سری اول

مسأله خوراک دام

متغیرهای تصمیم: x_{ij} : مقدار واحد از ماده خام i برای تولید محصول j ام

i \ j	گاو	گوسفند	مرغ	خوک
ذرت	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
سنگ آهک	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
دانه سویا	x_{31}	x_{32}	x_{33}	
پودر ماهی	x_{41}	x_{42}	x_{43}	

$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,3 \qquad j=1,2,3,4$

محدودیت مواد موجود:

مقدار ذرت قابل دسترس در تولید خوراک : $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 6000$

" " سنگ آهک " " : $x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 10000$

" " دانه سویا " " : $x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 4000$

" " پودر ماهی " " : $x_{41}+x_{42}+x_{43} \leq 5000$

محدودیت مقدار خوراک تولیدی برای هر دام:

برای گاو : $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \geq 10000$

" گوسفند : $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \geq 6000$

" مرغ : $x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} \geq 8000$

محدودیت مواد غذایی در هر کیلوگرم خوراک دام:

ویتامین موجود در هر کیلوگرم خوراک گاو : $\dfrac{8x_{11}+6x_{21}+10x_{31}+4x_{41}}{10000} \geq 6$

" " پروتئین : $\dfrac{10x_{11}+5x_{21}+12x_{31}+8x_{41}}{10000} \geq 6$

" " کلسیم : $\dfrac{6x_{11}+10x_{21}+6x_{31}+6x_{41}}{10000} \geq 7$

NOTE:

" " چربی خام : $4 \leq \dfrac{8x_{11}+6x_{21}+6x_{31}+4x_{41}}{10000} \leq 8$

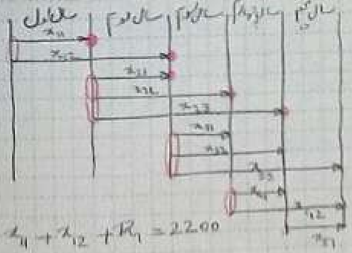
هزینه‌های تولید و نگهداری را حداقل کنیم

$$\min Z = 0.2(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 0.12(x_{21}+x_{22}+x_{23})$$
$$+ 0.24(x_{31}+x_{32}+x_{33}) + 0.12(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

مساله سرمایه‌گذاری سالانه :

x_{ij} : مقدار پول سرمایه‌گذاری شده در سال iام برای طرح jام.

R_i : مقدار پول نقد برای مصرف در سال iام.



$x_{ij} \geq 0$

$i = 1,2,3,4,5$

$j = 1,2,3$

$R_i \geq 0$

$$x_{11} + x_{12} + R_1 = 2200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + R_2 = R_1 + 1.08x_{11}$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + R_3 = R_2 + 1.08x_{21} + 1.17x_{12}$$
$$x_{41} + x_{42} + R_4 = R_3 + 1.08x_{31} + 1.17x_{22}$$
$$x_{51} + R_5 = R_4 + 1.08x_{41} + 1.17x_{32} + 1.27x_{23}$$
$$\max Z = 1.08x_{51} + 1.17x_{42} + 1.27x_{33} + R_5$$

مساله پنیرها :

x_{ij} : مقدار پنیر سوئیسی تولید شده در هفته iام و عرضه شده در هفته jام. ($i=1,\dots,8$, $j=1,\dots,8$)

y_{ij} : " پنیر تند " " " " " " " " " " . (" " ")

t_k : تعداد کارگران آموزش دیده در ابتدای هفته kام. ($k=1,2,\dots,7$)

تا آخر 8 هفته، 30 کارگر آموزش داده شود. $\Rightarrow 3\sum_{k=1}^{7} t_k = 30$

— محدودیت تولید پنیرها:

تقاضای هفته اول $\begin{cases} x_{11} \geq 12000 \\ y_{11} \geq 8000 \end{cases}$

هفته دوم $\begin{cases} x_{12} + x_{22} \geq 12000 \\ y_{12} + y_{22} \geq 8000 \end{cases}$

⋮

— محدودیت زمان کارگران:

ساعت	پوند پنیر سوئیسی
1	10
?	x_{ij}

$\Rightarrow \frac{x_{ij}}{10}$: مقدار زمان لازم برای تولید x_{ij}

تعداد کارگرانی که در هفته اول کار می‌کنند $= 60 - t_1$

$$\frac{x_{11}+x_{12}}{10} + \frac{y_{11}+y_{12}}{6} \leq 40(60 - t_1)$$

NOTE:

تولید شده در هفته اول

سری اول

تعداد کارگران هفته دوم : $60-(t_1+t_2) \Rightarrow \frac{x_{22}+x_{23}}{10} + \frac{y_{22}+y_{23}}{6} \leq 40\left(60-(t_1+t_2)\right)$

تعداد کارگران هفته سوم : $(60+3t_1)-t_2-t_3 \rightarrow \frac{x_{33}+x_{34}}{10} + \frac{y_{33}+y_{34}}{6} \leq 40\left((60+3t_1)-t_2-t_3\right)$

هفته چهارم : $\frac{x_{44}+x_{45}}{10} + \frac{y_{44}+y_{45}}{6} \leq 40\left[(60+3t_1+3t_2)-t_3-t_4\right]$

پنجم : $\leq 40\left[(60+3t_1+3t_2+3t_3)-t_4-t_5\right]$

ششم : $\leq 40\left[(60+3\sum_{k=1}^{4} t_k)-t_5-t_6\right]$

هفتم : $\leq 40\left[(60+3\sum_{k=1}^{5} t_k)-t_6-t_7\right]$

هشتم : $\frac{x_{88}}{10} + \frac{y_{88}}{6} \leq 40\left[(60+3\sum_{k=1}^{6} t_k)-t_7\right]$

$x_{ij} \geq 0 \quad , y_{ij} \geq 0 \quad , t_k \geq 0$ صحیح

$i=1,\dots,8$
$j=1,\dots,8$
$k=1,\dots,7$

اگر M دستمزد هر کارگر در یک هفته باشد

$$\min\ Z = M\Big[\big[(60-t_1)+4t_1\big] + \big[(60-t_1-t_2)+4t_1+4t_2\big] + \big[(60-t_2-t_3+3t_1)+4t_2+4t_3\big] + \big[(60-t_3-t_4+3t_1+3t_2)+4t_3+4t_4\big] \dots$$

تعداد کارگران هفته اول — هفته دوم — هفته سوم

سری اول

مسأله تلویزیون‌ها :

x_i : تعداد تلویزیون نوع i که باید تولید شود. $(i=1,2)$

محدودیت نیروی کار - ساعت در ماه : $20x_1 + 15x_2 \leq 50000$

محدودیت بازار برای تولید : $\begin{cases} x_1 \leq 1000 \\ x_2 \leq 4000 \end{cases}$ $\quad x_i \geq 0 \quad i=1,2$

$$\boxed{\max\ Z = 60x_1 + 30x_2}$$

سوال ۱

میلاد حضرت رسول اکرم (ص) و میلاد حضرت امام جعفر صادق (ع) - تعطیل

$\min\ 2x_1 + 3|x_2 - 10|$

$\text{s.t.}\ |x_1+2| + |x_2| \leq 5$

تعریف می‌کنیم:

$x^+ = \max\{x, 0\}$
$x^- = \max\{-x, 0\}$

NOTE:
$x = x^+ - x^-$
$|x| = x^+ + x^-$

با این تعریف داریم:

$x_1 + 2 = t_1 \Rightarrow x_1 = t_1 - 2$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - 10 = t_2 \Rightarrow x_2 = t_2 + 10 \\ x_2 = t_3 \end{array}\right\} \Rightarrow t_3 = t_2 + 10$$

$$\Rightarrow \min \quad 2t_1 - 4 + 3|t_2|$$

$$\text{st.} \quad |t_1| + |t_3| \leq 5$$

$$t_3 = t_2 + 10$$

$$\equiv \min \quad 2t_1^+ - 2t_1^- - 4 + 3t_2^+ + 3t_2^-$$

$$\text{st.} \quad t_1^+ + t_1^- + t_3^+ + t_3^- \leq 5$$

$$t_3^+ - t_3^- - t_2^+ + t_2^- = 10$$

$$t_1^+, t_2^+, t_3^+, t_1^-, t_2^-, t_3^- \geqslant 0$$

یادداشت:

$$\min \quad c^T x + d^T y$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + By \leqslant b$$

$$y_i = |x_i| \quad \forall i$$

ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$$

$$x^+ = (x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+)$$

$$x^- = (x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-)$$

مدل اول

$$\min \quad c^T x + d^T |x|$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + B|x| \leqslant b$$

$$|x| = x^+ + x^-$$

$$x = x^+ - x^-$$

$$x^+, x^- \geqslant 0$$

$$\equiv \min \quad c^T x^+ - c^T x^- + d^T x^+ + d^T x^-$$

NOTE:

$$Ax^+ - Ax^- + Bx^+ + Bx^- \leqslant b$$

$$x^+, x^- \geqslant 0$$

سری اول

مدل دوم :

مثال

$$\min\ |x|+|y| \qquad \equiv \qquad \min\ t+s$$

$$\text{s.t.}\quad x+y \le 10 \qquad\qquad \text{s.t.}\quad x+y \le 10$$

$$x+y \ge 10 \qquad\qquad x+y \ge -10$$

$$|x| \le t$$

$$|y| \le s$$

$$t, s \ge 0$$

$$\min\ c^T x + d^T y$$

$$\text{s.t.}\ Ax + By \le b$$

$$y_i = |x_i| \quad \forall i \quad \longrightarrow \quad y = |x|$$

$$\equiv \min\ c^T x + d^T |x|$$

$$\text{s.t.}\quad Ax + B|x| \le b$$

یادداشت

چون بردارهای B, d نامنفی هستند:

$$\equiv \min\ c^T x + d^T Z \qquad \equiv \qquad \min\ c^T x + d^T Z$$

$$\text{s.t.}\ Ax + BZ \le b \qquad\qquad Ax + BZ \le b$$

$$|x| \le Z,\ Z \ge 0 \qquad\qquad x \le Z,\ -x \le Z,\ Z \ge 0$$

سری اول

مدل اول

(I) $\min\ c^T x + d^T y$

$\text{s.t.}\ Ax + By \le b$

$y_i = |x_i| \quad \forall i$

ب) (II) $\min\ c^T x^+ - c^T x^- + d^T x^+ + d^T x^-$

$Ax^+ - Ax^- + Bx^+ + Bx^- \le b$

$x^+, x^- \ge 0$

$\forall (x,y) \in F_I \ ;\ x^+ = \max\{x, 0\} \ge 0$

$x^- = \max\{-x, 0\} \ge 0 \Rightarrow (x^+, x^-) \in F_{II}$

$x = x^+ - x^-$

$y = x^+ + x^-$

$\Downarrow$

شدنی II

مقدار I: $c^T x + d^T y = c^T(x^+ - x^-) + d^T(x^+ + x^-)$

$= c^T x^+ - c^T x^- + d^T x^+ + d^T x^-$ مقدار II

بالعکس

$\forall (x^+, x^-) \in F_{II}$ $\quad x = x^+ - x^-$

$\Downarrow$ $\quad y = x^+ + x^- \Rightarrow Ax + By \le b$

$Ax^+ - Ax^- + Bx^+ + Bx^- \le b$ $\quad y = |x|$

$x^+, x^- \ge 0$ $\quad \Rightarrow (x, y) \in F_I$

NOTE:

فرض کنیم (I) شدنی نامتناهی باشد پس دنباله

$$\exists \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq F_{I} \quad ; \quad c^T x_k + d^T y_k \longrightarrow -\infty$$

با در نظر گرفتن x_k^+ , x_k^- مانند قبل $(x_k^+ , x_k^-) \in F_{II}$ ،

$$c^T x_k + d^T y_k = c^T x_k^+ - c^T x_k^- + d^T x_k^+ + d^T x_k^- \longrightarrow -\infty$$

پس II شدنی نامتناهی است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد

اگر II شدنی نامتناهی باشد I نیز شدنی نامتناهی است.

لغو امتیاز تنباکو به فتوای آیت‌الله میرزا حسن شیرازی (۱۲۷۰ هـ ش)

مسأله N نوع پول:

r_{ij} : یک واحد پول i، r_{ij} واحد پول j است. نوع پول: $1, 2, \ldots, N$

x_{ij} : مقدار پول نوع i که در طول روز به نوع j تبدیل می‌شود. $(i, j = 1, \ldots, N)$

$$\text{Max} \quad x_{1N} r_{1N} + x_{2N} r_{2N} + \cdots + x_{(N-1)N} r_{(N-1)N} = \sum_{i=1}^{N-1} x_{iN} r_{iN}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_{ij} \leq u_i \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1N} = B$$

روز بزرگداشت فردوسی

$x_{ij} \geq 0$ صحیح

مسأله سهام

سرمایه‌گذار — سهم نوع 1، سهم نوع 2، …، سهم نوع n

خرید

قیمت هر سهم نوع i $= \frac{P_i}{S_i}$ $\Leftarrow$ S_i تا سهم نوع i را به قیمت P_i خریده

$\leftarrow$ در کل S_i تا سهم نوع i داریم

q_i : قیمت فروش هر سهم نوع i در سال جاری

r_i : " " " " نرخ i در سال آینده

x_i : تعداد واحدهای نوع i که در سال جاری فروش می‌رود

الف) $(S_i - x_i)$ از سهم نوع i باقیمانده برای سال آینده

$$\max \sum_{i=1}^{n} r_i (S_i - x_i)$$

$$s.t. \quad 0 \leq x_i \leq S_i \quad ; (i=1,\dots,n)$$

$$K = \sum_{1}^{n} x_i\left(q_i - \frac{P_i}{S_i}\right) - \left(0.01 \sum_{1}^{n} x_i q_i\right) - 0.3\left(\sum_{1}^{n} x_i\left(q_i - \frac{P_i}{S_i}\right)\right)$$

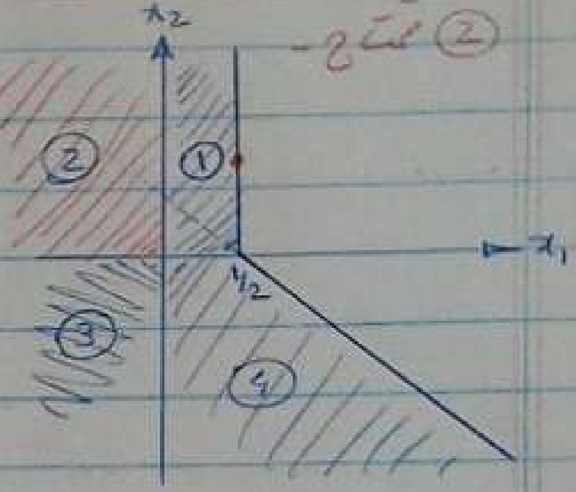
میزان سود حاصل از فروش سهم نوع i در سال جاری

