دانشکده مهندسی برق

گروه کنترل و سیستم

بنام خداوند جان وخرد

فیزیک۱

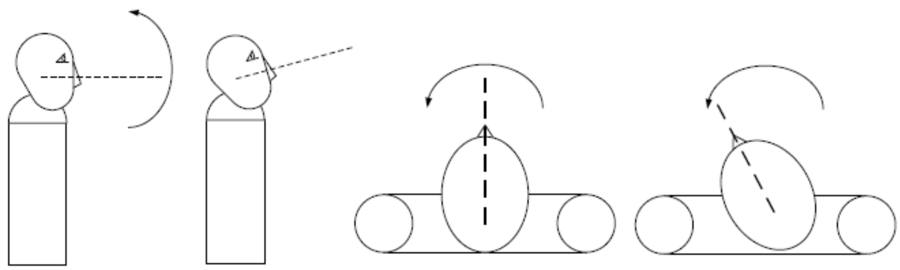
۱۳۰۷ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس:حیرانی نوبری

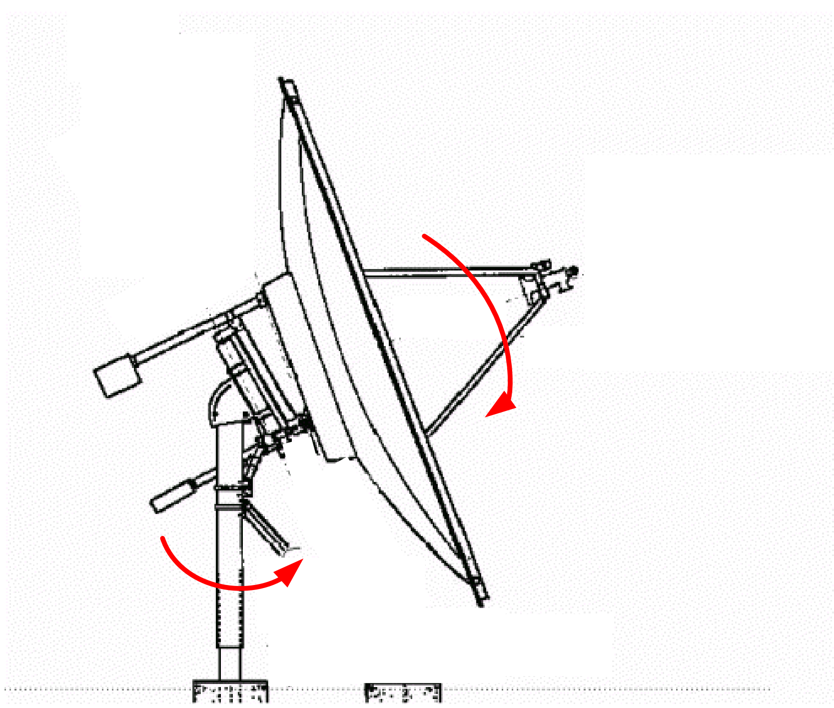
تمرین سری سوم

مهلت تحویل:

آیا تا به حال به این موضوع فکر کرده‌اید که گردن شما چند محور دوران دارد؟ زمانی که شخصی بخواهد به دنیای اطرافش بنگرد، گردنش را به دو صورت دوران می‌دهد. یا به اصطلاح می‌گوییم این شخص از دو درجه آزادی استفاده می‌کند. این دو درجه آزادیِ حرکت دورانی گردن، در شکل زیر نشان داده شده است.



آنتن نمونه‌ی دیگری از سیستم دو درجه آزادی مانند گردن انسان است. همانطور که در شکل مشاهده می‌کنید. دو محور دوران وجود دارند که ماهواره با چرخش حول آن‌ها و به اندازه‌ی زاویه‌ای مشخص، ماهواره مورد نظر را پیدا و دنبال می‌کند.



همچنین دستگاه زاویه‌سنجی که در سایت درس نشان داده شده است نیز دارای دو درجه آزادی یا قابلیت دوران حول دو محور خود می‌باشد.

در شکل فوق جهت تغییر زوایای دوران نشان داده شده است. این دستگاه با این دو دوران نقطه‌ی مشخص به عنوان مثال یک ستاره را در آسمان می‌بیند.

با توجه به مثال‌های ارائه شده، میز دو درجه آزادی را تعریف می‌کنیم. میز دو درجه آزادی قابلیت دوران حول دو محور خود را دارد. سعی کنید این میز را در آنتن ماهواره و دستگاه زاویه‌سنج تصور نمایید.

