

### بسمه تعالی

تمرینهای تحویلی شماره ۱:

بخش اول:

توجه: تاکید می شود قبل از شروع به حل تمرینها تسلط کافی به متن درس پیدا کرده باشد.

### سوالات

۱. هر یک از عملیات زیر را انجام دهید(ساده کنید)

$$\text{الف) } \frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$$

$$\text{ب) } (2i-1)^2 \left( \frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i} \right)$$

اگر  $z_1 = 1-i$  و  $z_2 = -2+4i$  و  $z_3 = \sqrt{3}-2i$  باشند، مطلوب است محاسبه

$$\text{الف) } \left| z_1(\overline{z_2 + z_3}) \right| \quad \text{ب) } \operatorname{Im}\left(\frac{z_1 z_2}{z_3}\right)$$

۳. اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را از معادله  $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$  تعیین کنید.

جوابها:

$$1. \text{ الف) } -3-2i \quad \text{ب) } -\frac{11}{2} - \frac{23}{2}i \quad \text{الف) } i+2$$

$$2. \text{ الف) } \frac{6\sqrt{3}+4}{7} \quad \text{ب) } \sqrt{22-8\sqrt{3}} \quad \text{الف) } y=2 \quad x=-1$$

بخش دوم:

توجه: تاکید می شود قبل از شروع به حل تمرینها تسلط کافی به متن درس پیدا کرده باشد.

### سوالات

۱. صورت مثلثاتی (قطبی) هر یک از اعداد مختلط زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{4+4i}{\sqrt{2}} \quad \text{ب) } -2\sqrt{3}-2i \quad \text{ج) } -i \quad \text{د) } -4$$

۲. حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد مختلط استاندارد بنویسید (صورت  $x+iy$ ).

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$$

۳. نشان دهید که

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad \text{الف)$$

$$(1+\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 2^n \cos^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right) \quad \text{ب)$$

4. معادله مختلط  $z^2 - z + 1 = 0$  را حل کنید.

5. مکانهای هندسی زیر در حوزه اعداد مختلط را رسم کنید.

الف) مکان تمام نقاطی که در معادله  $|z-i| = 2$  صدق می کند.

ب) ناحیه متشکل از همه نقاطی که  $|z+i| \leq 2$  باشد.

ج) مکان تمام اعداد مختلط  $z$  که  $\frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$

جوابها:

معادگذاری: به جای  $\cos \theta + i \sin \theta$  می نویسیم  $e^{i\theta}$ , یعنی به عنوان مثال  $e^{i\frac{\pi}{4}}$  یعنی  $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

$$4e^{i\pi} \quad (\text{د}) \quad e^{\frac{i3\pi}{2}} \quad (\text{ج}) \quad 4e^{\frac{i7\pi}{6}} \quad (\text{ب}) \quad 4e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad (\text{۲})$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{۴})$$

5. الف) دایره ای به مرکز  $(0,1)$  و شعاع 2.

ب) ناحیه بین دو دایره به مرکز  $(1,0)$  و  $(-1,0)$  و شعاع 2.

تمرینهای تحویلی شماره 2:

بخش اول:

سوالها:

1. مختصات قطبی نقطه های  $p_1$  و  $p_2$  به صورت  $p_1(2, \frac{-5\pi}{6})$  و  $p_2(-3, \frac{\pi}{3})$  است، مختصات دکارتی آنها را بنویسید.

2. مختصات دکارتی نقاطی از صفحه در زیر داده شده است، مختصات قطبی آنها را بیابید.

$$p_4(0, -1) \quad (\text{د}) \quad p_3(2, 0) \quad (\text{ج}) \quad p_2(-2, -2) \quad (\text{ب}) \quad p_1(-3, 3) \quad (\text{الف})$$

3. معادله خمهای زیر را در مختصات دکارتی بنویسید و از نظر هندسی معادله به دست آمده را توصیف کنید.

$$r = \frac{5}{3\sin\theta - 4\cos\theta} \quad (ج) \quad r = \sin\theta + \cos\theta \quad (ب) \quad r = -2\csc\theta \quad (الف)$$

$$r = \frac{2}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}} \quad (ذ) \quad r^2 = \csc 2\theta \quad (د)$$