سری اول

②

$$\min \; -x_1 + 0x_2 + 0|x_1| + 0|x_2|$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + |x_1| - |x_2| \leq 1$$



$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_1 \leq 1/2$ ①

$x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow 0 < 1$ ✓ ②

$x_1 < 0, x_2 < 0 \Rightarrow x_2 \leq 1/2$ ③

$x_1 > 0, x_2 < 0 \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 \leq 1$ ④

جواب بهینه $-\infty$ در جهت منفی x

به عنوان مثال نقطه $(1, 1/2)$ یک نقطه بهینه محلی است اما بهینه سراسری نیست

③

$$\min \; \frac{c^T x + d}{f^T x + g}$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b$$

$$f^T x + g > 0$$

تعریف $\frac{1}{f^T x + g} := t \Longrightarrow$

$$\min \; c^T(tx) + dt$$

$$\text{s.t.} \quad A(tx) \leq bt$$

$$t > 0$$

چون در تابع هدف و قیدها ضرب دو متغیر را داریم مسأله دیگر برنامه‌ریزی خطی نمی‌باشد برای رفع این مشکل دو بار تغییر متغیر می‌دهیم

$w = tx$ استفاده می‌کنیم:

$$\min \; c^T w + dt$$

$$\text{s.t.} \quad Aw \leq bt$$

$$t > 0$$

$$\boxed{w = tx}$$

تنها عبارت غیرخطی مسأله مورد $w=tx$ می‌باشد. برای حل این مسأله با حذف قید $w=tx$، مسأله را (که برنامه خطی است) حل می‌کنیم

سری دوم

1) ابتدا قیدها را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم (الف

چون x_1, x_2 آزاد هستند برای آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1 = x - x_1^+ \quad , \quad x_2 = x - x_2^+$$

$$x, x_1^+ \geq 0 \qquad x, x_2^+ \geq 0$$

حال قید x_3 را تعریف می‌کنیم:

$$x_3 \leq -3 \Rightarrow \underbrace{-x_3 - 3}_{x_3'} \geq 0 \Rightarrow x_3 = -x_3' - 3$$

با جایگذاری در مسئله داریم:

$$\min Z = (x - x_1^+) - 2(x - x_2^+) - 3(-x_3' - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & (x - x_1^+) + 2(x - x_2^+) + (-x_3' - 3) \leq 14 \\ & (x - x_1^+) + 2(x - x_2^+) + 4(x_3' - 3) \geq 12 \\ & (x - x_1^+) - (x - x_2^+) + (-x_3' - 3) = 2 \\ & x, x_1^+, x_2^+, x_3' \geq 0 \end{aligned}$$

حال با اضافه کردن متغیرهای کمبود به آن، مسئله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$\min \; -x - x_1^+ + 2x_2^+ + 3x_3'$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x - x_1^+ - 2x_2^+ - x_3' + S_1 = 17 \\ & 3x - x_1^+ - 2x_2^+ - 4x_3' - S_2 = 24 \\ & -x_1^+ + x_2^+ - x_3' = 5 \\ & S_1, S_2, x, x_1^+, x_2^+, x_3' \geq 0 \end{aligned}$$

ب) میدانیم فرم متعارف مسئله مینیمم سازی بصورت $\min c^T x$ میباشد

$$\text{s.t. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

پس با اعمال تغییرات مانند قسمت الف، مسئله را به فرم متعارف تبدیل می‌کنیم

سری دوم

$$\min \quad -x - x_1^+ + 2x_2^+ + 3x_3'$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 3x - x_1^+ - 2x_2^+ - x_3' \leqslant 17 \\ & 3x - x_1^+ - 2x_2^+ - 4x_3' \geqslant 24 \\ & -x_1^+ - 2x_2^+ - x_3' \geqslant 5 \\ & -x_1^+ - 2x_2^+ - x_3' \leqslant 5 \\ & x, x_1^+, x_2^+, x_3' \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\min \quad -x - x_1^+ + 2x_2^+ + 3x_3'$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & -3x + x_1^+ + 2x_2^+ + x_3' \geqslant -17 \\ & 3x - x_1^+ - 2x_2^+ - 4x_3' \geqslant 24 \\ & -x_1^+ - 2x_2^+ - x_3' \geqslant 5 \\ & x_1^+ + 2x_2^+ + x_3' \geqslant -5 \\ & x, x_1^+, x_2^+, x_3' \geqslant 0 \end{aligned}$$

2) $$\max \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 14 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geqslant 12 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_3 \leqslant 3 \end{aligned}$$

3) برای بدست آوردن نقاط رأسی در ابتدا هر سه قید از ۶ قید که مستقل خطی هستند را با هم تلاقی می‌دهیم تا نقاط رأسی بدست آید . ۲۰ تا قیدها به صورت زیر هستند :

$x_1 - x_2 + x_3 = 10$ (1)

$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 40$ (2)

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 50$ (3)

$x_1 = 0$ (4)

$x_2 = 0$ (5)

$x_3 = 0$ (6)

سری دوم

نقطه رأسی حاصل از برخورد 1، 2 و 4

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 10 \\ -x_2 + 2x_3 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 30 \\ x_2 = 20 \end{matrix} \Rightarrow X_1 = (0, 20, 30)$$

نقطه رأسی حاصل از برخورد 1، 2 و 6

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 10 \\ 2x_1 - x_2 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 30 \\ x_2 = 20 \end{matrix} \Rightarrow X_2 = (30, 20, 0)$$

نقطه رأسی حاصل از برخورد 1، 4 و 5

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 10 \Rightarrow X_3 = (0, 0, 10)$$

نقطه رأسی حاصل از برخورد 1، 5 و 6

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 10 \Rightarrow X_4 = (10, 0, 0)$$

نقطه رأسی حاصل از برخورد 5، 6 و 4

$$\Big\} \; x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow X_5 = (0, 0, 0)$$

توجه داشته باشید هر نقطه رأسی حتماً شدنی باید باشد، یعنی در تمامی قیدهای مسأله اصلی صدق کند.

برای بدست آوردن جهت‌های رأسی ابتدا تمامی جهت‌های شدنی را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&\text{I}: d_1 - d_2 + d_3 = 0 \\
&\text{II}: 2d_1 - d_2 + 2d_3 = 0 \\
&\text{III}: 3d_1 - 2d_2 + 3d_3 = 0 \\
&\text{IV}\; d_1 + d_2 + d_3 = 1 \\
&\text{V}\; d_1 = 0 \\
&\text{VI}\; d_2 = 0 \\
&\text{VII}\; d_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\text{IV}, \text{V}, \text{VI} \Rightarrow d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{I}, \text{IV}, \text{V} \Rightarrow d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{I}, \text{IV}, \text{VII} \Rightarrow d_3 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقاط حاصل سه جهت رأسی است

سری سوم

② الف - در روش دو مرحله‌ای متغیرهای تصنعی میزان تخطی از قیدها را مشخص می‌کنند برای
بدست آوردن نقطه شدنی باید میزان تخطی از قیدها مینیمم شود