اگر بخواهیم با استفاده از همین دستگاه زاویه‌سنج، از مرکز لنز آن (نقطه O) هدفی(نقطه‌ی A) را نشانه رفته و بردار مرکز لنز به آن هدف (بردار r_{OA}) را در دستگاه چسبیده به زمین (دستگاهe) بیان نماییم، لازم است همان دو زاویه‌ی دوران (فرضاً θو φ) را داشته باشیم. دستگاه زاویه‌سنج نیز همین دو زاویه را می‌سنجد.

رسیدن از θو φ به سه مولفه‌ی یک بردار (فرضاً مولفه‌های z, y, x بردار r_{OA}) در دستگاهی مشخص(فرضاً e) را *سینماتیک مستقیم* می‌گوییم. و به همین ترتیب، رسیدن از سه مولفه‌ی یک بردار در دستگاهی مشخص به دو زاویه‌ی θو φ را *سینماتیک معکوس* می‌گوییم.

یکی از دلایل این تمرین و مسائلی که در کلاس مطرح شد، پرداختن به موضوع سینماتیک معکوس و مستقیم است.

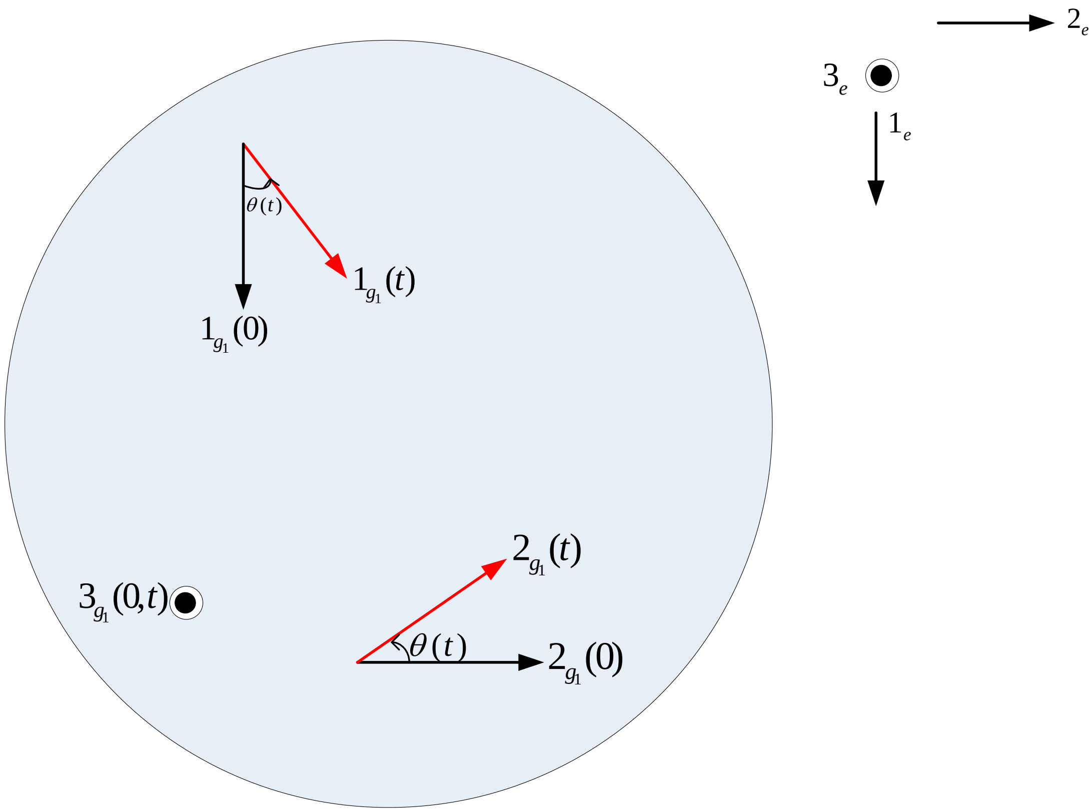
اگر سعی کرده باشید میز دو درجه‌ی آنتن ماهواره و دستگاه زاویه‌سنج را تصور کرده باشید، حتماً به این نتیجه رسیدید که اگر برای هر کدام از این میزها دستگاهی تعریف کنید، این دستگاه‌ها هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند که بخواهیم از مبدأ استفاده کنیم و حتی استفاده از تعریف اشتباه دستگاه‌ها مبنی بر داشتن مبدأ، کاملاً ما را به اشتباه انداخته و نمی‌توانیم محاسبات خود را پی بگیریم. بنابراین نباید نقطه‌ی مبدأ برایمان موضوعیت داشته باشد.

