D_s \underline{r}_B + \underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}_B) \left[= \underline{\omega}_{ts} \times \underline{v}_{sB} + \underline{\omega}_{ts} \times \left(\underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}_B \right) \right] \end{aligned}$$

(۱۰)

$$\underbrace{\underline{a}_{tB}}_{Acc.\,in\,Sight\,Of\,t\,Cordinat} = \underbrace{\underline{a}_{sB}}_{Acc.\,in\,Sight\,Of\,s\,Cordinat} + \underbrace{2\underline{\omega}_{ts} \times \underline{v}_{sB}}_{Coriolis\,Acc.} + \underbrace{(D_{t\,or\,s}\,\underline{\omega}_{ts}) \times \underline{r}_B}_{Tangantial\,Acc.} + \underbrace{\underline{\omega}_{ts} \times (\underline{\omega}_{ts} \times \underline{r}_B)}_{Centripetal\,Acc.}$$

دقت کنید که اگر جسم نسبت به دستگاه s سرعتی نداشته باشد که یعنی $\underline{v}_{sB} = \underline{0}$ و $\underline{a}_{sB} = \underline{0}$ آنگاه شتابِ کوریولیس ظاهر نخواهد شد. اما در صورتی‌که جسم نسبت به دستگاه s سرعت ثابتی داشته باشد که در این صورت باز $\underline{a}_{sB} = \underline{0}$ برقرار است، با این تفاوت که این بار شتابِ کوریولیس، علاوه بر شتاب‌های مماسی و شتاب جانب مرکز، ظاهر خواهد شد.

(۱۱)مثال : به عنوان تمرین می‌خواهیم سرعت و شتاب یک جسم را بر حسب مشخصه‌های دستگاه قطبی[1] در صفحه ، یا در دستگاه استوانه‌ای[2] در فضا به‌دست آوریم.

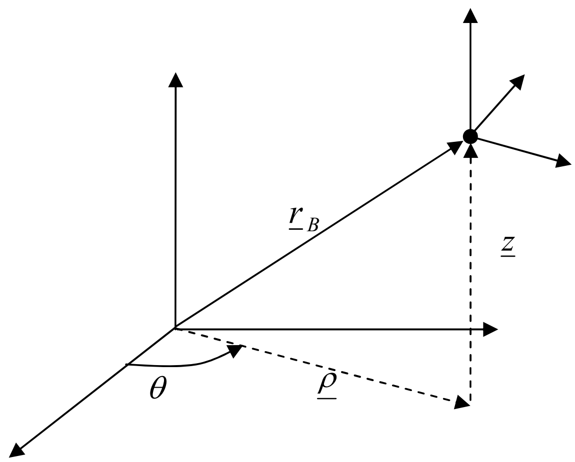
ابتدا توجه می‌کنیم که در دستگاه استوانه‌ای مشخصه‌ها عبارتند از (ρ, θ, z) که متناظر مشخصه‌های دکارتی[3] زیر هستند:

$$\begin{aligned} x &= \rho\, Cos\,\theta && (1) \\ y &= \rho\, Sin\,\theta && (2) \\ z &= z && (3) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

دستگاه‌های حامل یک مکان، دستگاه‌هایی هستند که وضعیت آنها نسبت به یک دستگاه معین (دیگر) بوسیلهٔ یک بردار تعیین می‌گردد. مثلاً دستگاه قطبی همواره نسبت به یک دستگاه معین دیگری مطرح است که وضعیت نسبی آن توسط یک بردارِ معین، مشخص می‌گردد.

---

[1] Polar Coordinate
[2] Cylindry Coordinate
[3] Decartian Coordinate



شکل ۸- نمایش بردار حامل دستگاه

در عبارت‌هایی که قبلاً بدست آوردیم چنانچه دقت کنید، مختصات قطبی(استوانه‌ای)، نسبت به دیگر دستگاهی که آن را دستگاه دکارتی نامیده‌ایم، قطبی است؛ و یک بردار $\underline{r}_B$ نیز تعیین کنندهٔ وضعیت نسبی دستگاه مختصات قطبی(استوانه‌ای) نسبت به دستگاه دکارتی می‌باشد.

