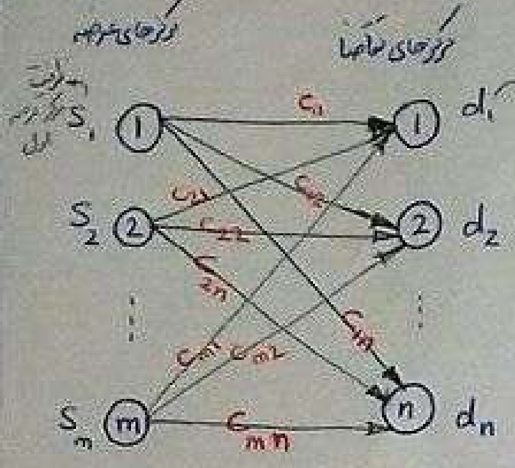


مسائل حمل و نقل

متغیر تصمیم: x_{ij} : میزان کالای ارسالی از مرکز عرضه‌ی iام

به مرکز تقاضای jام $(i=1,\dots,m \;,\; j=1,\dots,n)$

c_{ij} : هزینه ارسال کالا از مرکز عرضه‌ی iام به مرکز تقاضای jام

تابع هدف : $\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$

محدودیت‌ها : 1) رابطه میزان عرضه مرکز iام : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i \qquad i=1,2,\dots,m.$

2) رابطه میزان تقاضای مرکز jام : $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant d_j \qquad j=1,\dots,n.$

پس مدل مسئله حمل و نقل به صورت زیر در می‌آید:

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{st.}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant d_j \qquad j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

- مدل حمل و نقل متوازن $\left(\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} d_j\right)$

در مدل حمل و نقل متوازن کل عرضه با کل تقاضا برابر است.

نکته: اگر مدل حمل و نقل متوازن باشد، آن‌گاه قیدهای مدل حمل و نقل صورت تساوی خواهند داشت.

اثبات: به برهان خلف فرض می‌کنیم Δ $1 \leqslant k \leqslant m$ موجود باشد به طوریکه $\sum_{j=1}^{n} x_{kj} < S_k$

لذا داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} < s_k \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \times$$

پس فرض خلف باطل است. داریم:

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که برای هر j:

$$\square \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

پس در مدل حمل و نقل متوازن داریم:

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

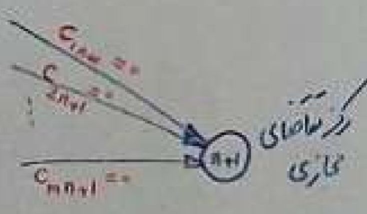
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad \forall i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \qquad \forall j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

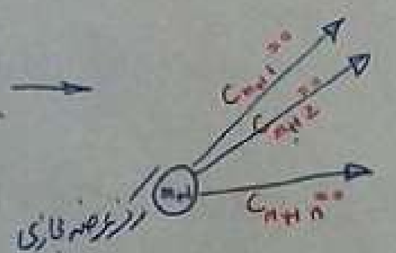
تذکر: اگر مدل حمل و نقل متوازن نباشد، $\left(\sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} d_j \right.$ یا $\left. \sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j \right)$ با استفاده از مرکز عرضه مجازی یا مرکز تقاضای مجازی با ظرفیت $\left| \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \right|$ می‌توان مدل حمل و نقل متوازن داشت.

I. اگر میزان عرضه بیشتر باشد $\longrightarrow$



با ظرفیت: $\sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$

II. اگر میزان تقاضا بیشتر باشد $\longrightarrow$



با ظرفیت: $\sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i$

- روش حل مدل حمل و نقل

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j=1,\dots,n \quad \xrightarrow{\text{تقاضا}} \quad x_{11}+x_{21}+\dots+x_{m1}=d_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \qquad i=1,\dots,m \quad \xrightarrow{n+1\text{ ام}} \quad x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n}=S_1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

- تعداد متغیرهای مدل حمل و نقل : mn

- تعداد قیدهای " " : $m+n$

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ n+2 \\ \vdots \\ n+m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$A=\begin{array}{c} \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ n+m \end{array}\left[\begin{array}{c|c|c|c} I_n & I_n & \cdots & I_n \\ \hline e'_n & 0 & & 0 \\ 0 & e'_n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & & e'_n \end{array}\right] \qquad e'_n=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{1\times n}$$

- تمرین: نشان دهید A رتبه ناقص است و $\mathrm{rank}(A)=m+n-1$.