ب - خیر، باید مینیمم کنیم

③

$$\max \quad x_1 - 2x_2 + x_3 - MR$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 - x_3 - S_1 + R = 4$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 + S_2 = 2$$

$$x_j \geq 0 ,\ R \geq 0 ,\ S_1, S_2 \geq 0$$

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} a_j$$

	1	-2	1	0	0	-M	
	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R	RHS
$-M$ R	1	1	-1	-1	0	1	4
0 S_2	1	-4	1	0	1	0	2
$\bar{c}_j$	4M	-2+M	1-M	-M	0	0	
-2 x_2	1	1	-1	-1	0	1	4
0 S_2	5	0	-3	-4	1	4	18
$\bar{c}_j$	3	0	-1	-2	0		

	x_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	S_2	R	RHS
-2 x_2	0	1	-2/5	-1/5	-1/5		$\frac{2}{5}$
1 x_1	1	0	-7/5	-4/5	1/5		$\frac{13}{5}$
$\bar{c}_j$	0	0	4/5	2/5	-3/5		

$\theta < 0 \rightarrow$ مسأله نامتناهی

① x_i: میزان تولید محصول iام

$$\max \quad 2x_1 + 4x_2 + 2.5x_3$$ تابع هدف

قیدها

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 600$ بخش 1

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 400$ 2 "

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 300$ بخش 3

$$\max \quad 2x_1 + 4x_2 + 2.5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + S_1 = 600$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = 400$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + S_3 = 300$$

سری نهم

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R_1	R_2	R_3	RHS 4	
		0	0	0	0	0	1	1	1		
1	R_1	1	3	0	4	5	1	0	0	2	فاز I
1	R_2	1	2	0	-3	1	0	1	0	2	
1	R_3	-1	-4	3	0	0	0	0	1	2	
	$\bar{c}_j$	-1	-1	-3	-1	-6	0	0	0		
	x_5	$1/5$	$3/5$	0	$4/5$	1	$1/5$	0	0	$2/5$	
	R_2	$4/5$	$7/5$	0	$-19/5$	0	$-1/5$	1	0	$8/5$	
	R_1	-1	-4	3	0	0	0	0	1	2	
	$\bar{c}_j$	$1/5$	$13/5$	-3	$19/5$	0	$6/5$	0	0		
	x_5	$1/5$	$3/5$	0	$4/5$	1	$1/5$	0	0	$2/5$	
	R_2	$4/5$	$7/5$	0	$-19/5$	0	$-1/5$	1	0	$8/5$	
	x_3	$-1/3$	$-4/3$	1	0	0	0	0	$1/3$	$2/3$	
	$\bar{c}_j$	$-4/5$	$-7/5$	0	$19/5$	0	$6/5$	0	1		
	x_2	$1/3$	1	0	$4/3$	$5/3$	$1/3$	0	0	$2/3$	
	R_2	$1/3$	0	0	$-17/3$	$-7/3$	$-2/3$	1	0	$2/3$	
	x_3	$1/9$	0	1	$\frac{16}{9}$	$\frac{20}{9}$	$4/9$	0	$1/3$	$14/9$	
	$\bar{c}_j$	$-1/3$	0	1	$\frac{17}{3}$	$7/3$	$5/3$	0	1		
3	x_2	0	1	0	7	4	1	-1	0	0	
2	x_1	1	0	0	-17	-7	-2	1	0	2	
3	x_3	0	0	1	$11/3$	3	$2/3$	$-1/3$	$1/3$	$4/3$	اتمام فاز I
	$\bar{c}_j$	0	0	1	0	0	1	1	1		
	$\bar{c}'_j$	0	0	0	3	-9					فاز II
	x_5	0	$1/4$	0	$7/4$	1				0	
	x_1	1	$7/4$	0	$-19/4$	0				2	
	x_3	0	$-3/4$	1	$-19/12$	0				$4/3$	
	$\bar{c}_j$	0	$9/4$	0	$\frac{75}{4}$	0					

$$X^* = \begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = x_4^* = 0 \\ x_3^* = 4/3 \\ x_5^* = 0 \end{cases}$$

سری سوم

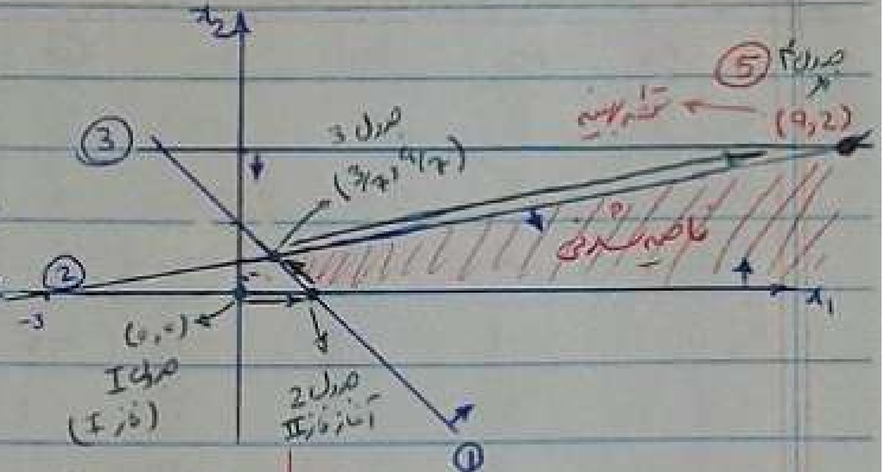
p) $\max\ -x_1 + 8x_2$

s.t. $x_1 + x_2 - S_1 + R = 1$

$-x_1 + 6x_2 + S_2 = 3$

$x_2 + S_3 = 2$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, R \geq 0$



	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R	RHS
R	1	1	-1	0	0	1	1
S_2	-1	6	0	1	0	0	3
S_3	0	1	0	0	1	0	2
$\bar{c}_j$	-1	-1	1	0	0	0	
x_1	1	1	-1	0	0	1	1
S_2	0	7	-1	1	0	1	4
S_3	0	1	0	0	1	0	2
$\bar{c}_j$	0	0	0	0	0	1	
$\bar{c}_j'$	0	9	-1	0	0		-1
x_1	1	0	-6/7	-1/7	0		3/7
x_2	0	1	-1/7	1/7	0		4/7
S_3	0	0	1/7	-1/7	1		10/7
$\bar{c}_j$	0	0	2/7	-9/7	0		29/7
x_1	1	0	0	-1	6		9
x_2	0	1	0	0	1		2
S_1	0	0	1	-1	7		10
$\bar{c}_j$	0	0	0	-1	-2		7

پایان فاز I و آغاز فاز II جدید (دوفاز)

سری چهارم

①

$$\min \; -x_1-2x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1+x_2+x_3+S_1=6$$

$$2x_2-x_3+S_2=3$$

$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

$$S_1,S_2\geq 0$$

$$\bar{c}_j=c_j-c_B^TB^{-1}a_j$$

	x_1 (−1)	x_2 (−2)	x_3 (1)	S_1	S_2	RHS	
S_1	2	1	1	1	0	6	
S_2	0	2	−1	0	1	3	
$\bar{c}_j$	−1	−2	1	0	0		$-c_B^TB^{-1}$
S_1	2	0	3/2	1	−1/2	9/2	
x_2	0	1	−1/2	0	1/2	3/2	
$\bar{c}_j$	−1	0	0	0	1		$-c_B^TB^{-1}$
x_1	1	0	3/4	1/2	−1/4	9/4	
x_2	0	1	−1/2	0	1/2	3/2	
$\bar{c}_j$	0	0	3/4	1/2	3/4		$-c_B^TB^{-1}$