توجه کنید که در آنجا بردارِ $\underline{r}_B$ را بردارِ مشخص کنندهٔ مکان یک جسم در نظر گرفتیم ولی در حالت کلی لزومی ندارد که این بردارِ حاملِ دستگاه، حتماً ، مکان یک جسم نسبت به نقطه‌ای تصور شود و می‌تواند هر بردارِ دیگری غیر از بردار مکان نیز باشد.

همین‌طور دستگاهِ کروی نیز دوباره نسبت به یک دستگاهِ خاص، کروی نامیده می‌شود که آن دستگاهِ خاص را دوباره، دکارتی نامیدیم. و یک بردارِ حاملِ $\underline{r}_B$ نیز مشخص کنندهٔ وضعیت نسبی دستگاهِ کروی به دستگاه دکارتی می‌باشد.

لذا موضوعِ دستگاه حامل یک بردار می‌تواند به طرق مختلف و برای کاربردهای مختلف بوجود آید. در تمامی این موارد، توجهِ خواننده جلب می‌گردد که چون اصولاً با تعاریف آورده شده در این نوشته، نقطه‌ای بنامِ "مرکزِ دستگاه" برای یک دستگاه بی‌معنی است، لذا شایسته نخواهد بود که کسی از متحدالمرکز بودن و غیره گفتگویی کند و فقط وضعیت نسبی دو دستگاه لازم است معین گردد که آن نیز از رویِ بردارِ حاملِ دستگاه نسبت به دستگاه مرجع تعریف شده و سنجیده می‌شود و با تغییر آن بردار، طبیعتاً این وضعیت نسبی نیز تغییر می‌کند و دقیقاً بستگی به بردار حاملِ دستگاه، دارد.

حال با توجه به شکل (۸) برای بردار مکانِ جسم ، همواره داریم :

$$\underline{r} = \underline{\rho} + \underline{z} \tag{۱۳}$$

$$^{C}\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ، } {}^{D,C}\underline{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

$$\Rightarrow {}^{C}\underline{r} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، چنانچه در قضیهٔ کوریولیس، بردار مورد نظر، بردار مکان باشد، آنچه بدست می‌آید، رابطهٔ دو سرعتِ جسم، خواهد بود.

$$D_D\underline{r} = D_C\underline{r} + \underline{\omega}_{DC} \times \underline{r}$$

$$^{C}(D_D\underline{r}) = {}^{C}(D_C\underline{r}) + {}^{C}(\underline{\omega}_{DC} \times \underline{r})$$

$$= D\ {}^{C}\underline{r} + {}^{C}\underline{\omega}_{DC} \times {}^{C}\underline{r}$$

$$^{C}\underline{v}_{DB} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{۱۷}$$

به این ترتیب سرعت جسم از دید دستگاه دکارتی بیان شده در دستگاه استوانه‌ای به دست می-آید.

برای داشتن همین بردارِ سرعت در دستگاه دکارتی کافی است، آن را در ماتریس دوران بین دو دستگاه ضرب کنیم.

$$^{D}\underline{v}_{DB} = {}^{D}_{C}C\ {}^{C}\underline{v}_{DB} = \begin{pmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}C\theta - \rho\dot{\theta}S\theta \\ \dot{\rho}S\theta + \rho\dot{\theta}C\theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{۱۸}$$

حال می‌خواهیم شتاب این جسم را نیز بر حسب اعدادِ استوانه‌ای بدست آوریم. برای این منظور قضیهٔ کوریولیس را این‌بار برای بردارِ سرعت به کار خواهیم برد.

$$\underline{a}_{DB} = D_D\underline{v}_{DB} = D_C\underline{v}_{DB} + \underline{\omega}_{DC} \times \underline{v}_{DB}$$

با استفاده از (۱۰) داریم:

(۱۹) شتاب ظاهری:

$$^{C}(D_C \underline{v}_{DB}) = {}^{C}(D_C(D_C \underline{r})) = {}^{C}(D_C^2 \underline{r}) = D^{2\,C}\underline{r} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} \\ 0 \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

(۲۰) شتاب کوریولیس:

$$2 \times {}^{C}(\underline{\omega}_{DC} \times v_{CB}) = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(۲۱) شتاب مماسی:

$$^{C}((D_C \underline{\omega}_{DC}) \times \underline{r}) = D\,{}^{C}\underline{\omega}_{DC} \times {}^{C}\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(۲۲) شتاب جانب مرکز:

$$\begin{aligned} ^{C}(\underline{\omega}_{DC} \times (\underline{\omega}_{DC} \times \underline{r})) &= {}^{C}\underline{\omega}_{DC} \times {}^{C}(\underline{\omega}_{DC} \times \underline{r}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\rho\dot{\theta}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

از جمع مؤلفه‌های بدست آمده تا اینجا، بردارِ شتابِ جسم از دید دستگاه دکارتی، لیکن بیان شده در دستگاه استوانه‌ای، بدست می‌آید.

$$^{C}\underline{a}_{DB} = {}^{C}D_D \underline{v}_{DB} = {}^{C}D_D^2 \underline{r} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(۲۳)}$$

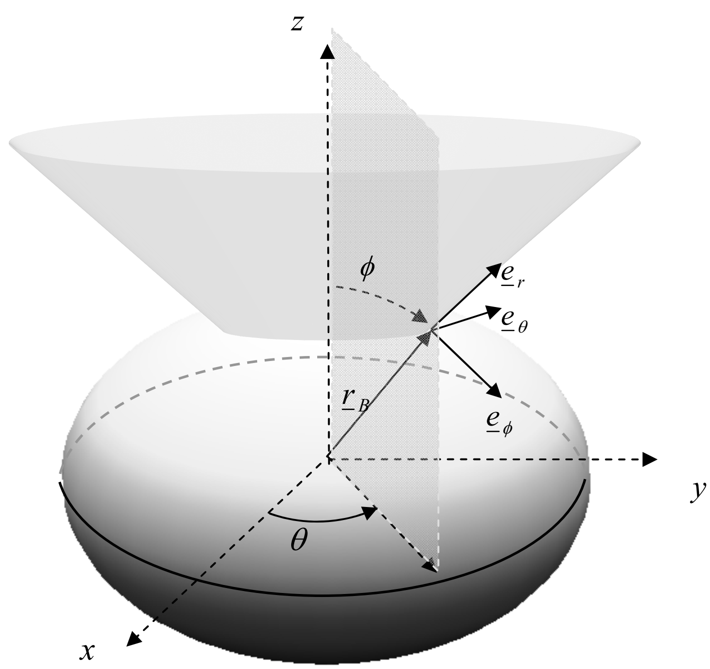
■

برای بیان بردار شتاب در دستگاه دکارتی فقط کافی است آنچه در بالا بدست آمد در ماتریس دوران بین دو دستگاه ضرب شود.

مساله۱- ۳۲: با استفاده از رابطهٔ (۱۳) این بار بیان بردار $\underline{r}$ را در دستگاه دکارتی نوشته و با دیفرانسیل‌گیری مستقیم رابطهٔ (۱۸) را تحقیق کنید.

مساله۱- ۳۳: مانند مساله ۱-۳۲ آنچه در (۲۳) به دست آمد را بدون استفاده از قضیهٔ کوریولیس تحقیق کنید.

مساله۱- ۳۴: می‌خواهیم سرعت و شتاب یک جسم را بر حسب مشخصه‌های دستگاه کروی[1] در فضا به‌دست آوریم. همانند مثال (۱۱) ابتدا ارتباط مختصات یک بردار در دستگاه دکارتی و کروی را بیابید، و از روی آن تعیین کنید $[x \quad y \quad z]$ با $[r \quad \phi \quad \theta]$ چه رابطه‌ای دارند. به این ترتیب ماتریس دوران بین دو دستگاه بدست می‌آید.