برای اینکه تعریف این دو زاویه‌ی دوران θو φ را درک نمایید، باید بتوانید دستگاه‌هایی تعریف نمایید که با دوران‌های ساده بین دوبه‌دوی آن‌ها (حول یک محور مشترک)، این زوایا تعریف شوند.

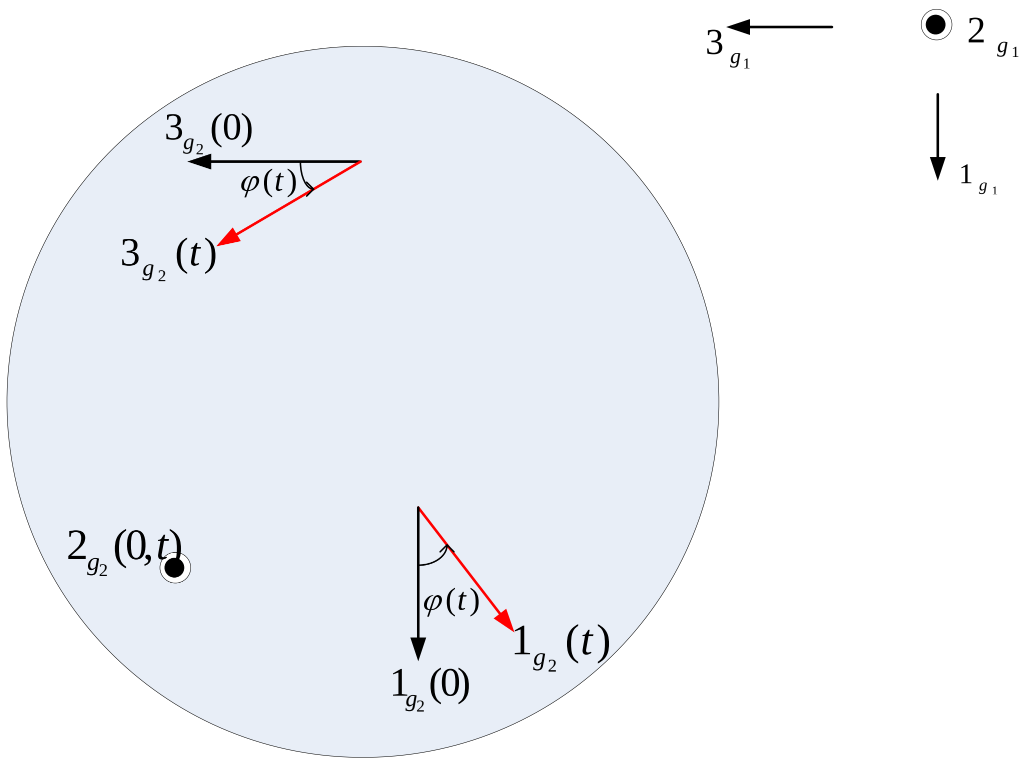
شما چه پیشنهادی برای تعریف این دستگاه‌ها دارید؟ اگر از مسأله‌ی چرخ و فلک در جلسه‌ی نهم کمک بگیرید چه دستگاه‌هایی پیشنهاد می‌کنید؟

پیشنهادی که ما برای شما داریم این است که یکی از دستگاه‌ها را دستگاه چسبیده به زمین درنظر بگیرید. دستگاه دیگر را چسبیده به میز اول در نظر بگیرید که نسبت به دستگاه چسبیده به زمین یک درجه آزادی دوران دارد. دستگاه دیگر را نیز چسبیده به میز دوم در نظر بگیرید که نسبت به میز اول یک درجه آزادی دوران دارد. دستگاه چسبیده به زمین را با e، دستگاه چسبیده به میز اول را با g_1 و دستگاه چسبیده به میز دوم را با g_2 نشان می‌دهیم.

از شکلی که برای مسأله چرخ و فلک جلسه‌ی نهم ترسیم نمودیم برای ترسیم شکل‌های میز دو درجه آزادی بهره می‌گیریم. توجه داشته باشید که زوایا در این شکل‌ها به صورت راستگرد تعریف شده‌اند.