در جدول I: $B^{-1}=I \Rightarrow B=I$, $N=\begin{bmatrix}2&1&+1\\0&2&-1\end{bmatrix}$, $B^{-1}N=N$

$$c_B^TB^{-1}=[0\;\;0]\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=[0,0]$$

در جدول II: $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1/2\\0&1/2\end{bmatrix}\xrightarrow[B^{-1}]{\text{وارون}}B=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ که همان ستون متغیرهای پایه‌ای این جدول در شکل اصلی هستند

ستون متناظر S_1 در شکل

ستون متناظر x_2 در شکل

ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در جدول $N=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}1&-1/2\\0&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3/2&-1/2\\0&-1/2&1/2\end{bmatrix}$$

ستون‌های متغیرهای غیرپایه‌ای در جدول

ستون متناظر x_1 در جدول

ستون متناظر x_3 در جدول

ستون متناظر S_2 در جدول

$$c_B^TB^{-1}=[0\;\;-2]\begin{bmatrix}1&-1/2\\0&1/2\end{bmatrix}=[0\;\;-1]$$

در جدول III: $B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&-1/4\\0&1/2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, $N=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}3/4&1/2&-1/4\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}\qquad c_B^TB^{-1}=[-1/2\;\;-3/4]$$

سری چهارم

۲) الف)

$$P(M)\quad \min\ x_1 - 3x_2 + x_3 + MR_1 + MR_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - S_1 + R_1 &= 5 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + S_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + R_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, R_1, R_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

		1	-3	1	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
M	R_1	1	2	-1	-1	0	1	0	5
0	S_2	-3	-1	1	0	1	0	0	4
M	R_2	1	1	1	0	0	0	1	3
	$\bar{c}_j$	$1-2M$	$-3-3M$	1	M	0	0	0	
	x_2	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	0	$5/2$
	S_2	$-5/2$	0	$1/2$	$-1/2$	1	$1/2$	0	$13/2$
	R_2	$1/2$	0	$3/2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	$1/2$
	$\bar{c}_j$	$\frac{5-M}{2}$	0	$\frac{-3M-1}{2}$	$\frac{-M-3}{2}$	0	$\frac{3M+3}{2}$	0	
	x_2	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	$1/3$	$8/3$
	S_2	$-8/3$	0	0	$-2/3$	1	$2/3$	$-1/3$	$19/3$
	x_3	$1/3$	0	1	$1/3$	0	$-1/3$	$2/3$	$1/3$
	$\bar{c}_j$	$8/3$	0	0	$-4/3$	0	$M+4/3$	$M+1/3$	
	x_2	1	1	1	0	0	0	1	3
	S_2	-2	0	2	0	1	0	1	7
	S_1	1	0	3	1	0	-1	2	1
	$\bar{c}_j$	4	0	4	0	0	M	M+3	

$$X^* = \begin{cases} x_1^* = x_3^* = 0 \\ x_2^* = 3 \\ S_1^* = 1 \\ S_2^* = 7 \end{cases} \qquad Z^* = -9$$

سری چهارم]

ب) به روش دو فازی

$$
\begin{aligned}
PI)\ \min\ & R_1+R_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1+2x_2-x_3-S_1+R_1 = 5 \\
& -3x_1-x_2+x_3+S_2 = 4 \\
& x_1+x_2+x_3+R_2 = 3 \\
& x_i \geq 0\ (i=1,2,3),\ S_1,S_2\geq 0,\ R_1,R_2\geq 0
\end{aligned}
$$

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS	
		0	0	0	0	0	1	1		
1	R_1	1	2	-1	-1	0	1	0	5	PI)
0	S_2	-3	-1	1	0	1	0	0	4	
1	R_2	1	1	1	0	0	0	1	3	
	$\bar{c}_j$	-2	-3	0	+1	0	0	0		
	x_2	1/2	1	-1/2	-1/2	0	1/2	0	5/2	
	S_2	-5/2	0	1/2	-1/2	1	1/2	0	13/2	
	R_2	1/2	0	3/2	1/2	0	-1/2	1	1/2	
	$\bar{c}_j$	-1/2	0	-3/2	-1/2	0	3/2	0		
-3	x_2	2/3	1	0	-1/3	0	1/3	1/3	8/3	
0	S_2	-8/3	0	0	-2/3	1	2/3	-1/3	19/3	
1	x_3	1/3	0	1	1/3	0	-1/3	2/3	1/3	
	$\bar{c}_j$	0	0	0	0	0	1	1		پایان PI)
	$\bar{c}_j'$	8/3	0	0	-4/3	0				PII
	x_2	1	1	1	0	0			3	
	S_2	-2	0	2	0	1			7	
	S_1	1	0	3	1	0			1	
		4	0	4	0	0				

تغییر ضرایب تابع هدف استاندارد پس سایر عملیات سطری انجام داده وارد فاز II می‌شویم

$$
X^* = \begin{cases} x_1^* = x_3^* = 0 \\ x_2^* = 3 \\ S_1^* = 1 \\ S_2^* = 7 \end{cases} \qquad Z^* = -9
$$

سری چهارم

(3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	-1	ε	1	0	0	4
x_4	α	-9	0	1	0	1
x_5	γ	3	0	0	1	β
$\bar{c}_j$	δ	-2	0	0	0	$Z=10$

الف) چون مسأله در حالت بهینه است و ستون‌های منفی داریم پس مسأله از نوع max می‌باشد.

از آنجا که جدول جواب چندگانه دارد باید حداقل یکی از متغیرهای غیر پایه‌ای دارای ستون صفر باشد

و در جهت آن بتوانیم حرکت کنیم (یعنی تست نسبت غیر صفر باید داشته باشیم) پس:

$\delta = 0$

برای ε هیچ محدودیتی نداریم. α را نیز می‌تواند هر مقداری داشته باشد. ولی β باید مثبت باشد چون جدول شدنی باشد و خلاف صفر باشد تا تست نسبت صفر داشته باشیم.

ب) چون می‌خواهیم جواب [illegible] باشد، پس مسأله از نوع min سازی است.

اگر $\delta < 0$ باشد در اینصورت تنها x_2 می‌تواند وارد پایه شود، از آنجا $\beta \geq 0$ چون جدول باید شدنی باشد. چون می‌خواهیم جواب [illegible] شود پس باید در راستای x_2 متغیر خروجی نداشته باشیم (یعنی تست نسبت انجام نشود) ولی تست نسبت سوم $\left(\frac{\beta}{3}\right)$ انجام خواهد شد

پس x_2 نمی‌تواند تنها گزینه ورود به پایه باشد، لذا $\delta > 0$ تا x_1 نیز بتواند وارد پایه شود

با توجه به مطالب گفته شده، $\alpha > 0$ ، $\gamma > 0$ ، $\beta \geq 0$ و ε هر چیزی می‌تواند باشد

ج) جواب شدنی باشد $\Leftarrow$ $\beta \geq 0$ و بهینه نباشد $\Leftarrow$ $\delta > 0$

سری چهارم

(4)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	b 3	c 2	d 2	1	0	6
x_5	-1	2	e -1	0	1	1
$\bar{c}_j$	a -2	-1	3	0	0	$z=0$

آغازین

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	g 1	$2/3$	$2/3$	$1/3$	0	f 2
x_5	h 0	i $8/3$	$-1/3$	$1/3$	1	3
$\bar{c}_j$	0	$1/3$	j	k	l 0	$z=-4$