- تمرین: نشان دهید هر زیرماتریس مربعی A، مانند B که در نظر بگیریم، داریم: $\det(B)=0$ یا $+1$ یا -1.

- روش جدولی مدل حمل و نقل :

تقاضا

عرضه

c_{11}	c_{12}	c_{13}		c_{1n}	S_1
c_{21}	c_{22}	c_{23}		c_{2n}	S_2
c_{31}	c_{32}	c_{33}		c_{3n}	S_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}		c_{mn}	S_m
d_1	d_2	d_3		d_n	

اگر بخواهیم مدل حمل و نقل را به کمک روش سیمپلکس حل کنیم، به دو مشکل زیر برخورد خواهیم کرد:

۱- صحیح بودن: xها در بسیاری از حالات باید xها صحیح باشند.

۲- تعداد متغیرها و قیدهای زیاد حتی برای یک مدل حمل و نقل کوچک. (150 متغیر، 25 قید } ← 10 تا عرضه، 15 تا تقاضا)

پس به روش های دیگری برای حل مسأله حمل و نقل نیاز می باشد. برای یافتن جواب پایه ی شدنی آغازین از روش های زیر کمک می گیریم:

۱- روش گوشه شمال غربی

2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	~~10~~ 8
$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	10 $\boxed{6}$	1 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	~~11~~ 1
$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	5 $\boxed{1}$	$\boxed{1}$	5
$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	4 $\boxed{2}$	5 $\boxed{2}$	9
2	8	10	~~10~~ 9 4	5	

از شمالی ترین گوشه ی غربی، شروع به مقداردهی جدول با قاعده (سطر یا ستونی خط نخورده باشد) می کنیم. بدین ترتیب که کمترین مقدار بین عرضه و تقاضای متناظر به خانه ی مورد نظر را به خانه اختصاص داده و سطر یا ستون پوچ شده را حذف می کنیم و مقدار اختصاص داده شده به خانه ی جدول را از سطر یا ستون با قاعده ی متناظرش کم می کنیم و همین روند را ادامه می دهیم تا تمام عرضه و تقاضاها پوچ شوند.

$m+n=9$

$rank(A)=m+n-1=8$

در صورتی که تباهیدگی نداشته باشیم، باید به تعداد $rank(A)$ متغیر پایه ای غیر صفر داشته باشیم. در این جدول 7 متغیر پایه ای غیرصفر داریم که نشان دهنده ی تباهیدگی جدول است.

۲- روش کمترین هزینه

$\boxed{7}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{9}$	2 $\boxed{2}$	~~10~~ 2
3 $\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	3
$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	2 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	2
4 $\boxed{3}$	$\boxed{4}$	4 $\boxed{1}$	2 $\boxed{5}$	~~10~~ ~~6~~ 2
~~7~~ 4	8	~~6~~ 4	~~4~~ 2	

در جدول باقیمانده (سطر یا ستونی خط نخورده باشد) خانه ای که کمترین هزینه را دارد پیدا کرده و کمترین مقدار عرضه یا تقاضای متناظرش را به آن اختصاص داده، سطر یا ستون پوچ شده را حذف می کنیم و مقدار اختصاص داده شده به خانه جدول را از سطر یا ستون با قاعده متناظرش کم می کنیم و همین روند را ادامه می دهیم تا همه عرضه و تقاضاها پوچ شوند.

۳- روش وگل

کوچکترین عنصر هر سطر را انتخاب، و از کوچکترین عنصر دوم همان سطر کم می کنیم. به همین ترتیب کوچکترین عنصر هر ستون را انتخاب، و از کوچکترین عنصر دوم همان ستون کم می کنیم.

