

# تمرینات سری اول درس بهینه‌سازی خطی

استاد درس: آقای دکتر پیغامی

۱. مساله زیر را به صورت یک مساله برنامه ریزی خطی مدل بندی کنید:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{s.t.} \quad & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5. \end{aligned}$$

۲. یک مساله برنامه ریزی خطی، شامل قدرمطلق، به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y \\ \text{s.t.} \quad & Ax + By \leq b, \\ & y_i = |x_i| \quad \forall i. \end{aligned}$$

فرض کنید مولفه‌های  $B$  و  $d$  نامنفی باشند.  
الف- دو مدل برنامه ریزی خطی مختلف، ارائه کنید.  
ب- نشان دهید که مساله اصلی و دو مدل قسمت (الف) هم‌ارزند، به این معنی که یا هر سه مساله نشدنی هستند، یا هزینه بهینه هر سه یکی است.  
ج- با یک مثال نشان دهید که اگر بعضی درایه‌های  $B$  منفی باشند، آنگاه ممکن است مساله یک جواب مینیمم موضعی داشته باشد که یک مینیمم سراسری نیست.

۳. مساله

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{c^T x + d}{f^T x + g} \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \\ & f^T x + g > 0. \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید از پیش می‌دانیم که هزینه بهینه در بازه  $[K, L]$  قرار دارد. با استفاده از برنامه ریزی خطی، و این فرض که هزینه بهینه را می‌توان با هر دقت دلخواهی

محاسبه کرد، روندی برای حل مساله بالا ارایه کنید. راهنمایی: مساله تعیین این که آیا هزینه بهینه از یک عدد مشخصی بزرگتر نیست را در نظر بگیرید.

۴. فرض کنید  $N$  نوع پول وجود دارد و یک واحد از پول  $i$  را می‌توان به  $r_{ij}$  واحد از پول  $j$  تبدیل کرد. (به طور طبیعی، فرض می‌کنیم که  $r_{ij} > 0$ ). همچنین، آیین‌نامه‌های مشخصی وجود دارند که کران  $u_i$  را بر کل مقدار پول  $i$  ای که می‌توان در یک روز مفروض تبدیل کرد، تحمیل می‌کنند. فرض کنید با  $B$  واحد از پول ۱ شروع کرده و بخواهیم تعداد واحدهای پول  $N$  را که در انتهای یک روز، با دنباله‌ای از تبدیل‌ها، به دست می‌آوریم، ماکزیم کنیم. یک مدل برنامه ریزی خطی برای این مساله ارایه کنید. فرض کنید که به ازای هر دنباله‌ی  $i_1, \dots, i_k$  از پول‌ها، داریم  $r_{i_1 i_2} r_{i_2 i_3} \dots r_{i_{k-1} i_k} r_{i_k i_1} \leq 1$  به این معنی که دارایی نمی‌تواند در یک چرخه از تبدیل پول‌ها افزایش یابد.

۵. یک سرمایه‌گذار  $n$  سهام مختلف دارد. او  $s_i$  سهم نوع  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ )، را با قیمت  $p_i$  خریده است. قیمت فعلی یک سهم نوع  $i$  برابر با  $q_i$  است. سرمایه‌گذار انتظار دارد که قیمت یک سهم نوع  $i$  در سال آینده  $r_i$  شود. اگر او سهامش را بفروشد، آنگاه هزینه‌ای برابر با ۱ درصد معامله انجام شده را می‌پردازد. به علاوه، سرمایه‌گذار باید ۳۰ درصد سود کل را مالیات دهد. مثلاً، فرض کنید سرمایه‌گذار ۱۰۰۰ سهم نوع  $i$  را با قیمت ۵۰ واحد پولی برای هر سهم بفروشد. او این سهام را به قیمت ۳۰ واحد پولی برای هر سهم خریده است. بنابراین، وی ۵۰۰۰۰ واحد پولی سود به دست آورده است. به هر حال، او  $6000 = 50000 - 30000 \times 0.30$  واحد پولی بابت مالیات سود کل و  $500 = 0.01 \times 50000$  واحد پولی برای هزینه معامله می‌پردازد. در نتیجه، با فروش ۱۰۰۰ سهم از این سهام او  $43500 = 50000 - 6000 - 500$  واحد پولی سود خواهد برد. مساله‌ای برای چگونگی انتخاب فروش سهام سرمایه‌گذار بنویسید که  $K$  واحد پولی سود خالص ببرد، در حالی که ارزش مورد انتظار سهام سال آینده‌اش نیز ماکزیم می‌شود.