جوابها:

$$p_2\left(-\frac{3}{2}, -3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و } p_1\left(-\sqrt{3}, -1\right) \quad .1$$

$$(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}) \quad (ب) \quad (3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}) \quad (الف) \quad .2$$

$$(1, \frac{3\pi}{2}) \quad (د) \quad (2, 0) \quad (ج)$$

3. الف) خط موازی محور  $x$  ها

$$ب) دایره ای به مرکز \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ و شعاع } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ج) خصی با شیب \frac{4}{3} \text{ و عرض از مبدأ } \frac{5}{3}$$

$$د) هذلزنی \ xy = \frac{1}{2}$$

$$ذ) بیضی به طول قطر بزرگ \sqrt{2} \text{ و طول قطر کوچک } \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بخش دوم:

سوالها:

1. نمودار خمهای به معادلات زیر در مختصات قطبی را رسم کنید.

$$r = 1 - \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \quad (ج) \quad r = 1 + \sqrt{2} \sin\theta \quad (ب) \quad r = 3 + \sin\theta \quad (الف)$$

$$r^2 = 9 \sin 2\theta \quad (د) \quad r = 2 \cos 3\theta \quad (ج)$$

2. نقاط برخورد منحنیهای زیر را تعیین کنید.

$$r = \cos\theta \text{ و } r = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta \quad (الف)$$

$$r^2 = 9 \sin 2\theta \text{ و } r = 3$$

راهنمایی:

۱. ج) ابتدا نمودار  $r = 1 - \cos \theta$  را رسم کرده، سپس نمودار را به اندازه  $\frac{\pi}{6}$  در جهت دایره مثلثاتی دوران

می دهیم(اگر  $\frac{\pi}{6}$  + بود در خلاف جهت دوران می دادیم).

تمرینهای تحویلی شماره ۳:

بخش اول:

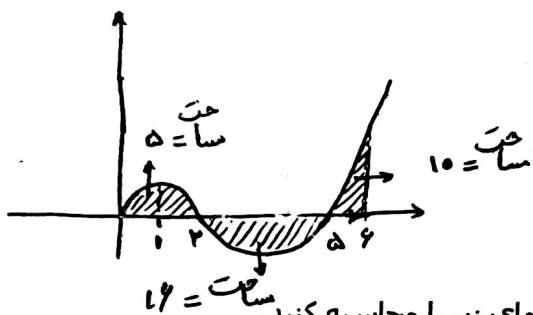
توجه:

۱. برای رسم تابع  $|f(x)| = y$  ابتدا نمودار  $y = f(x)$  را رسم کرده سپس قسمتهای پایین محور  $x$  ها را بالا می آوریم.

۲. در این تمرینها برای حل هیچ انتگرالی از روش‌های انتگرالگیری استفاده نشود.

سوالات:

۱. با توجه به شکل زیر حاصل انتگرالها را بنویسید.



$$\int_{-6}^0 f(-x) dx$$

$$\int_0^6 |f(x)| dx$$

$$\int_0^6 f(x) dx$$

۲. فقط و فقط با توجه به تعبیر انتگرال معین به عنوان مساحت، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$\int_0^3 |2-x| dx$$

$$\int_{-1}^2 (1-2x) dx$$

$$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \\ x-2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

که در آن  $\int_0^3 f(x) dx$  است.

۳. مقدار متوسط توابع زیر را روی بازه های مشخص شده بیابید.

$$\text{(الف) تابع } y = \sqrt{2-x^2} \text{ روی بازه } [-\sqrt{2}, 0]$$

$$\text{(ب) تابع } y = \sin(x^3) \text{ روی بازه } [-3, 3]$$

جوابها:

1. الف) -1

ب) 31

ج) -1

2. الف) 0

ب) 5

ج)  $\frac{9\pi}{2}$

3. الف)  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

راهنمایی:

د.2)  $2x - x^2$  را مربع کامل کنید.

بخش دوم:

توجه: قبل از شروع به حل تمرینها تسلط کافی به متن درس پیدا کرده باشید.