جاری

جاری $B^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 1/3 & 1\end{bmatrix}$ $\quad \bar{b}=B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix}f\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 0\\ 1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}\Rightarrow f=2$

پایه‌ها در جاری: x_1, x_5 هستند $\Rightarrow g=1 \quad h=0 \quad , B=[a_1\ a_5]=(B^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ a_1

$\Rightarrow b=3$

در جدول جاری $B^{-1}a_2=\begin{bmatrix}2/3\\ i\end{bmatrix}\Rightarrow a_2=B\begin{bmatrix}2/3\\ i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}c\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/3\\ i\end{bmatrix}$

$\Rightarrow c=2 \;,\; i=8/3$

$a_3=B\bar{a}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix}d\\e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/3\\ -1/3\end{bmatrix}\Rightarrow d=2 \;,\; e=-1$

در جدول آغازین: $\bar{c}_1=c_1-c_B^TB^{-1}a_1=c_1-(0\ 0)\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow c_1=a$

$\bar{c}_2=c_2-c_B^TB^{-1}a_2 \Rightarrow c_2=\bar{c}_2 \Rightarrow c_2=-1$

$\bar{c}_3=c_3-c_B^TB^{-1}a_3 \Rightarrow c_3=\bar{c}_3 \Rightarrow c_3=3$

در جدول جاری: $\frac{1}{3}=c_2-[c_1\ c_5]\begin{bmatrix}2/3\\ 8/3\end{bmatrix}\Rightarrow \frac{1}{3}=-1-(a\ 0)\begin{pmatrix}2/3\\ 8/3\end{pmatrix}\Rightarrow a=-2$

$K=\bar{c}_4=c_4-[-2\ 0]\begin{bmatrix}1/3\\ 1/3\end{bmatrix}\Rightarrow K=\frac{2}{3}$

$j=\bar{c}_3=c_3-[-2\ 0]\begin{bmatrix}2/3\\ -1/3\end{bmatrix}\Rightarrow j=\frac{13}{3}$

سری چهارم

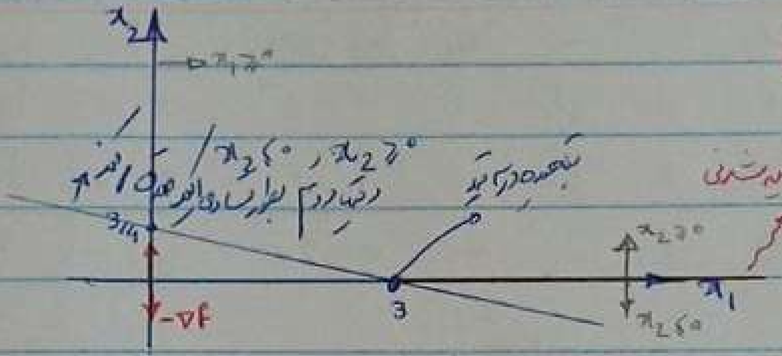
(5)

$\min \quad 5x_2$

s.t. $\quad -2x_2 \geq 0$

$x_1+4x_2 \geq 3$

$x_1,x_2 \geq 0$



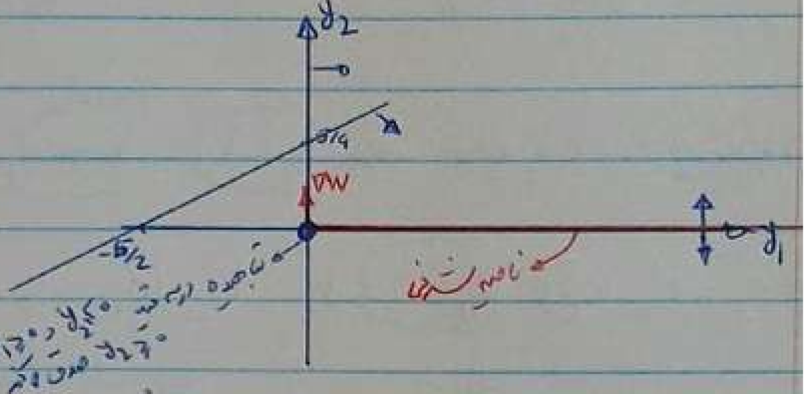
همانطور که مشاهده میشود ناحیه شدنی نیم خط $\{(x_1,x_2)|x_1\geq 3, x_2=0\}$ میباشد و مقدار بهینه تابع، ثابت صفر است.

D) $\max \quad 3y_2$

s.t. $\quad y_2 \leq 0$

$-2y_1+4y_2 \leq 5$

$y_1,y_2 \geq 0$



ناحیه شدنی دوگان نیز نیم خط $\{(y_1,y_2) | y_1\geq 0, y_2=0\}$ میباشد و مقدار بهینه تابع، ثابت صفر است.

همانطور که ملاحظه میکنیم هر دو دارای جواب بهینه چندگانه تباهیده هستند

که تباهیدگی هر کدام ناشی از چندگانگی دیگری است در واقع روابط زیر بین

مسائل اولیه و دوگان برقرار است:

P		D
چندگانه	$\Rightarrow$	تباهیده
یکتا و ناتباهیده	$\Rightarrow$	یکتا و ناتباهیده
چندگانه و ناتباهیده	$\Rightarrow$	یکتا و تباهیده
یکتا و تباهیده	$\Rightarrow$	چندگانه

سری پنجم

① الف)

P) $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$

$$\text{s.t.}\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 10$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + S_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

D) $\min w = 10y_1 + 6y_2$

$$\text{s.t.}\quad y_1 + y_2 \geq 2$$
$$2y_1 - 2y_2 \geq 3$$
$$3y_1 + 2y_2 \geq 6$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

$\Downarrow$

$$\min\ 10y_1 + 6y_2$$
$$y_1 + y_2 - S'_1 = 2$$
$$2y_1 - 2y_2 - S'_2 = 3$$
$$3y_1 + 2y_2 - S'_3 = 6$$
$$y_1, y_2, S'_1, S'_2, S'_3 \geq 0$$

ب)

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
I	S_1	1	2	3	1	0	10
	S_2	1	-2	2	0	1	6
	$\bar{c}_j$	2	3	6	0	0	0 = Z
II	S_1	-1/2	5	0	1	-3/2	1
	x_3	1/2	-1	1	0	1/2	3
	$\bar{c}_j$	-1	9	6	0	-3	18 = Z
III	x_2	-1/10	1	0	1/5	-3/10	1/5
	x_3	4/10	0	1	1/5	2/10	16/5
	$\bar{c}_j$	-1/10	0	0	-9/5	-3/10	94/5 = Z

I) متغیرهای پایه اولیه $\begin{cases} S_1 = 10 \xrightarrow{\text{شرط مکمل}} y_1 = 0 \\ S_2 = 6 \xrightarrow{\text{〃}} y_2 = 0 \end{cases}$ هر سه قید دوگان نقض می‌شود

II) متغیرهای پایه اولیه $\left.\begin{cases} S_1 = 1 > 0 \xrightarrow{\text{شرط}} y_1 = 0 \\ x_3 = 3 > 0 \longrightarrow S'_3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow \underbrace{[0\quad 3]}_{\text{متغیرهای دوگان}}$ قید دوم نقض می‌شود

