

تربیت هر اول - گفتن در محلول سینه

۱- چند وجه استندارد $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید A مسطح قطعی باشند.

- الف - فرض کنید دو تابع متفاوت یک جواب شدنی اساسی را بدست دهند. نشان دهید که آن جواب یکتا و بدیهه است و نگردد.
- ب - یک جواب یکتا بهترین در نظر بگیرید. آیا این درست است که آن جواب مسطحه دو یا چند تابع متفاوت می باشد؟ صحبت کنید و در کنید.
- ج - فرض کنید یک جواب یکتا بهترین باشد. آیا این درست است که یک جواب یکتا موجود باشد که بهترین می باشد؟ صحبت کنید و در کنید.

۲- چند وجه استندارد $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A $m \times n$ و A لظیف مسطح قطعی باشد. درستی یا نادرستی هر یک

- الف - اگر $n = m + 1$ آنگاه P حداکثر دو جواب یکتا شدنی دارد.
- ب - مجموعه هم جوابی یکتا استندارد است.
- ج - در هر جواب یکتا بیش از m تغییر مثبت نمی تواند وجود داشته باشد.
- د - اگر بیش از یک جواب یکتا وجود داشته باشد آنگاه تعداد سایر جواب یکتا نیز را جواب یکتا وجود ندارد.
- ه - اگر چندین جواب یکتا وجود داشته باشد آنگاه حداقل دو جواب شدنی یکتا وجود دارد که یکتا باشد.

۳- $\max \{c^T x, d^T x\}$ را بر مجموعه P در نظر بگیرید. اگر این مسطح یک جواب یکتا داشته باشد آنگاه c و d یک جواب یکتا یکتا را برای P است نیز داشته باشد.

۴- چند وجه استندارد $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید A $m \times n$ ماتریس مسطح قطعی باشند و هم جوابی

- الف - $x \in P$ دقیقاً m مؤلفه مثبت داشته باشد.
- ب - نشان دهید x یک جواب شدنی یکتا است.
- ج - نشان دهید نتیجه مثبت الف درست نخواهد بود اگر فرض کنیم m حذف شود.

۵- فرض کنید P چند وجهی $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i x \geq b_i, i=1, \dots, m\}$ باشد. فرض کنید u و v جوابهای شدنی یکتا باشند که در P قرار دارند. فرض کنید $a_i u + (1-u) a_i v = b_i, i=1, \dots, n-1$ مسطح قطعی باشد. فرض کنید $L = \{\lambda u + (1-\lambda) v \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ و $a_i z = b_i, i=1, \dots, n-1$ باشد.

۶- فرض کنید P, Q چند وجهی در \mathbb{R}^n باشند. قرار دهید $P+Q = \{x+y \mid x \in P, y \in Q\}$ نشان دهید $P+Q$ چند وجهی است و تقاطع آن مجموعه یکتا است P, Q .

تمرینات سر درج - فضاها و بردار

هکت شذنی: فرض کنید x عضو از فضای P باشد. بردار $d \in \mathbb{R}^n$ را یک هکت شذنی در x می‌گویند اگر $x + \theta d \in P$ وجود داشته باشد بطوریکه

۱- فرق کنید x عضو از فضای P باشد $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ $d \in \mathbb{R}^n$ یک هکت شذنی در x است اگر تنها اگر $Ad \geq 0$ و برای هر $\alpha > 0$ $x + \alpha d \geq 0$

ب- فرض کنید $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$ و بردار $x = (0, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. مجموعه هکت شذنی در x را تعیین کنید.

ج- یک جواب شذنی x برای سام استاتیک را در نظر گرفته و قرار دهید $Z = \{z \mid x_i = 0\}$. نشان دهید که x یک جواب بهینه است اگر و تنها اگر هزینه بهینه سام

$$\begin{aligned} \min. & c^T d \\ \text{s.t.} & Ad \geq 0 \\ & d_i \geq 0 \quad i \in Z \end{aligned}$$

۲- یک سام برنامه‌ریزی خطی استاتیک را در نظر بگیرید و فرض کنید x^* یک جواب شذنی است. یک پایه بهینه متناظر با x^* در نظر بگیرید. فرق کنید B و N ماتریس از ستون‌های پایه و غیر پایه باشد. فرق کنید I مجموعه اندیس متغیرهای غیر پایه است.