سوالات:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

1.  $\int (5x^2 - x^3) dx$

2.  $\int \left(\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$

3.  $\int (\sqrt{x})^3 dx$

4.  $\int \frac{2x^2 - 3x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

5.  $\int (6\cos 3x + 12\sin 2x) dx$

6.  $\int e^{-3x+4} dx$

7.  $\int_1^2 (5x + 5) dx$

8.  $\int_0^1 8e^{2t} dt$

9.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

10.  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{4+x^2}$

11.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cot^2 x) dx$

12.  $\int_{-\ln 3}^{\ln 2} e^{4x} dx$

13.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx$

14.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx$

15.  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx$

16.  $\int_0^4 |x-2| dx$

17.  $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx$

18.  $\int_3^4 f''(x) dx$

19.  $\int_1^{100} \frac{dx}{x^2}$

20.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx$

21.  $\int e^x dx$

22.  $\int_2^6 \left(\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \cot^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) dx$

23.  $\int_1^3 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2} dx$

جوابها:

$$\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{18}{13}x^2\sqrt[5]{x} \cdot .4$$

$$17 \cdot .7 \quad \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} \cdot .3 \quad \frac{-5}{x} + \frac{2}{x^2} \cdot .2 \quad \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \cdot .1$$

$$\frac{-1}{3}e^{-3x+4} \cdot .6 \quad 2\sin 3x - 6\cos 2x \cdot .5$$

$$\frac{10-\pi}{8} \cdot .11 \quad \frac{\pi}{8} \cdot .10 \quad \pi \cdot .9 \quad \approx 25.556 \cdot .8$$

$$3 \cdot .15 \quad \frac{\pi}{2} \cdot .14 \quad \sqrt{3} \cdot .13 \quad \approx 3.996 \cdot .12$$

$$f'(4) - f'(3) \cdot .18 \quad 11\frac{1}{4} \cdot .17 \quad 4 \cdot .16$$

$$\frac{-4\pi+9}{\pi} \cdot .22 \quad \frac{1}{y}e^y \cdot .21 \quad -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9}\sqrt{3} \cdot .20 \quad 0.99 \cdot .19$$

$$\frac{-1}{3} \cdot .23$$

راهنمایی:

$$1 \quad x > 0$$

$$\operatorname{sgn} x = 0 \quad x = 0$$

$$-1 \quad x < 0$$

تمرینهای تحویلی شماره 4:

بخش اول:

توجه:

1. قبل از حل تمرینهای این قسمت ستن درس را دقیق و مثالهای آن را با دقت حل کرده باشید.

2. سوالهایی که ایراد دارید یا با استفاده از راهنمایی حل می کنید با نهادی مانند \* متغیر کرده و حتما بعد از زمانی مشخص مجدد حل کنید.

سوالهای:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{30} \cdot \frac{1}{x^2} dx \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \quad 3. \int \tan x dx$$

$$4. \int_0^2 xe^{4-x^2} dx \quad 5. \int_0^3 \frac{dx}{1+x} \quad 6. \int_0^1 x(1-x)^{20} dx$$

$$7. \int_0^1 \cos x \cdot \cos(\sin x) dx \quad 8. \int \frac{x}{1+x^4} dx \quad 9. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3x^2}$$

$$10. \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} \quad 11. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad 12. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$13. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$14. \int \frac{e^{2x}+1}{e^x} dx$$

$$15. \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx$$

$$16. \int \frac{3x+4}{(x-1)^{100}} dx$$

$$17. \int \frac{x^5}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

$$18. \int_{\frac{-1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{x}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$$

$$19. \int \sqrt{\tan x} \sec^2 x dx$$

$$20. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$21. \int_{-1}^2 \frac{e^x}{e^x + e} dx$$

$$22. \int \frac{\sqrt[3]{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$23. \int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$$

24. اگر  $f$  تابعی پیوسته باشد در موارد زیر  $f(2)$  را بایابد.

$$a) \int_0^x f(t) dt = x^2(1+x)$$

$$b) \int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x)$$

25. مشتقهای زیر را محاسبه کنید:

$$a) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$b) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$$