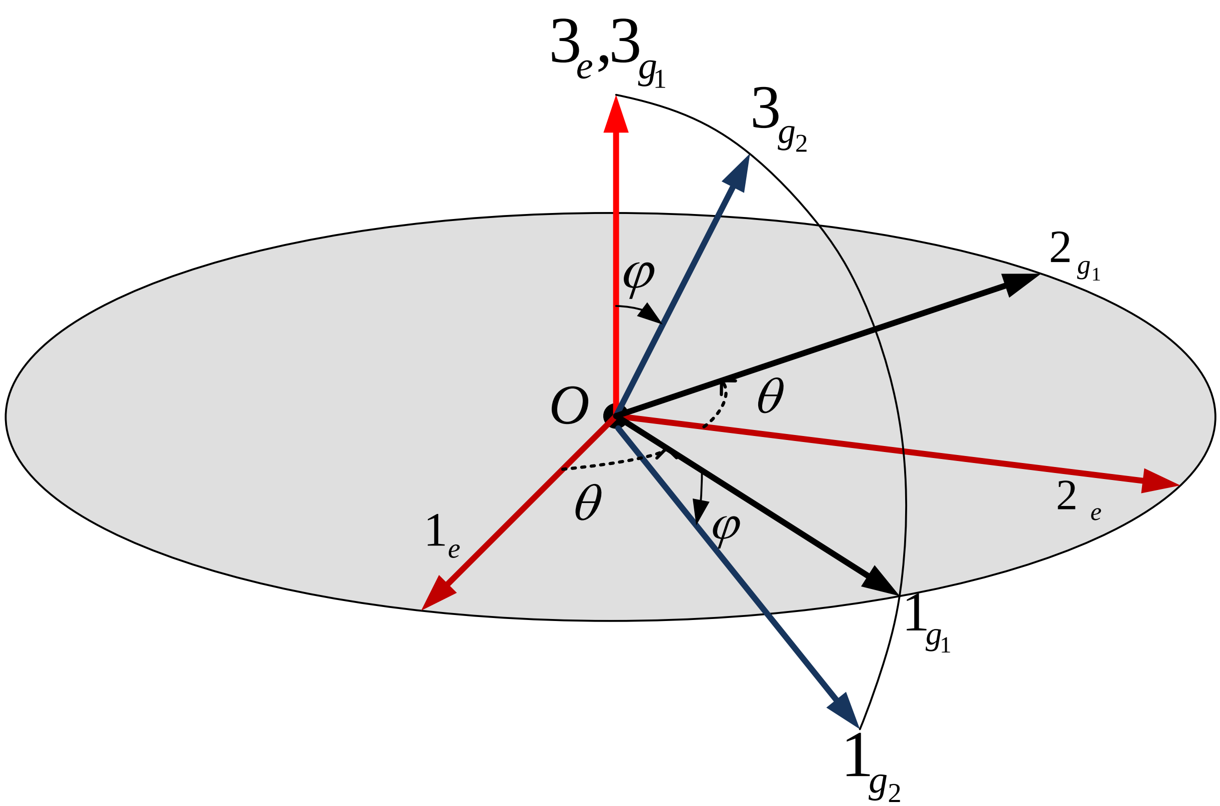


با توجه به شکل فوق محور دوران مشترک بین g_1 و e محور سوم آن است و دوران به اندازه‌ی $\theta(t)$ حول این محور انجام می‌شود.



با توجه به شکل فوق نیز محور دوران مشترک بین g_1 و g_2 محور دوم آن است و دوران به اندازه‌ی $\varphi(t)$ حول این محور انجام می‌شود.

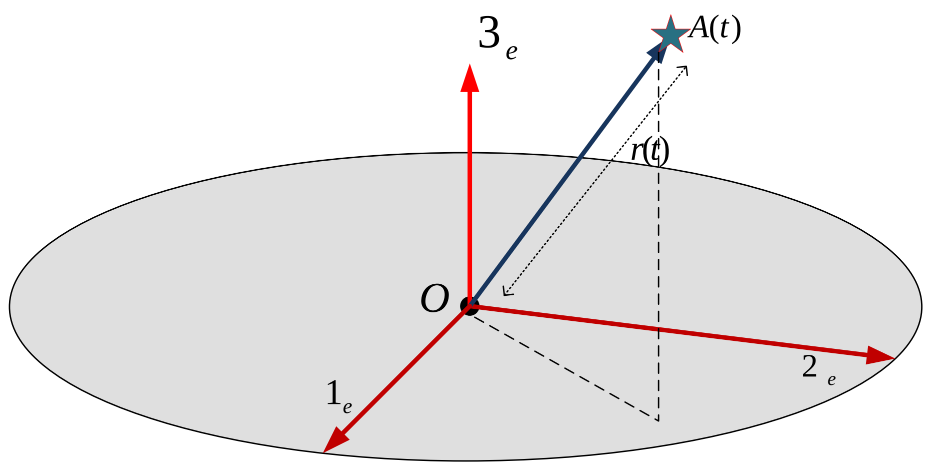
به منظور داشتن دیدی سه بعدی این سه دستگاه را به صورت شکل زیر می‌توانیم نشان دهیم.



