تمرینات سری پنجم درس بهینه‌سازی خطی

استاد درس: آقای دکتر پیغامی

تاریخ تحویل: ۹۵/۹/۱۵

۱. مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ s.t. & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

الف- مساله دوگان را بنویسید.

ب- مساله بالا را به روش سیمپلکس حل کنید. در هر تکرار متغیرهای دوگان را شناسایی کنید و نشان دهید کدام محدودیت دوگان نقض می‌شود.

پ- در هر تکرار، یک پایه دوگان 3×3 شناسایی کنید که با این تکرار سیمپلکس همراه است. متغیرهای پایه و غیرپایه دوگان را شناسایی کنید.

ت- نشان دهید که در هر تکرار روش سیمپلکس، تابع هدف دوگان بدتر می‌شود.

ث- بررسی کنید که، جواب‌های هر دو مساله شدنی، با توابع هدف مساوی و در شرایط مکمل زاید صادق هستند.

۲. در مساله‌ی زیر، فرض کنید متغیرهای x_2 ، x_3 و x_5 متغیرهای پایه‌ای بهینه مساله هستند. با توجه به این حقیقت، جواب‌های بهینه‌ی اولیه و دوگان را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 \\ s.t. & x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 10, \\ & 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + x_4 = 20, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

۳. جدول سیمپلکس زیر جواب بهینه‌ی یک مساله برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد. متغیرهای x_4 و x_5 متغیرهای کمکی محدودیت اول و دوم مساله اصلی فرض شده است. محدودیت‌ها از نوع $\leq$ هستند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$
$\bar{c}_j$	0	2	0	3	2	z=-۳۵

الف- مساله‌ی اصلی را بنویسید.

ب- دوگان مساله‌ی اصلی چیست؟

پ- جواب بهینه‌ی دوگان را از جدول به‌دست آورید.

۴. مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ s.t. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

مساله دوگان متناظر را بنویسید.

۵. فرض کنید A یک ماتریس متقارن باشد. مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \geq c, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. ثابت کنید که اگر x^* در $Ax^* = c$ و $x^* \geq 0$ صدق کند، آنگاه x^* یک جواب بهینه است.

۶. مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی می‌نیمم سازی $c^T x$ را بر $x \geq 0$ و $Ax = b$ در نظر بگیرید. فرض کنید یک جواب بهینه‌ای مانند x^* وجود داشته،و p^* یک جواب بهینه‌ی دوگان باشد.

الف- فرض کنید $\tilde{x}$ یک جواب بهینه برای اولیه باشد وقتی که c با $\tilde{c}$ عوض می‌شود. نشان دهید $(\tilde{c} - c)^T (\tilde{x} - x^*) \leq 0$.

ب- فرض کنید بردار هزینه‌ی c ثابت باشد ولی بردار b به $\tilde{b}$ تغییر کند.فرض کنید $\tilde{x}$ جواب بهینه متناظر برای اولیه باشد. ثابت کنید $(p^*)^T (\tilde{b} - b) \leq c^T (\tilde{x} - x^*)$.

۷. ماتریس A را مفروض فرض کنید. نشان دهید که دقیقا یکی از موارد زیر برقرار است:

الف- بعضی $x \neq 0$ وجود دارد به طوری که $Ax = 0$ و $x \geq 0$.

ب- بعضی p وجود دارد به طوری که $p^T A > 0^T$.

۸. ماتریس A را ثابت فرض کنید. نشان دهید گزاره‌های زیر هم ارزند:

الف- هر بردار مانند x که در $Ax \geq 0$ و $x \geq 0$ صدق کند باید در $x_1 = 0$ نیز صدق کند.

ب- بعضی p وجود دارد به طوری که $p^T A \leq 0^T$ ، $p \geq 0$ ،و $p^T A_1 < 0$ ، که در آن A_1 اولین ستون A است.

۹. برای ماتریس $A_{m\times n}$ و بردار $b \in R^m$ داده شده، فرض کنید دستگاه $Ax \geq b$ فاقد جواب است. با استفاده از قضایای دوگانی، نشان دهید بردار $y \in R^m$ وجود دارد به طوری که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$A^T y = 0 \qquad , \qquad b^T y > 0$$