جوابها:

$$\frac{1}{2}(e^4 - 1) . 4$$

$$-\ln|\cos x| . 3$$

$$\frac{-2}{1+\sqrt{x}} . 2$$

$$\frac{-1}{31} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{31} . 1$$

$$\frac{1}{2} \arctan(x^2) . 8$$

$$\sin(\sin 1) . 7$$

$$\frac{1}{462} . 6$$

$$3.5$$

$$\frac{1}{2} . 12$$

$$\arctan(e^x) . 11$$

$$\sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) . 10$$

$$\frac{\pi}{8\sqrt{3}} . 9$$

$$-\ln|\cos x| - \frac{1}{4} \cos^4 x + \cos^2 x . 15$$

$$e^x - e^{-x} . 14$$

$$\frac{\pi}{6} . 13$$

$$\frac{-3}{98(x-1)^{98}} - \frac{7}{99(x-1)^{99}} . 16$$

$$\frac{1}{5} (x^2 - 4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} (x^2 - 4) \sqrt{x^2 - 4} + 16 \sqrt{x^2 - 4} . 17$$

$$\ln\left(\frac{e+1}{2}\right) . 21$$

$$\frac{32}{3} . 20$$

$$\frac{2}{3} \tan x \sqrt{\tan x} . 19$$

$$\frac{16}{15} . 18$$

$$\frac{3}{4} \sqrt[3]{\tan^4 x} . 22$$

$$2 \ln(e^x - 1) - x . 23$$

$$a: 16 , b: 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} . 24$$

.25

$$a: \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$b: (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x)$$

راهنمایی:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} .3$$

10. در انتگرالهای شامل  $\sqrt{ax+b}$  تغییر متغیر  $u'' = ax+b$  بسیار مناسب است.

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} .11$$

17. تغییر متغیر  $u = 4 - x^2$  تغییر متغیر مناسب است.

18. مجدد تأکید می شود از مطلب گفته شده برای محاسبه انتگرالهای شامل  $\sqrt{ax+b}$  غفلت نکنید.

23. می توان به این صورت عمل کرد که ابتدا بنویسید :

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{1}{e^x - 1} dx$$

حال انتگرال اول با کمی دقت قابل محاسبه است، در مورد

انتگرال دوم، صورت و مخرج را در  $e^{-x}$  ضرب کنید.

24. از طریق تساوی مشتق بگویید.

بخش دوم:

سوالات:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \int \frac{x^3}{2+x} dx$$

$$2. \int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$3. \int \cos^4 x dx$$

$$4. \int \cos 2x \cdot \sin 8x dx$$

$$5. \int \frac{x}{4x^2+12x+13} dx$$

$$6. \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$7. \int \tan^6 x \sec^4 x dx$$

$$8. \int \tan^5 x \sec^7 x dx$$

جوابها:

$$-\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) .2$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln|x+2| .1$$

$$-\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{12} \cos 6x .4$$

$$\frac{3}{8}x + \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x .3$$

$$-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x .6$$

$$\frac{1}{8} \ln(4x^2+12x+13) - \frac{3}{8} \tan^{-1}\left(x+\frac{3}{2}\right) .5$$

$$\frac{1}{11} \sec^{11} x - \frac{2}{9} \sec^9 x + \frac{1}{7} \sec^7 x . 8 \quad \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x . 7$$

راهنمایی:

**4.** در انتگرالهای اینженینی از یکی از فرمولهای تبدیل ضرب به جمع مثلثاتی استفاده می کنیم، یعنی فرمولهای زیر:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

**6.** در انتگرالهای به فرم  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  برای محاسبه اگر  $m$  فرد بود از تغییر متغیر  $u = \cos x$  و اگر  $n$  فرد بود از تغییر متغیر  $u = \sin x$  استفاده می کنیم.

**7.** در انتگرالهای به فرم  $\int \sec^m x \tan^n x dx$  یا باید تغییر متغیر  $u = \sec x$  را به کار برد یا  $u = \tan x$  را، که مبنای انتخاب این است که باید پس از جدا کردن  $du$  از عبارت زیر انتگرال، بتوانیم باقیمانده را بر حسب « $u$ » بنویسیم، دقت کنید در اینجا از فرمولهای مربوط به نوشتن  $\sec x$  بر حسب  $\tan x$  و برعکس استفاده می شود.