این اعداد را بعنوان جریمه های سطر و ستون در نظر می گیریم. از بین جریمه های بدست آمده، بزرگترین جریمه را انتخاب و به سراغ سطر یا ستون متناظرش می رویم و کوچکترین عنصر واقع در آن سطر یا ستون را انتخاب و به خانه ی متناظرش به اندازه ی $Min\{s_i, d_j\}$ اختصاص می دهیم. این روند را تا جایی که عرضه و تقاضای باقی ماند انجام می دهیم.

میزان تقاضا

میزان عرضه

	~~10~~ 5	15	15
20	4 / 5	7	5 / 15
~~20~~ 5	2 / 5	4 / 15	3

	d_1	d_2	d_3	جریمه
s_1	4	7	5	5-4=1
s_2	2	4	3	3-2=1
جریمه	4-2=2	7-4=3	5-3=2	

بزرگترین جریمه بین ستون d1 تا d2 را انتخاب کن

	d_1	d_3	
s_1	4	5	5-4=1
s_2	2	3	3-2=1
	4-2=2	5-3=2	

بزرگترها را انتخاب کن

۴- روش راسل

به هر کدام از سطرها u_i و به هر کدام از ستون ها v_j را نسبت می دهیم. بزرگترین عنصر هر سطر را انتخاب و به u_i متناظرش اختصاص می دهیم و بزرگترین عنصر هر ستون را انتخاب و به v_j متناظرش اختصاص می دهیم. برای هر کدام از خانه های خالی جدول Δ_{ij} ($\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$) را محاسبه می کنیم. منفی ترین Δ_{ij} را انتخاب می کنیم و به خانه متناظرش مقدار $Min\{s_i, d_j\}$ را اختصاص می دهیم. این روند را تا جایی که عرضه و تقاضای باقی ماند انجام می دهیم.

	10	15	15	
5 ~~20~~	4 / 5	7 / 15	5	u_1
5 ~~20~~	2 / 5	4	3 / 15	u_2
	v_1	v_2	v_3	

$u_1 = 7$ $\quad v_1 = 4$

$u_2 = 4$ $\quad v_2 = 7$

$v_3 = 5$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

مرحله‌ی اول : $\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 - 7 - 4 = -7$

$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 7 - 7 - 7 = \boxed{-7}$ ← ستون ۲ انتخاب شود

$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 7 - 5 = -7$

$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 2 - 4 - 4 = -6$

$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 4 - 4 - 7 = -7$

$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 4 - 5 = -6$

جدول بعد از مرحله‌ی اول ←

	d_1	d_3	
s_1	4	5	$u_1 = 5$
s_2	2	3	$u_2 = 3$
	$v_1 = 4$	$v_3 = 5$	

مرحله‌ی دوم : $\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 - 5 - 4 = -5$

$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 5 - 5 = -5$

$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 2 - 3 - 4 = -5$

$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 3 - 5 = \boxed{-5}$ ← ردیف ۲ انتخاب شد

همانطور که در جدول نهایی مشخص شد، متغیرهای پایه در جواب شدنی اولیه آغازین این روش به صورت زیر است :

$x_{11} = 5$; $x_{21} = 5$;

$x_{12} = 15$; $x_{23} = 15$.

با استفاده از هریک از روش های بالا به یک پاسخ شدنی اولیه دست می یابیم، حال برای اینکه بفهمیم این نقطه جواب بهینه مسئله است از دوگان مدل حمل و نقل کمک می گیریم

— دوگان مسئله حمل و نقل:

$$P)\ \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j=1,\dots,n \rightsquigarrow \left\{ v_1, v_2, \dots, v_n \right.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad i=1,\dots,m \rightsquigarrow \left\{ u_1, u_2, \dots, u_m \right.$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