۶. یک کارخانه خوراک دام برای گاو، گوسفند و طیور خوراک تهیه می‌کند. این خوراک با ترکیب مواد اصلی زیر تهیه می‌شود: ذرت، سنگ آهک، دانه سویا و پودر ماهی. این مواد شامل ترکیبات مغذی زیر است: ویتامین‌ها، پروتئین، کلسیم و چربی خام. میزان این ترکیبات در هر کیلوگرم از مواد اصلی در جدول زیر خلاصه می‌شود:

مواد اصلی	ویتامین	پروتئین	کلسیم	چربی خام
ذرت	۸	۱۰	۶	۸
سنگ آهک	۶	۵	۱۰	۶
دانه سویا	۱۰	۱۲	۶	۶
پودر ماهی	۴	۸	۶	۹

کارخانه برای تولید ۱۰، ۶ و ۸ تن (در واحد متریک) خوراک گاو، گوسفند و طیور قرارداد بسته است. به دلیل کمبود، مقدار محدودی از مواد، یعنی ۶ تن ذرت، ۱۰ تن سنگ آهک، ۴ تن دانه سویا و ۵ تن پودر ماهی موجود است. قیمت هر کیلوگرم از این مواد به ترتیب ۰/۱۲، ۰/۲۰، ۰/۲۴، ۰/۱۲ دلار است. حداقل و حداکثر واحدهای ترکیبی از مواد مختلف مغذی در هر کیلوگرم خوراک گاو، گوسفند و طیور در جدول زیر خلاصه شده است:

تولید	ویتامین		پروتئین		کلسیم		چربی خام	
	حداقل	حداکثر	حداقل	حداکثر	حداقل	حداکثر	حداقل	حداکثر
خوراک گاو	۶	∞	۶	∞	۷	∞	۴	۸
خوراک گوسفند	۶	∞	۶	∞	۶	∞	۴	۶
خوراک طیور	۴	۶	۶	∞	۶	∞	۴	۶

این مساله را طوری فرمول بندی کنید که کل هزینه می نیمم شود.

۷. شخصی ۲۲۰۰ دلار را می خواهد در پنج سال آینده سرمایه گذاری کند. در شروع هر سال او می تواند پولش را برای یک دوره یک ساله یا دو ساله به حساب سپرده بگذارد. بانک ۸ درصد سود به ازای هر سال سپرده و ۱۷ درصد (در کل) برای دو سال سپرده می پردازد. به علاوه، شرکتی برای سه سال سود تضمینی پیشنهاد می کند که شروع آن در آغاز سال دوم است. این تضمین شامل ۲۷ درصد (در کل) است و اگر این شخص موجودی اش را هر سال سرمایه گذاری کند، یک برنامه خطی ارایه دهید تا به او نشان دهد چگونه باید سرمایه گذاری کند تا در پایان سال پنجم پول نقدش ماکزیمم شود.

۸. یک شرکت دو نوع پنیر تولید می کند: پنیر سویسی و پنیر تند. شرکت ۶۰ کارگر مجرب دارد و می خواهد تعداد نیروی کار خود را به ۹۰ کارگر در طول ۸ هفته آینده افزایش دهد. هر کارگر مجرب می تواند سه کارگر تازه استخدام جدید را در یک دوره ۲ هفته ای آموزش دهد که در طول این مدت کارگران آموزش دهنده چیزی تولید نمی کنند. تولید ۱۰ پوند پنیر سویسی یک ساعت و تولید ۶ پوند پنیر تند نیز یک ساعت وقت می گیرد. یک هفته کاری چهل ساعت است. تقاضای هفتگی (بر حسب ۱۰۰۰ پوند) چنین خلاصه می شود:

نوع پنیر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
پنیر سویسی	۱۲	۱۲	۱۲	۱۶	۱۶	۲۰	۲۰	۲۰
پنیر تند	۸	۸	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

فرض کنید هر کارگر کارآموز همان حقوق کارگر مجرب را دریافت کند. علاوه بر این، فرض کنید تاریخ مصرف پنیرها یک هفته باشد. شرکت چگونه باید دستمزد پردازد و نیروهای جدید را آموزش دهد تا هزینه دستمزدها کم ترین شود؟ مساله را به صورت برنامه خطی فرمول

بندی کنید.

۹. یک شرکت تولید کننده تلویزیون تصمیم دارد تلویزیون های سیاه و سفید و رنگی تولید کند. ارزیابی بازار نشان می دهد که حداکثر می توان ۱۰۰۰ تلویزیون رنگی و ۴۰۰۰ تلویزیون سیاه و سفید در ماه فروش داشت. ماکزیمم تعداد نفر-ساعت موجود در هر ماه ۵۰۰۰۰ است. یک تلویزیون رنگی ۲۰ نفر-ساعت و یک تلویزیون سیاه و سفید ۱۵ نفر-ساعت وقت می گیرد. سود حاصل از تلویزیون های رنگی و سیاه و سفید به ترتیب ۶۰ و ۳۰ دلار است. می خواهیم تعداد تلویزیون هایی را پیدا کنیم که شرکت باید از هر نوع تولید کند تا سود آن ماکزیمم شود. مساله را فرمول بندی کنید.