III) متغیرهای پایه اولیه $\left.\begin{cases} x_2 = 1/5 > 0 \xrightarrow{\text{شرط مکمل}} S'_2 = 0 \\ x_3 = 16/5 > 0 \xrightarrow{\text{〃}} S'_3 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow y_1^* = 9/5 ,\ y_2^* = 3/10$

هیچ قیدی نقض نمی‌شود

پ) I) متغیرهای پایه دوگان $\begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ ، $y_1 = y_2 = 0$ متغیرهای غیرپایه

$\longrightarrow B = -I$

سری پنجم

I) متغیرهای اساسی دوگان $= \begin{bmatrix} y_2 \\ s'_1 \\ s'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$ ، $y_1 = s'_3 = 0$ غیر اساسی

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بیشترین تخطی y_2 در مسأله دوگان

III) متغیرهای اساسی دوگان $= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 3/10 \\ 1/10 \end{bmatrix}$ ، $s'_2 = s'_3 = 0$ غیر اساسی

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ت) I : $y_1 = y_2 = 0 \Rightarrow w = 0$

II : $y_1 = 0 , y_2 = 3 \Rightarrow w = 18$

III : $y_1 = 9/5 , y_2 = 3/10 \Rightarrow w = \frac{99}{5}$

مسأله دوگان مینیمم سازی است پس در هر مرحله مقدار آن بیشتر می‌شود پس تابع هدف دوگان در هر دور سیمپلکس بزرگتر می‌شود.

ث) در اصل متمم این موارد نشان داده شده است.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 16/5 \end{bmatrix} \qquad Y^* = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 3/10 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = \frac{99}{5} \qquad W^* = 10 \times \frac{9}{5} + 6 \times \frac{3}{10} = \frac{99}{5}$$

$y_1^* = 9/5 > 0 \Rightarrow s_1^* = 0$ ✓ $\qquad x_2^* = 1/5 > 0 \Rightarrow s'_2 = 0$ ✓

$y_2^* = 3/10 > 0 \Rightarrow s_2^* = 0$ ✓ $\qquad x_3^* = \frac{16}{5} > 0 \Rightarrow s'_3 = 0$ ✓

$s_1^* = 1/10 > 0 \Rightarrow x_1^* = 0$ ✓

سری دوم

(2)

P) $\min Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

st.
$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 15 \rightarrow y_1$$
$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + x_5 = 20 \rightarrow y_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow y_3$$
$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

$\Rightarrow$

D) $\max W = 15y_1 + 20y_2 + 5y_3$

s.t.
$$y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 5$$
$$5y_1 - 6y_2 + y_3 \leq -6$$
$$-3y_1 + 10y_2 + y_3 \leq -7$$
$$-y_1 \leq 0$$
$$y_2 \leq 0$$
y_3 آزاد

متغیرهای پایه $x_5, x_3, x_2 \Rightarrow x_1 = x_4 = 0$ غیرپایه اند

با توجه به مقادیر در قیود ساده اصلی داریم:

$$\left.\begin{aligned} 5x_2 - 3x_3 &= 15 \\ -6x_2 + 10x_3 + x_5 &= 20 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = \frac{30}{8} = \frac{15}{4},\ x_3 = \frac{5}{4},\ x_5 = 30$$

متغیرهای کمبود متناظر قیود دوگان

$$\Rightarrow X^* = \begin{cases} x_1^* = x_4^* = 0 \\ x_2^* = \frac{15}{4} > 0 \xrightarrow{\text{نتیجه}} & s_2' = 0 \rightsquigarrow 5y_1 - 6y_2 + y_3 = -6 \\ x_3^* = \frac{5}{4} > 0 \xrightarrow{\text{نتیجه}} & s_3' = 0 \rightsquigarrow -3y_1 + 10y_2 + y_3 = -7 \\ x_5^* = 30 > 0 \xrightarrow{\text{نتیجه}} & s_5' = 0 \rightsquigarrow y_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_1^* = \frac{1}{8},\ y_2^* = 0,\ y_3^* = \frac{-53}{8}$$

$$\Leftarrow$$

$$Y^* = \begin{cases} y_1^* = 1/8 \\ y_2^* = 0 \\ y_3^* = \frac{-53}{8} \end{cases}$$

$$Z^* = W^* = \frac{-250}{8}$$

سری پنجم

(3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	1/4	1	1/2	0	5/2
x_1	1	-1/2	0	-1/6	1/3	5/2
$\bar{c}_j$	0	2	0	3	2	$z=-35$

الف) چون سود در نسبی همگی مثبت هستند پس مسأله اصلی می‌نیمم‌سازی است

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}a_1=\bar{a}_1 \Rightarrow a_1=B\bar{a}_1=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}=a_1 \quad , \quad a_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2=B\bar{a}_2 \Rightarrow a_2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/4 \end{bmatrix}=a_2$$

$$c_B^T B^{-1}=[-3 \quad -2]$$ منفی بردار زیر متغیرهای کمبود (متغیرهای دوگان)

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \Rightarrow b=B\bar{b} \Rightarrow b=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}=b$$

$$\bar{c}_2=c_2-c_B^T B^{-1}a_2 \Rightarrow c_2=2+[-3 \quad -2]\begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/4 \end{bmatrix}=3=c_2$$

$$c_B^T B^{-1}=[-3 \quad -2] \Rightarrow [c_3 \quad c_1]\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}=[-3 \quad -2]$$

$$\Rightarrow c_1=-6 \ , \ c_3=-8$$

مسأله اولیه $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1+3x_2-8x_3 \\ \text{s.t.} \quad & +\tfrac{1}{2}x_2+2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1-\tfrac{5}{4}x_2+x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ب) D) $\max \quad 5y_1 + 10y_2$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} 3y_2 &\leq -6 \\ \tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{5}{4}y_2 &\leq 3 \\ 2y_1 + y_2 &\leq -8 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2 \leq 0$$

پ) $W^* = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$

4

D) $\min \quad 10y_1 + 6y_2$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 2 \\ 2y_1 - 2y_2 &\geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

5

P) $\min \ c^T x$ $\quad$ s.t. $Ax \geq c$ $\quad$ $x \geq 0$

$\rightarrow$ D) $\max \ p^T c$ $\quad$ s.t. $p^T A \leq c^T$ $\quad$ $p \geq 0$

$\overset{A=A^T}{\equiv}$ D') $\max \ c^T p$ $\quad$ s.t. $Ap \leq c$ $\quad$ $p \geq 0$

$x^* \geq 0$ طوری است که $Ax^* = c$ پس می‌توانیم داشته باشیم $Ax^* \leq c$ ، در نتیجه x^* یک نقطه شدنی برای D' است. پس x^* هم یک نقطه‌ی شدنی برای مسأله اولیه است و هم یک نقطه شدنی برای D'. از طرفی مقدار تابع P و D در این نقطه برابر $c^T x^*$ می‌باشد. پس طبق نتیجه قضیه ضعیف دوگانی داریم x^* بهینه برای هر دو مسأله می‌باشد.