### تمرینهای تحویلی شماره 5:

#### بخش اول:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

- |  |                              |                           |
|--|------------------------------|---------------------------|
| 1. $\int x \cos x dx$                        | 2. $\int (x+5) e^x dx$       | 3. $\int \arccos x dx$    |
| 4. $\int x (\ln x)^2 dx$                     | 5. $\int e^{3x} \cos 2x dx$  | 6. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ |
| 7. $\int \frac{\ln(\ln(\sin x))}{\cot x} dx$ | 8. $\int x (\arccot x)^2 dx$ | 9. $\int x^2 e^x dx$      |

جوابها:

$$x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} . 3 \quad (x+4)e^x . 2 \quad x \sin x + \cos x . 1$$

$$\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 . 4$$

$$\frac{3}{13} e^{3x} \cos(2x) + \frac{2}{13} e^{3x} \sin 2x . 5$$

$$2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} . 6$$

$$\frac{1}{3} e^x . 9 \quad \frac{1}{2} (x^2 + 1)(\cot^{-1} x)^2 + x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) . 8 \quad \ln(\sin x)(\ln(\ln \sin x) - 1) . 7$$

راهنمایی:

۶. محدد تاکید می شود از مطلب گفته شده برای محاسبه انتگرالهای شامل  $\sqrt{ax+b}$  عملت نکند.  
 $\ln \sin x = u$ . ۷

بخش دوم:

سوالات:

توجه: می توانید در صورت نیاز از حاصل انتگرال ریر بدون به دست آوردن آن استفاده کنید.

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|)$$

انتگرالهای ریر را محاسبه کنید.

۱.  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

۲.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

۳.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

۴.  $\int_{-2}^2 \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$

۵.  $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$

۶.  $\int_{\ln\sqrt{3}}^0 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$

۷.  $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{4-9x^2} dx$

۸. انتگرال  $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{9-x^2}} dx$  را به دو روش محاسبه کنید. در کدام روش در کدام روش می توان انتگرال را محاسبه کرد؟

جوابات:

$$-\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) . 2$$

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x|} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) . 1$$

$\frac{\pi}{4} . 4$

$$-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} . 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) . 6$$

$$\frac{1}{2} \tan^{-1}(x+2) + \frac{1}{4} \frac{2x+4}{x^2+4x+5} . 5$$

$$\frac{64}{1215} . 7$$

$$-\sqrt{9-x^2} \left(6 + \frac{1}{3}x^2\right) + \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) . 8$$

تمرینهای تحولی شماره ۶ :

بخش اول:

## سوالها:

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \int \frac{dx}{7-x^2}$$

$$2. \int \frac{x}{5x^2+9x-2} dx$$

$$3. \int \frac{(5x^2+3x-2)dx}{x^3+2x}$$

$$4. \int \frac{dx}{x^5-x^3}$$

$$5. \int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx$$

$$6. \int \frac{2x+1}{9x^2+6x+2} dx$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$8. \int \frac{d\theta}{3\sin\theta - 4\cos\theta}$$

$$9. \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$$

$$10. \int \sqrt{e^x+3} dx$$

## جوابها:

$$\frac{1}{55} \ln(5x-1) + \frac{2}{11} \ln(x+2) .2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}} \right| .1$$

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - \ln x .4$$

$$3 \ln(x^2+2) + \frac{3}{2} \sqrt{2} \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right) - \ln x .3$$

$$\frac{7}{24} \ln|x^2-2x+4| + \frac{5}{12} \ln|x+2| + \frac{1}{4\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) .5$$

$$2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| .7$$

$$\frac{1}{9} \ln(9x^2+6x+2) + \frac{1}{9} \arctan(3x+1) .6$$

$$-\ln(e^x+1) + 2 \ln(e^x+2) .9$$

$$\frac{1}{5} \ln(2 \tan(\frac{\theta}{2}) - 1) - \frac{1}{5} \ln(\tan(\frac{\theta}{2}) + 2) .8$$

$$2\sqrt{e^x+3} - \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{3e^x+9}-3}{\sqrt{3e^x+9}+3} \right| .10$$

## راهنمایی:

5. ابتدا می توان انتگرال را به صورت زیر نوشت:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx = \int \frac{x^2}{x^3+8} dx + \int \frac{1}{x^3+8} dx$$

حال انتگرال اول با کمی دقت قابل حل است، در مورد انتگرال دوم، مشابه آن در متن کتاب وجود دارد.