متغیرهای دوگان متناظر

با قیدهای مسئله اولیه

$$D)\ \max \sum_{j=1}^{n} d_j v_j + \sum_{i=1}^{m} s_i u_i$$

$$\text{s.t.}\quad u_i + v_j \leqslant c_{ij} \qquad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

u_i, v_j آزاد

حال نقطه بدست آمده از روش کمترین هزینه را بررسی می کنیم که آیا پاسخ بهینه است یا خیر. ابتدا قیدهای دوگان را با توجه به جدول می نویسیم:

	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	$\boxed{7}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{9}$	2 $\boxed{2}$	10
u_2	3 $\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	3
u_3	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	2 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	2
u_4	4 $\boxed{3}$	$\boxed{4}$	4 $\boxed{1}$	2 $\boxed{5}$	10
	7	8	6	4	

$u_1 + v_1 \leqslant 7 \qquad u_2 + v_1 \leqslant 2$

$u_1 + v_2 \leqslant 1 \qquad u_2 + v_2 \leqslant 2$

$u_1 + v_3 \leqslant 9 \qquad u_2 + v_3 \leqslant 3$

$u_1 + v_4 \leqslant 2 \qquad u_2 + v_4 \leqslant 5$

$u_3 + v_1 \leqslant 3 \qquad u_4 + v_1 \leqslant 3$

$u_3 + v_2 \leqslant 3 \qquad u_4 + v_2 \leqslant 4$

$u_3 + v_3 \leqslant 1 \qquad u_4 + v_3 \leqslant 1$

$u_3 + v_4 \leqslant 2 \qquad u_4 + v_4 \leqslant 5$

حال با استفاده از شرط لنگی مکمل $x_j(\underbrace{c_j - y^T a_j}_{\bar{c}_j}) = 0$ مقادیر u_i ها و v_j ها را بدست می‌آوریم.

$\left(\begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}\right)$. پس داریم:

$(=)$ متغیر دوگان متناظر $\xleftrightarrow{\text{شرط لنگی مکمل}}$ $(\neq 0)$ متغیر اولیه

$$x_{12} = 8 > 0 \xRightarrow{\text{لنگی مکمل}} u_1 + v_2 = c_{12} \Rightarrow u_1 + v_2 = 1$$

$$x_{14} = 2 > 0 \Rightarrow u_1 + v_4 = c_{14} \Rightarrow u_1 + v_4 = 2$$

$$x_{21} = 3 > 0 \Rightarrow u_2 + v_1 = c_{21} \Rightarrow u_2 + v_1 = 2$$

$$x_{33} = 2 > 0 \Rightarrow u_3 + v_3 = c_{33} \Rightarrow u_3 + v_3 = 1$$

$$x_{41} = 4 > 0 \Rightarrow u_4 + v_1 = c_{41} \Rightarrow u_4 + v_1 = 3$$

$$x_{43} = 4 > 0 \Rightarrow u_4 + v_3 = c_{43} \Rightarrow u_4 + v_3 = 1$$

$$x_{44} = 2 > 0 \Rightarrow u_4 + v_4 = c_{44} \Rightarrow u_4 + v_4 = 5$$

معادله : $m+n-1 = 7$

متغیر : 8

$\Downarrow$

تعداد متغیرها از تعداد معادلات بیشتر است

در اینجا چون تعداد متغیرها یکی از تعداد معادلات بیشتر است، پس یک دستگاه معادلات با یک درجه آزادی داریم. یکی از متغیرها را انتخاب کرده و مقدار دلخواه (برای راحتی صفر) قرار دهیم و بقیه متغیرها را از دستگاه حاصل بدست می‌آوریم. $u_1 = 0$ قرار دهیم، در نتیجه متغیرهای دوگان به صورت زیر مقدار می‌گیرند:

$u_1 = 0$ $\quad u_4 = 3$ $\quad u_3 = 3$

$v_2 = 1$ $\quad v_1 = 0$ $\quad u_2 = 2$

$v_4 = 2$ $\quad v_3 = -2$

حال برای اینکه بدانیم نقطه جاری، بهینه است از سود نسبی استفاده می‌کنیم. چون مسئله حمل و نقل، مینیمم‌سازی است پس در حالتی بهینه خواهد شد که تمام سودهای نسبی (≥ 0) باشند.