سری پنجم

(6)

P) $\min\ c^T x$ $\Rightarrow$ D) $\max\ p^T b$

$\text{st. } Ax = b$ $\text{st. } p^T A \leqslant c^T$

$x \geqslant 0$ p آزاد

x^* جواب بهینه P p^* جواب بهینه D

الف) $\tilde{P}$) $\min\ \tilde{c}^T x$

$\text{st. } Ax = b$

$x \geqslant 0$

$\tilde{x}$ جواب بهینه $\tilde{P}$

توجه داریم فضای شدنی P و $\tilde{P}$ یکی می‌باشد،

پس $\tilde{x}$ یک نقطه شدنی در مسئله P است، و

x^* یک نقطه شدنی در مسئله $\tilde{P}$ می‌باشد، در نتیجه

داریم:

$$\tilde{c}^T \tilde{x} \leqslant \tilde{c}^T x^* \Rightarrow \tilde{c}^T (\tilde{x} - x^*) \leqslant 0$$

$$c^T x^* \leqslant c^T \tilde{x} \Rightarrow c^T (x^* - \tilde{x}) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow (\tilde{c}^T - c^T)(\tilde{x} - x^*) \leqslant 0 \Rightarrow (\tilde{c} - c)^T (\tilde{x} - x^*) \leqslant 0$$

ب) $\tilde{P}$) $\min\ c^T x$ $\Rightarrow$ $\tilde{D}$) $\max\ p^T \tilde{b}$

$\text{st. } Ax = \tilde{b}$ $\text{st. } p^T A \leqslant c^T$

$x \geqslant 0$ p آزاد

$\tilde{x}$ جواب بهینه $\tilde{P}$ $\tilde{p}$ جواب بهینه $\tilde{D}$

p^* یک جواب شدنی برای مسئله $\tilde{D}$ است پس:

سری پنجم

$$p^{*T}\tilde{b} \geq \tilde{p}^T\tilde{b} \overset{\text{قضیه دوگانی}}{=} c^T\tilde{x} \rightarrow p^{*T}\tilde{b} \geq c^T\tilde{x} \quad \text{(I)}$$

$$c^Tx^* \overset{\text{ق ق}}{=} p^{*T}b \quad \text{(II)}$$

حال از طرفین (I) مقدار c^Tx^* را کم می‌کنیم:

$$p^{*T}\tilde{b} - c^Tx^* \geq c^T\tilde{x} - c^Tx^* \overset{II}{\Longrightarrow} p^{*T}\tilde{b} - p^{*T}b \geq c^T\tilde{x} - c^Tx^*$$

$$\Rightarrow p^{*T}(\tilde{b} - b) \geq c^T(\tilde{x} - x^*) \quad \checkmark$$

(7) ابتدا فرض می‌کنیم "الف" جواب نداشته باشد نشان می‌دهیم "ب" جواب دارد:

$$\begin{array}{lll} P)\ \max\ \varepsilon^T x & & D)\ \min\ 0^T x \\ \text{s.t. } Ax = 0 & \Rightarrow & \text{s.t. } p^TA \geq \varepsilon \\ x \geq 0 & & p \text{ آزاد} \end{array}$$

الف جواب ندارد یعنی تنها بردار $x=0$ در مسئله P صدق می‌کند، پس P شدنی کراندار است در نتیجه دوگان آن یعنی D نیز شدنی کراندار است ولذا بردار p دلخواه $p^TA \geq \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ پس p ای وجود دارد که $p^TA > 0$ باشد یعنی مسئله "ب" جواب دارد.

حال فرض می‌کنیم "الف" جواب دارد نشان می‌دهیم "ب" جواب ندارد:

"الف" جواب دارد $\Rightarrow \exists \bar{x} \neq 0;\ A\bar{x} = 0,\ \bar{x} \geq 0 \xrightarrow{t>0} A(t\bar{x}) = 0,\ t\bar{x} \geq 0$

یعنی $(t\bar{x})$ نیز یک نقطه شدنی P است در این صورت مقدار تابع هدف، یعنی $\max\ \varepsilon^T(t\bar{x})$، $+\infty$ است (چون t را هر مقدار بخواهیم می‌توانیم بزرگ اختیار کنیم) پس P شدنی نامتناهی است لذا D نشدنی است. یعنی هیچ p ای وجود ندارد که $p^TA > 0$ در نتیجه مسئله "ب" جواب ندارد.

سری پنجم

(8) الف) به ازای هر x که $Ax \geq 0$، $x \geq 0$ داریم $x_1 = 0$.

ب) $p \geq 0$ وجود دارد که $p^T A \leq 0^T$ و $p^T A_1 < 0$.

مسائل اولیه و دوگان زیر را به ازای هر $\varepsilon \geq 0$ در نظر بگیرید:

$$P)\ \min\ -\varepsilon x_1 \quad \text{s.t.}\quad Ax \geq 0,\ x \geq 0$$

$$D)\ \max\ 0^T p \quad \text{s.t.}\quad A_i^T p \leq 0\ \ i \neq 1,\quad A_1^T p \leq -\varepsilon,\quad p \geq 0$$

فرض کنیم که «الف» برقرار باشد. توجه داریم $0 \in F_p = \{x \mid Ax \geq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset$ و لذا P شدنی است و با توجه به برقراری «الف» P شدنی کراندار است (چون برای هر $x \in F_p$، $x_1 = 0$ و در نتیجه تابع هدف P همواره صفر است). لذا D شدنی کراندار است و در نتیجه «ب» نیز برقرار است.

فرض کنیم که «ب» برقرار است. پس $\varepsilon \geq 0$ یافت می‌شود که $F_D \neq \emptyset$، پس D شدنی کراندار است، لذا P نیز شدنی کراندار است. به برهان خلف فرض کنیم که $\bar{x}$ یافت می‌شود که $A\bar{x} \geq 0$، $\bar{x} \geq 0$، $\bar{x}_1 \neq 0$. توجه داریم که برای هر $t > 0$، $t\bar{x}$ نیز شدنی است، چون:

$$\begin{cases} A(t\bar{x}) = tA\bar{x} \geq 0 \\ t\bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

به علاوه:

$$(t\bar{x})_1 = t\bar{x}_1 \neq 0 \xRightarrow{x \geq 0} (t\bar{x})_1 > 0$$

و با جایگذاری در تابع هدف:

$$-\varepsilon (t\bar{x})_1 = -\varepsilon t \bar{x}_1 \xrightarrow{t \to \infty} -\infty$$

که در این صورت با شدنی کراندار بودن P در تناقض است. پس فرض خلف باطل است و $\bar{x}$ ای یافت نمی‌شود که $A\bar{x} \geq 0$، $\bar{x} \geq 0$، $\bar{x}_1 \neq 0$ و لذا «الف» برقرار است.

سری پنجم

(۹)

دستگاه I $\left\{ Ax \geq b \right.$ دستگاه II $\left\{ \begin{array}{l} A^T y = 0 \\ b^T y > 0 \end{array} \right.$

جواب دارد $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ جواب ندارد

دستگاه I دارای قید ≤ است پس برای آن یک مسأله بهینه‌سازی تولید می‌کنیم:

$$\begin{array}{llll} P) & \min & 0^T x & \\ & s.t. & A^T x \geq b & \Rightarrow \\ & & \text{آزاد} & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} D) & \max & b^T y \\ & s.t. & y^T A = 0 \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

مشخص است مسأله دوگان می‌تواند در اینکه تشخیص دهیم دستگاه II جواب دارد یا خیر به ما کمک کند. چون P نشدنی است پس D یا نشدنی است یا شدنی اساسی $(+\infty)$

چون $y = 0$ در قیود (D) صدق می‌کند، پس D شدنی اساسی است و لذا

$\bar{y} \in R^m$ ای که در $\bar{y}^T A = 0$ صدق کند وجود دارد که هزینه‌ی آن مثبت است

یعنی $\bar{y}^T b > 0$. این یعنی دستگاه دوم جواب دارد.

موفق باشید
نفیسی