

تمرینات سری دوم درس بهینه‌سازی خطی

استاد درس: آقای دکتر پیغامی

۱. مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 14 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_2 \leq -3 \end{aligned}$$

الف- مساله را در شکل استاندارد فرمول‌بندی کنید.

ب- مساله را در شکل متعارف فرمول‌بندی کنید.

ج- مساله را به یک مساله ماکزیمم سازی تبدیل کنید.

۲. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

در هر یک از حالت‌های زیر ناحیه شدنی و مقدار بهینه‌ی تابع هدف چه تغییری میکنند:
الف- مولفه‌ی i ام بردار b یک واحد افزایش یابد.

ب- محدودیت جدید به مساله اضافه شود.

ج- محدودیت جدید از مساله حذف شود.

د- متغیر جدید به مساله اضافه شود.

ه- یک متغیر از مساله حذف شود.

۳. مجموعه‌ی چندوجهی زیر داده شده است. وجوه، نقاط راسی، جهت‌های راسی و شعاع‌های راسی مجموعه‌ی زیر را تعیین کنید:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 40 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

۴. چندوجهی استاندارد $P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید سطرهای A مستقل خطی باشند.

الف- فرض کنید دو پایه‌ی مختلف یک جواب شدنی اساسی را به دست دهند. نشان دهید که آن جواب اساسی باید تبهگن باشد.

ب- یک جواب اساسی تبهگن در نظر بگیرید. آیا این درست است که آن جواب متناظر با دو یا چند پایه متفاوت می باشد.

ج- فرض کنید یک جواب اساسی تبهگن باشد. آیا این درست است که یک جواب اساسی مجاور وجود دارد که تبهگن می باشد.

۵. چندوجهی استاندارد $P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با سطرهای مستقل خطی باشد. درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را توضیح دهید. در صورت درست بودن آن را ثابت کنید و در غیر این صورت، یک مثال نقض بزنید.

الف- اگر $n = m + 1$ ، آنگاه P حداکثر دو جواب شدنی اساسی دارد.

ب- مجموعه همه جواب‌های بهینه کراندار است.

ج- در هر جواب بهینه، بیش از m متغیر مثبت نمی‌تواند وجود داشته باشد.

د- اگر بیش از یک جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه بیشمار جواب بهینه وجود دارد.

ه- اگر چندین جواب بهینه داشته باشد، آنگاه حداقل دو جواب شدنی اساسی وجود دارد که بهینه می‌باشند.

۶. چندوجهی استاندارد $P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با سطرهای مستقل خطی بوده و همه جواب‌های شدنی اساسی نا تبهگن

باشند. فرض کنید $x \in P$ دقیقا m مولفه‌ی مثبت داشته باشد.

الف- نشان دهید x یک جواب شدنی اساسی است.

ب- نشان دهید نتیجه قسمت (الف) درست نخواهد بود اگر فرض ناتبهنگی حذف شود.