(تذکر: این شکل در تمرینی که قبلاً روی سایت قرار گرفت، اصلاح شده است)

با توجه به توضیحات داده شده، به سوالات زیر پاسخ دهید.

حال فرض کنید جسم A در لحظه‌ی t در A(t) و به فاصله‌ی r(t) از نقطه‌ی O قرار گیرد(مطابق شکل زیر).



- به نظر شما ساده‌ترین بیان بردار r_{OA} در کدام دستگاه و به چه صورت است؟
- بیان بردار r_{OA} را در دستگاه g_2 بدست آورده و با استفاده از ماتریس تبدیل بین دستگاه‌های g_1 و g_2، بردار r_{OA} را در دستگاه g_1 بیان نمایید.
- ماتریس تبدیل بین دو دستگاه g_2 و e را بدست آورده و سپس بردار r_{OA} را در دستگاه e بیان نمایید.

با استفاده از نتایج این قسمت به این نتیجه باید برسید که در صورت دانستن r، θ و φ می‌توانید به ${}^e r_{OA}$ برسید و بالعکس با دانستن ${}^e r_{OA}$ می‌توانید با حل دستگاه معادلات غیرخطی به r، θ و φ برسید.

- معادلات معکوس را حل نموده و با استفاده از ${}^e r_{OA}$ پاسخی برای r، θ و φ ارائه دهید.

همانطور که دانستن رابطهٔ ${}^e r_{OA}$ با زوایای دوران ، در بسیاری از کارها نیاز است دانستن سرعت و شتاب از دید آن نیز مفید است.

- سرعت بردار r_{OA} از دید دستگاه g_2 و بیان شده در خودش را به دست آورید؟
- با استفاده از رابطه‌ای که برای مشتق حاصلضرب ماتریس دوران در یک بردار که در جلسه هشتم بیان شد، سرعت بردار r_{OA} را از دید دستگاه g_1 و بیان شده در خودش به دست آورید.
- سرعت بردار r_{OA} را از دید دستگاه e و در خودش بیان نمایید.

- مقادیر زیر را بدست آورید.

$$^{g_1}(D_{g_1}r_{OA}),{}^{g_2}(D_{g_1}r_{OA}),{}^{e}(D_e r_{OA}),{}^{g_1}(D_e r_{OA}),{}^{g_2}(D_e r_{OA}),{}^{g_2}(D^2{}_e r_{OA})$$

- بیان سرعت دوران $\omega_{g_1,e}$را در دستگاه‌های g_1 و e بدست آورید. بیان سرعت دورانی ω_{g_1,g_2} را در دستگاه‌های g_1 و g_2 بدست آورید. با توجه به برقراری خاصیت جمع برداری برای بردارهای سرعت دورانی، بیان سرعت دورانی $\omega_{g_2,e}$را در دستگاهی که محاسبه‌ی آن آسان‌تر است بدست آورید.

تمرین برای روز شنبه)

در جلسه بعد روش دیگری برای محاسبه‌ی $^{g_2}(D_e r_{OA})$ و $^{g_2}(D^2{}_e r_{OA})$ ارائه می‌شود. با استفاده از این روش این دو را بدست آوردید.

راهنمایی: اگر با دوران حول محور اول به اندازه‌ی θاز دستگاه t به دستگاه s برسیم، ماتریس دوران به صورت زیر است:

$$^t_sC_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

و اگر با دوران حول محور دوم به اندازه‌ی θاز دستگاه t به دستگاه s برسیم، ماتریس دوران به صورت زیر است:

$$^t_sC_2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & 0 & \sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

و اگر با دوران حول محور سوم به اندازه‌ی θاز دستگاه t به دستگاه s برسیم، ماتریس دوران به صورت زیر است:

$$^t_sC_3(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$