θ

[1] Spherical

سپس بردار سرعت دوران دستگاه کروی نسبت به دستگاه دکارتی را برحسب مؤلفه‌های دستگاه کروی به‌دست آورید. اکنون سرعت و شتاب جسم را بر حسب مؤلفه‌های کـروی بیـان کنید.

نتایج به‌دست آمده را با مشتق‌گیری مستقیم از بردار مکان در دستگاه دکارتی مقایسه کرده از صحت محاسبات اطمینان حاصل کنید.

جواب:
$$^{S}\underline{v}_{DB} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \\ r\dot{\theta}\ S\phi \end{pmatrix} \qquad ^{S}\underline{a}_{DB} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\ S^2\phi \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2\ S\phi C\phi \\ r\ddot{\theta}\ S\phi + 2\dot{r}\dot{\theta}S\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}C\phi \end{pmatrix}$$

شتابِ مماسی و شتابِ جانبی

دیدیم که بازایِ تغییرِ یک چیزی مانندِ زمان از دید یک ناظر، می‌تواند نقطهٔ پایانی یک بردار از دید همان ناظر تغییر کند. چنانچه این نقاطِ پایانیِ احتمالاً گوناگون به یکدیگر متصل گردند اصطلاحاً "مسیرِ حرکتِ آن بردار" رسم می‌گردد که تعبیری هندسی دارد.

براحتی می‌توان دید که امتدادِ سرعتِ هر برداری از دیدِ دستگاهی، در فضای برداریِ سه بعدیِ رویهٔ جابجایی‌ها، بر مسیر حرکتِ آن بردار از دید همان دستگاه، مماس است.

حال چنانچه در تمرین۱-۳۰ نیز پیش کشیده شد، توجه کنید که سرعت هر برداری را می‌توان همواره به دو مؤلفه تجزیهٔ نمود، یکی در راستای خودِ بردار و یکی در راستایِ عمودِ بر آن. به اولی، سرعتِ مماسیِ بردار و به دومی، سرعتِ قائم(جانبی) بردار گویند. سرعتِ مماسیِ بردار، حاکی از تغییرِ اندازه(طولِ) آن و سرعتِ جانبی حاکی از تغییرِ راستایِ آن است.

این تجزیه در مورد شتاب نیز قابل انجام است. شتاب که سرعتِ سرعت است، می‌تواند به دو شتاب یکی مماس بر سرعت و یکی عمود بر آن تصور گردد. به این ترتیب، شتابِ مماسی همواره مماس بر سرعت و لذا مماس بر مسیرِ حرکتِ مکان است. برعکس شتابِ قائم یا شتابِ جانبی همواره قائمِ بر سرعت و لذا قائمِ بر مسیرِ حرکتِ مکان است.

توجه کنید، در یک لحظه، هنگامیکه راستای سرعت معلوم باشد، راستای شتابِ مماسی نیز دقیقاً روشن است ولی در مورد راستای شتابِ جانبی فقط می‌توان گفت که، در صفحهٔ عمود(نرمال) بر سرعت قرار دارد و نمی‌توان دقیقاً آنرا تعیین نمود. صفحه‌ای را که شتاب مماسی و شتاب جانبی تشکیل می‌دهند را صفحهٔ حرکت در آن لحظه گویند. این صفحه بسته به نوعِ حرکت می‌تواند تغییر کند.

این تقسیم‌بندی چه در جایی که نقشِ نیروها و تحلیلِ عواملِ حرکت مطرح می‌گردند که آنرا دینامیک نامیده‌اند و چه در جایی که فقط چگونگی و مسیرِ حرکت از دیدهای گوناگون مطرح می‌گردند که آنرا سینماتیک نامیده‌اند، کاربرد و اهمیت فراوانی داشته است.

مسألهٔ ۱-۳۵ استدلال کنید که در چه صورتی صفحهٔ حرکت تغییر نمی‌کند و چرا اصولاً چنین نامی درست است.