الف- نشان دهید اگر $I = \emptyset \iff x^*$ یک جواب بهینه است

ب- نشان دهید x^* بهینه کلی است اگر و تنها اگر هزینه بهینه سام برنامه‌ریزی خطی برابر هزینه x^* باشد.

$$\begin{aligned} \min. & \sum_{i \in I} x_i \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x_i = 0 \quad i \in N \setminus I \\ & x_i \geq 0 \quad i \in B \cup I \end{aligned}$$

۳- فرق کنید B و \bar{B} ماتریس‌های پایه در قبل و بعد از یک تکرار سیمپلکس. فرض کنید $a_{B(k)}$ و $a_{\bar{B}(k)}$ به ترتیب ستون ورودی و خروجی باشند. نشان دهید

$$\bar{B} - B = (a_{\bar{B}(k)} - a_{B(k)}) e_k^T$$

که در آن e_k بردار واحد k ام است.

۴- نشان دهید در I روی سیمپلکس، اگر یک متغیر تعقیب غیر پایه شود و آن متغیر دوباره پایه شود، متغیر تعقیب تعقیب غیر پایه می‌ماند. نشان دهید که آن متغیر متغیر است و آن متغیر متغیر است.

دریافت هر دو معادله در یک خط

الف - تمام ضرایب مثبت $C_1 x_1 + C_2 x_2$ را بر قید های

$$x_2 - 3 \leq x_1 \leq 2x_2 + 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

در نظر بگیرید. شرایط لازم، کافی را برای (C_1, C_2) بفرمایید که هزینه بهینه متناهی باشد، یا بی‌نهایت.

ب - برای هر تمام برنامه های خطی عمومی، همیشه هم بر طره های هزینه ای را که یک هزینه بهینه متناهی منجر می شود، در نظر بگیرید.

آیا این مجموعه یک قید دوری است؟

۲- الف - قرار دهید $\{ (x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 0 \}$ نقاط رئی و نقاط صدی P را بیابید.

ب - قرار دهید $\{ (x_1, x_2) \mid 4x_1 + 2x_2 \geq 8, 2x_1 + x_2 \leq 8 \}$ نقاط رئی و نقاط صدی P را بیابید.

۳- فرض کنید P یک چندوجهی و در واقع یک نقطه رئی و در آن می توان هر عضو آن را به صورت یک ترکیب خطی نقاط رئی P نوشت.

مفروضات مستقیم فقط یک شعاع صدی بیان کرد P .

۴- در حل یک تمام برنامه های خطی استاندارد با روش همبستگی، جدول زیر به دست آمده است.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	-1	0	β	1
x_4	0	0	2	1	γ	2
x_1	1	0	4	0	δ	3
C_j	0	0	C_3	0	C_5	

فرض کنید β متغیر است و A ماتریس همانی است.

الف - شرایط لازم، کافی را برای آن که پایه متناظر به جدول بالا بهینه باشد، تعیین کنید.

ب - فرض کنید که این پایه بهینه است و $C_3 = 0$. یک جواب بدنی نامفروض، غیر از آن که متناظر به جدول بالا است، پیدا کنید.

ج - فرض کنید $\beta > 0$. نشان دهید که یک جواب نامفروض بدنی به وجود نمی آید به تقریر C_3 و C_5 وجود ندارد.

د - فرض کنید که پایه متناظر به جدول بالا بهینه باشد. هم چنین فرض کنید که در تمام اعضای b_1, b_2, b_3 عموماً شش گرانگس برآید.

ع - چنان تعیین کنید که این پایه هم چنان بهینه باقی می ماند.

ه - فرض کنید که پایه متناظر به جدول فوق بهینه است. هم چنین فرض کنید C_1 در تمام اعضای b_1, b_2, b_3 شش گرانگس برآید.

و - این را برابر با C_1 تعیین کنید که این پایه هم چنان بهینه باقی می ماند.