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

سود نسبی متغیرهای پایه‌ای Δ برابر صفراند، کافیست سود نسبی متغیرهای غیرپایه‌ای را حساب کنیم:

$\bar{C}_{11} = C_{11} - u_1 - v_1 = 7 - 0 - 0 = 7 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{13} = C_{13} - u_1 - v_3 = 9 - 0 + 2 = 11 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{22} = C_{22} - u_2 - v_2 = 2 - 2 - 1 = \boxed{-1 < 0}$ ✗ ← به دلخواه انتخاب می‌شود

$\bar{C}_{23} = C_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 2 + 2 = 3 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{24} = C_{24} - u_2 - v_4 = 5 - 2 - 2 = 1 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{31} = C_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 3 - 0 = 0 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{32} = C_{32} - u_3 - v_2 = 3 - 3 - 1 = -1 < 0$ ✗

$\bar{C}_{34} = C_{34} - u_3 - v_4 = 2 - 3 - 2 = -3 < 0$ ✗

$\bar{C}_{42} = C_{42} - u_4 - v_2 = 4 - 3 - 1 = 0 \geq 0$ ✓

به دلخواه یکی از سودهای نسبی منفی را انتخاب کرده و متغیر غیرپایه‌ای متناظرش را با مقدار $\theta > 0$ وارد پایه می‌کنیم (در اینجا $x_{22} = \theta$) سپس با تشکیل یک چرخه، Δ با در نظر گرفتن متوازن باقی ماندن جدول، بسته می‌شود، متغیر خروجی و مقدار θ با توجه به برقرار بودن شرط شدنی بودن جواب، تعیین می‌شوند. لازم به ذکر است Δ چرخه‌ی مورد نظر از متغیر واردشونده آغاز می‌شود و با طی نقاط پایه‌ای مناسب، دوباره به همان متغیر واردشونده‌ی ابتدایی برمی‌گردد. آنقدر این روند را تکرار می‌کنیم Δ به جواب بهینه (تمامی سودهای نسبی متغیرهای غیرپایه‌ای نامنفی) برسیم.

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	7	1 $8-\theta$	9	2 $2+\theta$
u_2	2 $3-\theta$	2 θ	3	5
u_3	3	3	1 2	2
u_4	3 $4+\theta$	4	1 4	5 $2-\theta$

$$\left.\begin{array}{l} 8-\theta \geq 0 \\ 2+\theta \geq 0 \\ 2-\theta \geq 0 \\ 4+\theta \geq 0 \\ 3-\theta \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 2$$

بزرگترین مقدار θ Δ در تمامی نامساوی‌ها صدق می‌کند

با قرار دادن $\theta = 2$ مقدار متغیرهای داخل چرخه به صورت زیر می‌شوند:

$x_{12} = 6$, $x_{14} = 4$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 2$ ← واردشده

$x_{41} = 6$, $x_{44} = 0$ ← خارج‌شونده

حال دوباره مقادیر u و v جدید را با استفاده از شرط مکمل بدست می‌آوریم:

$x_{12}=6>0 \xrightarrow{\text{شرط مکمل}} u_1+v_2=C_{12} \Rightarrow u_1+v_2=1$

$x_{14}=4>0 \xrightarrow{〃} u_1+v_4=C_{14} \Rightarrow u_1+v_4=2$

$x_{21}=1>0 \xrightarrow{〃} u_2+v_1=C_{21} \Rightarrow u_2+v_1=2$

$x_{22}=2>0 \xrightarrow{〃} u_2+v_2=C_{22} \Rightarrow u_2+v_2=2$

$x_{33}=2>0 \xrightarrow{〃} u_3+v_3=C_{33} \Rightarrow u_3+v_3=1$

$x_{41}=6>0 \xrightarrow{〃} u_4+v_1=C_{41} \Rightarrow u_4+v_1=3$

$x_{43}=4>0 \xrightarrow{〃} u_4+v_3=C_{43} \Rightarrow u_4+v_3=1$

8 متغیر
7 معادله
$\xrightarrow{\text{درجه آزادی}}$ $u_1=0$ به دلخواه

$u_2=1$ $v_1=1$

$u_3=2$ $v_2=1$

$u_4=2$ $v_3=-1$

$v_4=2$

دوباره هزینه نسبی متغیرهای غیرپایه را حساب می‌کنیم:

$\bar{C}_{11}=C_{11}-u_1-v_1=7-0-1=6\geqslant 0$ ✓

$\bar{C}_{13}=9-0+1=10\geqslant 0$ ✓

$\bar{C}_{23}=3-1+1=3\geqslant 0$ ✓

$\bar{C}_{24}=5-1-2=2\geqslant 0$ ✓

$\bar{C}_{31}=3-2-1=0$ ✓

$\bar{C}_{32}=3-2-1=0$ ✓

$\bar{C}_{34}=2-2-2=\boxed{-2<0}$ متغیر وارد شونده

$\bar{C}_{42}=4-2-1=1\geqslant 0$ ✓

$\bar{C}_{44}=5-2-2=1>0$ ✓

	$6+\theta$		$4-\theta$
$1+\theta$	$2-\theta$		
		$2-\theta$	$+\theta$
$6-\theta$		$4+\theta$	

$\theta=2 \longrightarrow x_{33}=x_{22}=0 \Rightarrow$ یکی را به دلخواه از پایه خارج می‌کنیم (x_{33})

دیگری با مقدار صفر در پایه باقی می‌ماند.

$x_{12}=8 \Rightarrow u_1+v_2=1$

$x_{14}=2 \Rightarrow u_1+v_4=2$

$x_{21}=3 \Rightarrow u_2+v_1=2$

$x_{34}=2 \Rightarrow u_3+v_4=2$

$x_{41}=4 \Rightarrow u_4+v_1=3$

$x_{43}=6 \Rightarrow u_4+v_3=1$

7 متغیر
6 معادله
$\xrightarrow{\text{2 درجه آزادی}}$ $u_1=v_1=0$ به دلخواه

$u_2=2$ $v_2=1$

$u_3=0$ $v_3=-2$

$u_4=3$ $v_4=2$

$\bar{C}_{11} = 7-0-0 = 7 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{13} = 9-0+2 = 11 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{23} = 3-2+2 = 3 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{24} = 5-2-2 = 1 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{31} = 3-0-0 = 3 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{32} = 3-0-1 = 2 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{33} = 1-0+2 = 3 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{42} = 4-3-1 = 0 \geq 0$ ✓

$\bar{C}_{44} = 5-3-2 = 0 \geq 0$ ✓

همانطور که ملاحظه می‌شود، تمام سودهای نسبی متغیرهای غیرپایه‌ای نامنفی هستند، پس جدول بهینه است و جواب بهینه عبارت است از:

$$X^* = \begin{cases} x^*_{12} = 8 \\ x^*_{14} = 2 \\ x^*_{21} = 3 \\ x^*_{34} = 2 \\ x^*_{41} = 4 \\ x^*_{43} = 6 \\ x^*_{22} = 0 \end{cases}$$

$$, \quad Z^* = C^T X^* = 8\times1 + 2\times2 + 2\times3 + 2\times2 + 4\times3 + 6\times1 = 40$$

$$Y^* = \begin{cases} u^*_1 = v^*_1 = 0 \\ u^*_2 = 2 \\ u^*_3 = 0 \\ u^*_4 = 3 \\ v^*_2 = 1 \\ v^*_3 = -2 \\ v^*_4 = 2 \end{cases}$$

$$W^* = \sum_{i=1}^{4} s_i u^*_i + \sum_{j=1}^{4} v^*_j d_j$$

$$= (0 + 2\times3 + 0 + 3\times10) + (0 + 1\times8 + (-2)\times6 + 2\times4)$$

$$= 40$$

همانطور که انتظار می‌رفت، جواب بهینه‌ی اولیه و دوگان با هم برابر است.