مساله۱- ۳۶: الف) حرکتِ یک نقطه(مانند مرکز جرم یک جسم) در صفحه را در نظر بگیرید. سرعت دورانِ بردارِ سرعت را در صفحهٔ مزبور ω_v نام‌گذاری کنید. اندازهٔ سرعت را نیز با v نمایش دهید. نشان دهید، شتابِ مماسی برابر $\dot{v}$ و شتاب قائم(جانبی) برابرِ $v\omega_v$ خواهد بود. اگر R را به‌صورت $R=\frac{v}{\omega_v}$ تعریف کنیم، *به R شعاعِ انحنای مسیر در آن لحظه می‌گویند.*
ب) آیا می‌توانید این دو شتاب را بر حسب مؤلفه‌های مختصات قطبی حاملِ مسیر بدست آورید.
ج) آیا می‌توانید الگوریتمی بدهید که با داشتنِ لحظه‌ایِ این دو شتاب، از ابتدا تاکنون، مکان در لحظهٔ کنونی بدست آید.

مسأله۱-۳۷ : یک قایق با سرعتی به بزرگی ۴ نوت($1\,knot=1852\,{}^{m}\!/_{h}$) روی مسیری که با مختصات قطبیِ حاملِ قایق بصورت $\rho=10\theta$ بیان شده است، حرکت می‌کند. برای $\theta=2\pi$، الف) سرعت قایق را هم در دستگاه قطبی و هم در دستگاه دکارتی بیان کنید. ب) اندازهٔ شتاب مماسی و شتاب جانبی و شعاعِ انحنای مسیر را بدست آورید.

مسأله ۱-۳۸ : یک ذرهٔ بردار در یک میدان مغناطیسی روی یک سیلندر در مسیری که در دستگاه استوانه‌ای حاملِ ذره، بصورت $\theta=2z\ ^{Rad}$ و $\rho=1$ بیان شده، با سرعتی به بزرگی $1\,{}^{km}\!/_{s}$ در

حال حرکت است(z بر حسب متر است). الف) سرعت را در دستگاه استوانه‌ای بیان کنید. ب) اندازهٔ شتاب جانبی و شعاع انحنای مسیر حرکت ذره را بدست آورید.

مسأله ۱-۳۹ : صادق بودنِ قاعدهٔ مشتق برای ضرب درونی و بیرونی دو بردار. نشان دهید بازای هر s دلخواه، دو عبارت زیر درست‌اند.

$$D(\underline{v}\cdot\underline{w}) = (D_s\underline{v})\cdot\underline{w}+\underline{v}\cdot(D_s\underline{w})$$

$$D_s(\underline{v}\times\underline{w}) = (D_s\underline{v})\times\underline{w}+\underline{v}\times(D_s\underline{w})$$

مسأله ۱-۴۰ : همان حرکت در صفحهٔ مسألهٔ ۱-۳۶ را برای یک جسم در نظر داشته و این بار فرض کنید، مؤلفه‌های شتاب را در دو راستایِ دیگر مانندِ راستایِ طولی و جانبیِ جسم(a_{xB} , a_{yB})، اندازه گرفته و در اختیار دارید. البته این بار اندازهٔ سرعتِ دورانِ راستای طولیِ جسم در این صفحه(r) را نیز اندازه‌گیری نموده و دارید.

الف) الگوریتمی بدهید که با در دست داشتنِ سه اندازه‌گیری بالا از ابتدا تاکنون، مکانِ جسم را در لحظهٔ کنونی بدهد.

ب) در مورد سرعت لحظه‌ای جسم چگونه می‌توان عمل کرد. چه در دو راستایی که شتاب، اندازه‌گیری می‌گردد و چه نسبت به همان ناظرِ چسبیده به صفحه و چه به لحاظ فقط اندازه.

مسألهٔ ۱-۴۱ : در چرخ و فلک زیر بازای سه زاویهٔ α,β,γ و مشتقهایشان شتاب نقطهٔ A را از دید دستگاه چسبیده به زمین و نسبت به یک نقطهٔ دلخواهِ زمین بیابید.