6. مساله از روش تجزیه کسر حل نمی شود (چرا؟)

9. ابتدا از تغییر متغیر  $u = e^x$  استفاده کنید.

10. ابتدا از تغییر متغیر  $u = 3+e^x$  استفاده کنید.

## بخش دوم:

## سوالها:

حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + 1 \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$5. \int \sin^3 x \cos^3 x dx$$

$$6. \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$7. \int_0^1 \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) dx$$

$$8. \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$$

$$9. \int x^8 e^{-x^3} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{x(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

11. اگر تابع  $f$  در بازه  $[a, b]$  دو بار مشتق پذیر و  $f(a) = f(b) = 0$  باشد، نشان دهید که

$$\int_a^b (x-a)(b-x) f''(x) dx = -2 \int_a^b f(x) dx$$

جوابها:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \quad \ln 2 \cdot 3$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1$$

$$-2\sin 1 + 4\cos 1 \cdot 7$$

$$\frac{14}{3}\sqrt{17} + \frac{2}{3} \cdot 6$$

$$\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x - \frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x \cdot 5$$

$$-\frac{1}{3}e^{-x^3} (2+2x^3+x^6) \cdot 9$$

$$(\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \cdot 8$$

$$\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} + \frac{1}{12}\ln\frac{(2+\sqrt{1-x^2})^2}{3+x^2} \cdot 10$$

راهنمایی:

8. از روش جزء به جزء شروع به حل انتگرال کنید.

9. شروع حل با روش تغییر متغیر است.

10. با تغییر متغیر  $u = 1-x^2$  حل انتگرال را شروع کنید.

11. از روش جزء به جزء برای حل انتگرال استفاده کنید.

تمرینهای تحویلی شماره 7

بخش اول:

سوالات:

مساحت ناحیه محصور بین خمهای داده شده را بیابید. در سوال اول و دوم شکل ناحیه را نیز رسم کنید.

$$y = x^2 \text{ و } y = \sqrt{x} \cdot 1$$

$$x = 2y^2 - y + 3 \quad \text{و} \quad x - y = 7.2$$

$$y = 1 - x^2 \quad \text{و} \quad y = (x^2 - 1)^2.3$$

4. مساحت ناحیه محصور در حلقه  $x^4 - y^2 = x^2$  را بیابید.

5. مساحت ناحیه محصوری که بین دو نقطه تقاطع متواالی دو منحنی  $y = \sin^2 x$  و  $y = \cos^2 x$  قرار گرفته اند را بیابید.

جوابها:

1.5	$\frac{4}{3}.4$	$\frac{4}{15}.3$	9.2
$\frac{1}{3}.1$			

راهنمایی:

$$y = \pm \sqrt{x^2 - x^4} .5$$

بخش دوم:

سوالها:

1. حجم مخروط به شعاع  $a$  و ارتفاع  $h$  را بیابید.

2. حجم استوانه به شعاع  $a$  و ارتفاع  $h$  را بیابید.

3. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین خم  $y = x^2$  و  $y = 0$  بین  $x = 0$  و  $x = 2$  را

الف) حول محور  $x$  ها      ب) حول محور  $y$  ها

بیابید و شکل ناحیه دورانی حاصل را نیز رسم کنید.

4. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین  $x = 4y - y^2$  و  $x = 0$  را

الف) حول محور  $y$  ها      ب) حول محور  $x$  ها

بیابید و شکل ناحیه دورانی حاصل را نیز رسم کنید.

5. ناحیه مثلثی با راسهای  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  را حول خط  $x = 2$  دوران می دهیم حجم شکل حاصل را بیابید و در ضمن شکل ناحیه را نیز رسم کنید.

6. حجم بیضیگون حاصل از دوران بیضی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  را حول محور  $x$  ها بیابید.

7. دو لوله استوانه ای به گونه ای درون هم قرار گرفته اند که مرکز قاعده و قاعده هر دو لوله منطبق

بر هم هستند، اگر هر دو لوله به ارتفاع 10 باشند و قاعده یکی به شعاع 3 و دیگری به شعاع 5

باشد، با استفاده از انگرال‌ها حجم ناحیه بین این دو لوله را بباید.

۸. در ظرفی به شکل نیمکره و به شعاع ۳۰ سانتیمتران قدر آب ریخته ایم که عمق ماکسیمم آب ۲۰ سانتیمتر شده است، حجم آب موجود در ظرف را بباید.

۹. اگردر کره ای به شعاع ۲ حفره ای استوانه ای به شعاع ۱ و گردنه از مبدأ ایجاد کنیم، جه در صدی از حجم کره حذف می‌شود.

جوابها:

$$\frac{8\pi}{3} \quad \frac{16\pi}{15} \text{ الف.3} \quad \pi a^2 h .2 \quad \frac{1}{3} \pi a^2 h .1$$
$$\frac{27\pi}{2} \quad \frac{108\pi}{5} \text{ الف.4}$$
$$1600\pi .7 \quad \frac{4}{3} \pi ab^2 .6 \quad \frac{10\pi}{3} .5$$
$$.9. \text{ تقریبا } 35 \text{ درصد} \approx 29322 \text{ cm}^3 .8$$

تمرینهای تحویلی شماره ۸ :

بخشن اول:

سوالهای:

۱. مساحت خمهای زیر را بباید.

۲.  $x = 3$  تا  $x = 1$  از  $y = 2x - 1$ .

۳.  $(2,1)$  تا  $(1,0)$  از  $y^2 = (x-1)^3$ .

۴.  $x = 2$  تا  $x = 0$  از  $y = x^2$ .

۵. محیط دایره ای به شعاع  $a$  را بباید.

۶. مساحت رویه حاصل از دوران خمهای زیر را حول خط مشخص شده بباید.

الف)  $y = x^2$  ( $2 \leq x \leq 0$ ) حول محور  $y$  ها.

ب)  $y = \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) حول محور  $x$  ها.

۷. سطح جانبی استوانه ای به شعاع  $a$  و ارتفاع  $h$  را بباید.

جوابها:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(4 + \sqrt{17}), 3 & \frac{13^{\frac{1}{2}} - 8}{27}, 2 & 2\sqrt{5}, 1 \\ \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \cdot 2 & \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1), 5.(\text{الف}) & 2\pi a, 4 \\ 2\pi ah, 6 & & \text{راهنمایی} \end{array}$$

محیط معادل 2 برابر طول خم نیم دایره به شعاع  $a$  است که بالا با بایین محور  $x$  هاست.

پنجمین دوره

سوالها

انگرالهای زیر را محاسبه کنید و همگرایی یا واگرایی آنها را مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^3} & 2. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} & 3. \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ 4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} & 5. \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} & \end{array}$$

6. اگر بدانیم  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  ، انگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad (\text{الف})$$

جوابها

$$\begin{array}{lll} 1.5 & 8.4 & \frac{1}{2}, 1 \\ \frac{1}{2}, 3 & 3\sqrt{2}, 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}\sqrt{\pi}, 6 & \frac{\sqrt{\pi}}{4}, (\text{الف}) & \end{array}$$

راهنمایی

6. (الف) برای محاسبه انتگرال از روش جزء به جزء استفاده کنید، به این صورت که قرار دهید  $x = u$  و

$$dv = xe^{-x^2}$$

تمرینهای تحویلی شماره 9 :

سوالها

همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را مشخص کنید.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3 e^n}$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^{n^2}}$$

$$2. \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 1}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$8. \sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^4}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+8}}{6^n \ln(n+1)}$$

$$9. \sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$$

در هر مورد مشخص کنید که سری مطلقاً همگرا، به طور مشروط همگرا یا واگراست.

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$$

مرکز، شعاع و بازه همگایی سریهای زیر را تعیین کنید.

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-x)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$$

جوابها:

- |          |          |          |          |          |          |          |          |          |                |                 |             |                       |             |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------------|-----------------|-------------|-----------------------|-------------|
| 1. همگرا | 2. همگرا | 3. همگرا | 4. واگرا | 5. همگرا | 6. همگرا | 7. همگرا | 8. همگرا | 9. همگرا | 10. همگای مطلق | 11. مشروط همگرا | (-1, 9]. 14 | (-\infty, \infty). 13 | [-4, 4]. 12 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------------|-----------------|-------------|-----------------------|-------------|